短文

带饱和执行器的不确定时滞系统的鲁棒控制[1)]

苏宏业* 蒋培刚 褚 健
(浙江大学工业控制技术国家重点实验室、先进控制研究所 杭州 310027)
(* E-mail:hysu@mail.hz.zj.cn)

摘 要 研究了一类具有饱和执行器约束的不确定时滞系统时滞依赖型无记忆鲁棒控制问题.所考虑的时滞系统包括时变未知但有界的不确定参数以及状态和控制的时滞项.文中应用了Lyapunov定理以及线性矩阵不等式(LMI)方法来研究该系统的分析和综合问题,导出了一个新的鲁棒可镇定判据和相应的无记忆鲁棒镇定控制律设计方法.所得的基于一组LMIs的结果是与时滞相关的.

关键词 不确定时滞系统,饱和执行器,无记忆状态反馈,时滞依赖,线性矩阵不等式(LMI).

ROBUST CONTROL FOR TIME-DELAY SYSTEMS CONTAINING SATURATING ACTUATORS

SU Hongye JIANG Peigang CHU Jian
(National Key Lab. of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract The delay-dependent memoryless robust stabilization problem for a class of uncertain time-delay systems containing saturating actuator is considered in this paper. The uncertain time-delay systems under consideration include time-varying unknown-but-bounded uncertain parameters and time-delays in both state and control, the delays are assumed to be constant bounded but unknown. Lyapunov theorem and linear matrix inequality (LMI) approach are employed to investigate these control problems. A new sufficient condition for the existence of memoryless robust stabilizing control law is derived. The results depend on the size of delays and are given in terms of LMIs.

Key words Uncertain time-delay systems, saturating actuator, memoryless state feedback, delay-dependent, linear matrix inequality(LMI).

1) 国家自然科学基金(NSFC:69934030)、浙江省自然科学基金重点资助项目.
收稿日期 1997-11-17 收修改稿日期 1998-12-28

1　引言

时滞和执行器饱和都是实际控制系统中的常见现象,这两类系统的研究由于其重要的理论和实际意义历来是控制理论的研究热点,并已有了许多结果[1,2]. 近来,带有饱和执行器的不确定时滞系统的鲁棒镇定问题开始受到关注[3~5]. 在本文中,用 LMI 方法研究同时具有状态和控制滞后且带有饱和执行器的时变不确定时滞系统,其目的是得到一个时滞依赖的稳定性判据及设计一个无记忆状态反馈控制律使得闭环系统鲁棒稳定.

2　系统描述及定义

考虑如下的不确定时滞系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = &(A+\Delta A(t))\boldsymbol{x}(t)+(A_1+\Delta A_1(t))\boldsymbol{x}(t-d)+\\ &(B+\Delta B(t))\boldsymbol{u}'(t)+(B_1+\Delta B_1(t))\boldsymbol{u}'(t-h),\end{aligned} \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{u}'(t)=\mathrm{sat}(\boldsymbol{u}(t)),\mathrm{sat}(\boldsymbol{u}(t))=[\mathrm{sat}(u_1(t)),\mathrm{sat}(u_2(t)),\cdots,\mathrm{sat}(u_m(t))]. \tag{1b}$$

上式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态向量,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是执行器的控制输入向量,$\boldsymbol{u}'(t)\in R^m$ 是对象的控制输入向量;A,A_1,B,B_1是具有适当维数的定常矩阵;饱和函数的定义为(如图1所示)

$$\mathrm{sat}(u_i(t))=\begin{cases}\underline{u}_i, & u_i(t)\leqslant \underline{u}_i<0,\\ u_i(t), & \underline{u}_i\leqslant u_i(t)<\bar{u}_i,\\ \bar{u}_i, & u_i(t)\geqslant \bar{u}_i>0;\end{cases}$$

