第 17 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 4
1991 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1991

关于 Popov 不等式求解的第二子问题

姚 妙 新　　王 恒 震
（天津大学数学系）　　（天津理工学院自动化系）
李 广 义
（天津工业自动化仪表研究所）

摘　　要

本文给出 Popov 不等式求解第二子问题解的新形式，发展了文[1,2]的有关结论，扩展了选取自适应规律的范围.

关键词： 模型参考自适应系统(MRAS)，渐近超稳定性，波波夫积分不等式.

一、引　　言

以超稳定性法设计 MRAS，应将系统化为 Popov 标准型，并使标准型的前馈块满足严格正实条件，而反馈块满足 Popov 不等式

$$\eta(0, t_1) \triangleq \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T(t)\boldsymbol{w}(t)dt \geqslant -r_0^2, \quad t_1 \geqslant 0.$$

其中 r_0^2 为任一正数，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 分别为 n 维输入输出矢量.

在参数自适应情况下，应找反馈块输出为

$$\boldsymbol{w}(t) = \left[\int_0^t \phi_1(\boldsymbol{v}, t, \tau)d\tau + \phi_2(\boldsymbol{v}, t) + A_0\right]\boldsymbol{y}(t)$$

时，满足 Popov 不等式的解 ϕ_1 和 ϕ_2 的形式，由

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T \left[\int_0^t \phi_1(\boldsymbol{v}, t, \tau)d\tau + A_0\right]\boldsymbol{y}\,dt + \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T\phi_2(\boldsymbol{v}, t)\boldsymbol{y}dt,$$

问题化归为两个子问题，第一子问题已作另文讨论. 第二子问题即

寻求 ϕ_2 的一般形式，使得

$$(B) \qquad \eta_2(0, t_1) \triangleq \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T\phi_2(\boldsymbol{v}, t)\boldsymbol{y}dt \geqslant -r_2^2, \quad t_1 \geqslant 0.$$

在文[1]中，Landau 给出 ϕ_2 的一些形式，例如，$\phi_2(\boldsymbol{v}, t) = F(t)\boldsymbol{v}(t)[G(t)\boldsymbol{y}(t)]^T$. 其中 F 和 G 为正半定时变矩阵，使 (B) 式成立，文[2]又给出三种 ϕ_2 的形式使 (B) 式

本文于 1989 年 10 月 14 日收到.

成立.

本文考虑 ϕ_2 的更一般的形式,所得结果覆盖并推广了所有上述结果,从而进一步扩展了自适应规律选取范围.

二、主 要 结 果

考虑 $\phi_2(\boldsymbol{v},t)=[\phi_2^{ij}(\boldsymbol{v},t)]_{n\times q}$.

这里 n 和 q 为两个正整数. 矩阵元素形如

$$\phi_2^{ij}(\boldsymbol{v},\ t)=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant q}} H_{iikl}v_k(t)y_l(t).$$

其中 H_{iikl} 皆为变量 t 的分段连续函数.

记

$$I(t)\triangleq\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}\phi_2^{ij}(\boldsymbol{v},t)v_i(t)y_j(t),$$

$$V\triangleq\|\boldsymbol{v}(t)\|=\left[\sum_{1\leqslant k\leqslant n}v_k^2(t)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$Y\triangleq\|\boldsymbol{y}(t)\|=\left[\sum_{1\leqslant l\leqslant q}y_l^2(t)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$\mathscr{B}(V,Y)\triangleq\Big\{\xi(t)\,|\,\xi(t)$ 是$[0,+\infty)$上非负分段连续函数,满足

$$\int_0^{+\infty}\xi(t)V^2Y^2dt<+\infty\Big\}.$$

注 1. 显然函数集 $\mathscr{B}(V,Y)$ 对加法和非负数乘封闭,且包含零函数. 而且依据 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的性态,不难选取属于 $\mathscr{B}(V,Y)$ 的函数 $\xi(t)$. 特别,当 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的分量皆有界时,形如 $\dfrac{b}{(a+t)^p}$ 或 $\dfrac{b}{a+t^p}$ 的函数 $(b>0,a>0,p>1)$ 属于 $\mathscr{B}(V,Y)$.

对任一函数 $f(t)$, 用 f^+ 和 f^- 分别表示正负部,即

$$f^+(t)\triangleq\max\{0,f(t)\},$$

$$f^-(t)\triangleq\max\{0,-f(t)\}.$$

命题 1. 若成立

$$(H_1)\ H_{iikl}^+ + H_{iikl}^-\in\mathscr{B}(V,Y),$$

$$1\leqslant i,k\leqslant n,\ 1\leqslant j,l\leqslant q,$$

则 (B) 式成立.

证明. 因

$$I(t)=\sum_{i,j}\left(\sum_{k,l}H_{iikl}v_kv_l\right)v_iy_i$$

$$\geqslant-\sum_{i,j,k,l}(H_{iikl}^+ + H_{iikl}^-)\,|v_iv_ky_iy_l|$$

$$\geqslant-\sum_{i,j,k,l}(H_{iikl}^+ + H_{iikl}^-)\|\boldsymbol{v}(t)\|^2\|\boldsymbol{y}(t)\|^2,$$

故由 $\eta_2(0,\ t_1)=\int_0^{t_1} I(t)dt$ 及 (H_1) 式，

易得 (B) 式成立.

现以 Λ_F^+ 及 Λ_F^- 分别表示实对称矩阵 F 的特征值的正部和及负部和，以 J_F 表示 F 的迹.