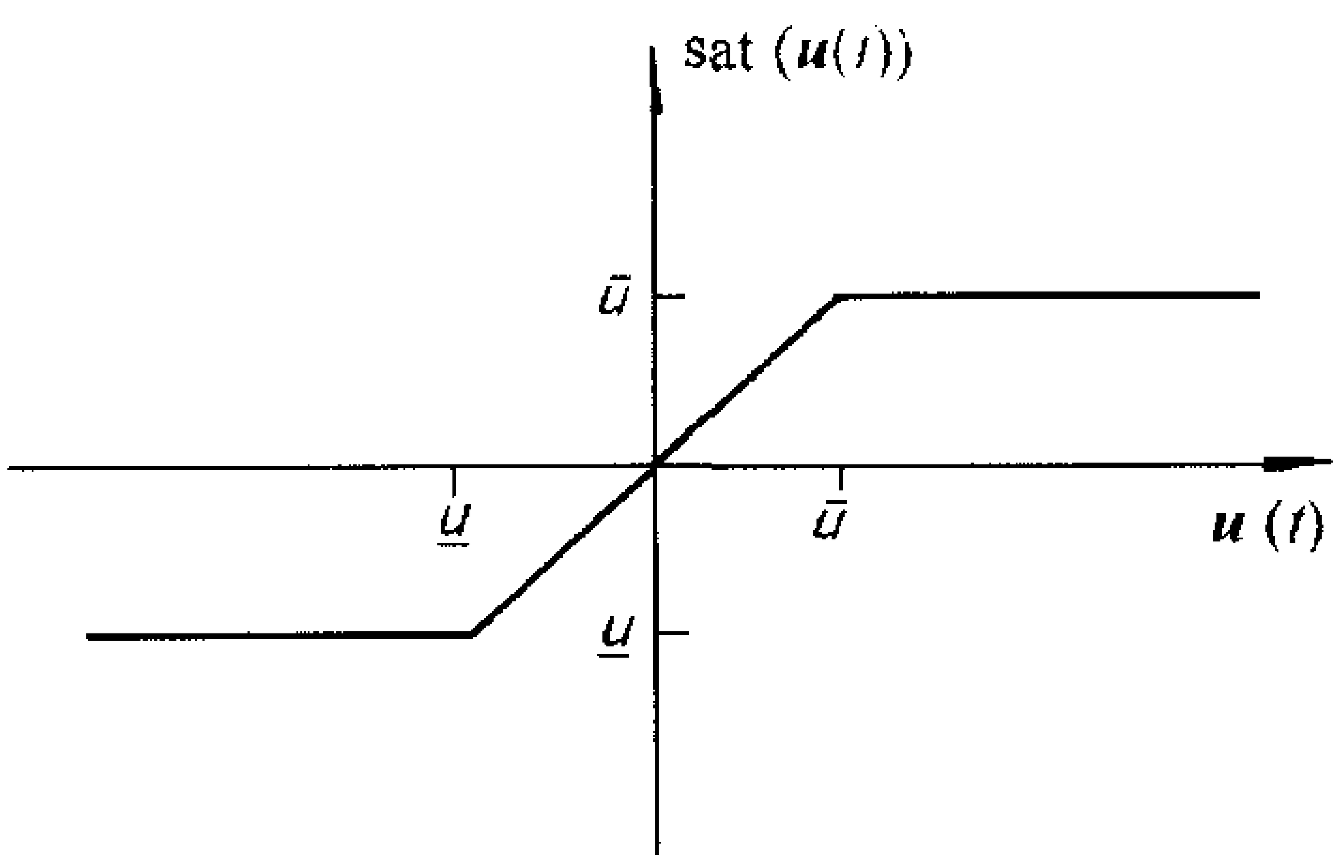

图1　饱和函数

d 和 h 为未知但有界的标量,并假设存在正实数 d^*,h^* 和 τ 使得对所有的 t 满足

$$0\leqslant d\leqslant d^*\leqslant\tau,\quad 0\leqslant h\leqslant h^*\leqslant\tau. \tag{2}$$

在本文中,假设不确定性具有如下形式

$$\begin{aligned}&\Delta A(t)=H_1F_1(t)E_1,\quad \Delta A_1(t)=H_2F_2(t)E_2,\\ &\Delta B(t)=H_3F_3(t)E_3,\quad \Delta B_1(t)=H_4F_4(t)E_4.\end{aligned} \tag{3}$$

上式中 $F_i(t)$是未知的实时变矩阵但有 $F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t)\leqslant I(i=1,2,3,4)$;$H_i,E_i(i=1,2,3,4)$是具有恰当维数的已知实定常矩阵.

3　带饱和执行器不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定

在这一节中,针对带饱和执行器的不确定时滞系统(1)~(3),将给出一个新的鲁棒可镇定的充分条件以及相应的控制器设计方法.

定理1. 对不确定时滞系统(1)~(3),给定标量 d^*,h^* 和 τ 满足式(2),那么系统是鲁棒可镇定的;如果存在正定对称矩阵 X,P_j,Q_j,T_j,Z_j,矩阵 Y,Y_j 和标量 $\varepsilon_i>0,\alpha_i>0(i=1,2,3,4)$,$\beta_{ij}>0(i=1,2)$和 $\sigma_i>0(i=1,2,\cdots,10)$,其中 $j=1,2,3,4$满足以下 LMIs

$$\begin{bmatrix} S & V \\ V^{\mathrm{T}} & U \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} S_j & Y_j E_4^{\mathrm{T}} \\ E_4 Y_j^{\mathrm{T}} & J_i \end{bmatrix} \geqslant 0, \begin{bmatrix} A_1 Q_j A_1^{\mathrm{T}} + \beta_{1j} H_2 H_2^{\mathrm{T}} - T_2 & A_1 Q_j E_2^{\mathrm{T}} \\ E_2 Q_j A_1^{\mathrm{T}} & E_2 Q_j E_2^{\mathrm{T}} - \beta_{1j} I \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} AA^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1 H_1 H_1^{\mathrm{T}} - Q_1 & AE_1^{\mathrm{T}} \\ E_1 A^{\mathrm{T}} & E_1 E_1^{\mathrm{T}} - \varepsilon_1 I \end{bmatrix} \leqslant 0, \begin{bmatrix} A_1 A_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 H_2 H_2^{\mathrm{T}} - Q_2 & A_1 E_2^{\mathrm{T}} \\ E_2 A_1^{\mathrm{T}} & E_2 E_2^{\mathrm{T}} - \varepsilon_2 I \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} BB^{\mathrm{T}} + \varepsilon_3 H_3 H_3^{\mathrm{T}} - Q_3 & BE_3^{\mathrm{T}} \\ E_3 B^{\mathrm{T}} & E_3 E_3^{\mathrm{T}} - \varepsilon_3 I \end{bmatrix} \leqslant 0, \begin{bmatrix} B_1 B_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon_4 H_4 H_4^{\mathrm{T}} - Q_4 & B_1 E_4^{\mathrm{T}} \\ E_4 B_1^{\mathrm{T}} & E_4 E_4^{\mathrm{T}} - \varepsilon_4 I \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} S = & AX + XA^{\mathrm{T}} + A_1 X + XA_1^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + B_1 Y + Y^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} + \\ & \sum_{i=1}^{4} \alpha_i H_i H_i^{\mathrm{T}} + \sigma_1 Q_3 + \sigma_2 Q_4 + d^* (\sigma_3 T_1 + 2\sigma_4 T_3 + \sigma_5 T_2 + 2\sigma_6 T_4) + \\ & h^* (\sigma_7 P_1 + 2\sigma_8 P_3 + \sigma_9 P_2 + 2\sigma_{10} P_4), \end{aligned}$$

$$V = [M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4 \quad M_5], U = \mathrm{diag}(-N_1, -N_2, -N_3, -N_4, -N_5),$$

$$M_1 = [XE_1^{\mathrm{T}} \quad XE_2^{\mathrm{T}}], M_2 = [Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} \quad Y^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}}], M_3 = [Y^{\mathrm{T}} \quad Y^{\mathrm{T}}],$$

$$M_4 = [d^* X \quad d^* X \quad h^* X \quad h^* X], M_5 = [d^* Y^{\mathrm{T}} \quad d^* Y^{\mathrm{T}} \quad h^* Y^{\mathrm{T}} \quad h^* Y^{\mathrm{T}}],$$

$$N_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1 I, \alpha_2 I), N_2 = \mathrm{diag}(\alpha_3 I, \alpha_4 I), N_3 = \mathrm{diag}(\sigma_1 I, \sigma_2 I),$$

$$N_4 = \mathrm{diag}(d^* \sigma_3 I, d^* \sigma_5 I, h^* \sigma_7 I, h^* \sigma_9 I),$$

$$N_5 = \mathrm{diag}(\frac{1}{2} d^* \sigma_4 I, \frac{1}{2} d^* \sigma_4 I, \frac{1}{2} h^* \sigma_8 I, \frac{1}{2} h^* \sigma_{10} I),$$

$$S_j = P_j - Y_j B_1^{\mathrm{T}} - \beta_{2j} H_4 H_4^{\mathrm{T}}, J_j = \beta_{2j} I - E_4 Z_j E_4^{\mathrm{T}}.$$

那么,一个合适的鲁棒镇定控制律为 $\boldsymbol{u}(t) = 2YX^{-1}\boldsymbol{x}(t)$.

4 结 论

本文研究了一类带饱和执行器的不确定时滞系统的鲁棒镇定综合问题.针对该系统以 LMI 的形式给出了一个时滞依赖型鲁棒可镇定的新判据和相应的无记忆鲁棒镇定控制律设计方法.

参 考 文 献

1 Kosut R L. Design of linear systems with saturating linear control bounded state. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1983, **AC-28**(1):121～124

2 Li X, C E de Souza. Criteria for robust stability of uncertain linear systems with time-varying state delays. In: Proc. of 13th World Congress of IFAC, San Francisco, USA, 1996, 137～142

3 Chou J H, Horng I-R, Chen B S. Dynamic feedback compensator for uncertain time-delay systems containing saturating actuator. *Int. J. Control*, 1989, **49**(6):961～968

4 Niculescu S -I, Dion J-M, Dugard L. Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1996, **AC-41**(5):742～747

5 Su Hongye, Chu Jian. Robust stablizing control for uncertain time-delay systems contain saturating actuators. In: IFAC Workshop on LTDs'98, Grenoble, France, 1998,7～12

附录 A

定理1的证明.

对系统(1)～(3)，引入控制律 $\boldsymbol{u}(t)=2K\boldsymbol{x}(t)$，并取闭环系统的 Lyapunov 函数为

$$V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)+\int_{-d}^{0}\Big[\int_{t-h+s}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)R_4\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}s+\int_{-h}^{0}\Big[\int_{t+s}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)R_5\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}s+$$
$$\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)R_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{-d}^{0}\Big[\int_{t+s}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)R_2\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{t-d+s}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)R_3\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}s+$$
$$\int_{-h}^{0}\Big[\int_{t-d+s}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)R_6\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{t-h+s}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)R_7\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}s,$$

其中 P,R_i 是正定对称矩阵. 考虑到 $\boldsymbol{x}(t-\tau)=\boldsymbol{x}(t)-\int_{-\tau}^{0}\dot{\boldsymbol{x}}(t+\theta)\mathrm{d}\theta$ 及文[2]中的引理 1 ～ 3，如果下列不等式满足

$$AA^{\mathrm{T}}+AE_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon_1I-E_1E_1^{\mathrm{T}})^{-1}E_1A^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1H_1H_1^{\mathrm{T}}\leqslant Q_1,\tag{A1}$$
$$A_1A_1^{\mathrm{T}}+A_1E_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2I-E_2E_2^{\mathrm{T}})^{-1}E_2A_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2H_2H_2^{\mathrm{T}}\leqslant Q_2,\tag{A2}$$
$$BB^{\mathrm{T}}+BE_3^{\mathrm{T}}(\varepsilon_3I-E_3E_3^{\mathrm{T}})^{-1}E_3B^{\mathrm{T}}+\varepsilon_3H_3H_3^{\mathrm{T}}\leqslant Q_3,\tag{A3}$$
$$B_1B_1^{\mathrm{T}}+B_1E_4^{\mathrm{T}}(\varepsilon_4I-E_4E_4^{\mathrm{T}})^{-1}E_4B_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_4H_4H_4^{\mathrm{T}}\leqslant Q_4,\tag{A4}$$
$$\varepsilon_iI-E_iE_i^{\mathrm{T}}>0,i=1,2,3,4,\tag{A5}$$

其中 $\varepsilon_i>0,Q_i>0,i=1,2,3,4$；

$$A_1Q_jA_1^{\mathrm{T}}+A_1Q_jE_2^{\mathrm{T}}(\beta_{1j}I-E_2Q_jE_2^{\mathrm{T}})^{-1}E_2Q_jA_1^{\mathrm{T}}+\beta_{1j}H_2H_2^{\mathrm{T}}\leqslant T_j,\tag{A6}$$
$$B_1Z_jB_1^{\mathrm{T}}+B_1Z_jE_4^{\mathrm{T}}(\beta_{2j}I-E_4Z_jE_4^{\mathrm{T}})^{-1}E_4Z_jB_1^{\mathrm{T}}+\beta_{2j}H_4H_4^{\mathrm{T}}\leqslant P_j,\tag{A7}$$
$$\beta_{1j}I-E_2Q_jE_2^{\mathrm{T}}>0,\beta_{2j}I-E_4Z_jE_4^{\mathrm{T}}>0,j=1,2,3,4,\tag{A8}$$

其中 $\beta_{ij}>0,T_j>0,Z_j=KQ_jK^{\mathrm{T}},P_j>0,\quad i=1,2,\quad j=1,2,3,4$. 则有

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))\leqslant&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)W\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Big\{A^{\mathrm{T}}P+PA+A_1^{\mathrm{T}}P+PA_1+K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P+PBK+\\&K^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}P+PB_1K+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^{-1}E_i^{\mathrm{T}}E_i+\sum_{i=3}^{4}\alpha_i^{-1}K^{\mathrm{T}}E_i^{\mathrm{T}}E_iK+\sigma_1^{-1}K^{\mathrm{T}}K+\sigma_2^{-1}K^{\mathrm{T}}K+\\&P\Big[\sum_{i=1}^{4}\alpha_iH_iH_i^{\mathrm{T}}+\sigma_1Q_3+\sigma_2Q_4+d^*(\sigma_3T_1+2\sigma_4T_3+\sigma_5T_2+2\sigma_6T_4)+\\&h^*(\sigma_7P_1+2\sigma_8P_3+\sigma_9P_2+2\sigma_{10}P_4)\Big]P+d^*(\sigma_3^{-1}I+\sigma_5^{-1}I+2\sigma_4^{-1}K^{\mathrm{T}}K+\\&2\sigma_6^{-1}K^{\mathrm{T}}K)+h^*(\sigma_7^{-1}I+\sigma_9^{-1}I+2\sigma_8^{-1}K^{\mathrm{T}}K+2\sigma_{10}^{-1}K^{\mathrm{T}}K)\Big\}\boldsymbol{x}(t).\end{aligned}\tag{A9}$$

如果对标量 $d^*>0,h^*>0$，存在正定对称矩阵 $P,P_j,Z_j,Q_j,T_j(j=1,2,3,4)$；矩阵 K 及标量 $\alpha_i>0$，$\varepsilon_i>0(i=1,2,3,4)$；$\beta_{ij}>0(i=1,2,j=1,2,3,4)$ 及 $\sigma_i>0(i=1,2,\cdots,10)$ 满足不等式(A1)～(A8)及 $W<0$，那么对任意的 $0\leqslant d\leqslant d^*$ 和 $0\leqslant h\leqslant h^*$，有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t),t)\leqslant-\alpha\|\boldsymbol{x}(t)\|^2$，其中 $\alpha=-\lambda_{\max}(W)>0$. 由 Lyapunov 定理和定义1，对任意的 $0\leqslant d\leqslant d^*$，$0\leqslant h\leqslant h^*$，闭环系统是鲁棒稳定的，即原系统(1)～(3)是鲁棒可镇定的.

令 $X=P^{-1},Y=KX,Y_j=B_1Z_j,j=1,2,3,4,W_1=XWX$. 由 schur 引理可知不等式(A1)～(A8)和 $W_1<0$ 等价于式(4)中的 LMIs.

苏宏业　1969年生. 1990年毕业于南京化工大学，1995年获浙江大学工业自动化专业博士学位，现为副教授、先进控制研究所副所长. 研究方向为鲁棒控制、非线性控制、时滞系统控制和 PID 自整定理论.

蒋培刚　1976年生. 1996年毕业于西安交通大学自动控制系，现为浙江大学工业控制技术研究所博士研究生. 研究方向为鲁棒控制、时滞系统控制.

褚　键　1963年生. 1982年毕业于浙江大学化工系，1989年获日本京都大学工学博士学位. 1993年被聘为浙江大学教授、博士生导师，现为浙江大学工业自动化国家工程研究中心副主任、先进控制研究所副所长. 研究方向为时滞系统控制、非线性控制、鲁棒控制.