命题 2. 若成立

(H_2) $H_{iikl}=F_{ik}G_{li}$，

$1\leqslant i,k\leqslant n, 1\leqslant j,l\leqslant q$，且矩阵

$$F\triangleq(F_{ik}),\ G\triangleq(G_{li}),$$

皆为时变实对称方阵，且满足

$$\Lambda_F^+\Lambda_G^- + \Lambda_F^-\Lambda_G^+\in\mathscr{B}(V,Y),$$

则 (B) 式成立.

证明. 设正交矩阵 f 和 g 使得

$$fFf^T=\mathrm{diag}[\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t)],$$
$$gGg^T=\mathrm{diag}[\mu_1(t),\mu_2(t),\cdots,\mu_q(t)],$$

则

$$\sum_{i,k} F_{ik}v_iv_k=\sum_i \lambda_i(t)(f\boldsymbol{v})_i^2$$
$$=\sum_i \lambda_i^+(f\boldsymbol{v})_i^2+\sum_i(-\lambda_i^-)(f\boldsymbol{v})_i^2.$$

这里，$(f\boldsymbol{v})_i\triangleq\sum_m f_{im}v_m$ 表示矢量 $f\boldsymbol{v}$ 第 i 个分量，以后也沿用这类表示方法. 完全类似，

$$\sum_{l,j} G_{li}y_ly_i=\sum_j \mu_j^+(g\boldsymbol{y})_j^2+\sum_i(-\mu_i^-)(g\boldsymbol{y})_i^2,$$

故

$$I(t)=\sum_{i,k} F_{ik}v_iv_k\cdot\sum_{l,j} G_{li}y_ly_i$$
$$\geqslant-\Big[\sum_i \lambda_i^+(f\boldsymbol{v})_i^2\cdot\sum_j \mu_j^-(g\boldsymbol{y})_j^2+\sum_i \lambda_i^-(f\boldsymbol{v})_i^2$$
$$\cdot\sum_j \mu_j^+(g\boldsymbol{y})_j^2\Big]$$
$$\geqslant-(\Lambda_F^+\Lambda_G^-+\Lambda_F^-\Lambda_G^+)\|\boldsymbol{v}(t)\|^2\|\boldsymbol{y}(t)\|^2.$$

这里用到了

$$\|f\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{v}\|,\ \|g\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{y}\|.$$

故

$$\eta_2(0,t_1)=\int_0^{t_1} I(t)dt\geqslant-\int_0^{+\infty}(\Lambda_F^+\Lambda_G^-+\Lambda_F^-\Lambda_G^+)V^2Y^2dt,$$

从而 (B) 式成立.

注 2. 当 F 和 G 皆时变正半定，则

$$\Lambda_F^+\Lambda_G^- + \Lambda_F^-\Lambda_G^+ \equiv 0$$

显然为 $\mathscr{B}(V,Y)$ 中元素，从而 (B) 式成立. 此时

$$\phi_2^{ij}(\boldsymbol{v},\ t) = \sum_{k,l} F_{ik}G_{li}v_k y_l = (F\boldsymbol{v})_i(G\boldsymbol{y})_i,$$

即

$$\phi_2(\boldsymbol{v},t) = F\boldsymbol{v}[G\boldsymbol{y}]^T.$$

这正是文[1]中 Landau 引理 $D.1$—5 的情况.

注3. 在 $\phi_2(\boldsymbol{v},t)$ 的上述表示式中，F 和 G 可分别表示为两个时变正半定矩阵之差，即

$$F = F_1 - F_2,\ G = G_1 - G_2,$$

则从命题 2 容易推出，只要

$$J_{F_1}J_{G_2} + J_{F_2}J_{G_1} \in \mathscr{B}(V,Y),$$

就有 (B) 式成立. 此外据注 1 可以得出，当 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的分量皆有界时，只要在 Landau 引理 $D.1$—5 中的 F' 和 G' 有有界迹，就可以从它的主对角线上各元素减去任意形如 $\frac{b}{(a+t)^p}$ 或 $\frac{b}{a+t^p}$ 的函数 $(a,b>0,p>1)$，或者加上任意非负有界函数，而不影响系统的渐近超稳定性.

命题 3. 若成立

(H_3) $H_{iikl} = \delta_{ik}\delta_{jl}\alpha_{ij}$，且 $\alpha_{ij}^- \in \mathscr{B}(V,Y)$，

$$1 \leqslant i,k \leqslant n,\ 1 \leqslant j,l \leqslant q,$$

则 (B) 式成立.

证明. 只需注意到

$$I(t) = \sum_{i,j}\alpha_{ij}v_i^2y_j^2 \geqslant -\sum_{i,j}\alpha_{ij}^-v_i^2y_j^2 \geqslant -\left(\sum_{i,j}\alpha_{ij}^-\right)\|\boldsymbol{v}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2$$

以及 $\mathscr{B}(V,Y)$ 关于加法的封闭性即可.

注 4. 本命题推广了文[1]中引理 $D.1$—6 以及文[2]中命题 3 的结果.

命题 4. 若成立

(H_4) $H_{iikl} = F_{iik}\cdot\delta_{jl}, 1 \leqslant i,k \leqslant n, 1 \leqslant j,l \leqslant q,$

且矩阵 $F_j \triangleq (F_{iik})$，$1 \leqslant j \leqslant q$，

为时变实对称方阵，并满足

$\Lambda_{F_j}^- \in \mathscr{B}(V,Y), 1 \leqslant j \leqslant q$，则 (B) 式成立.

证明略.

注 5. 当每个 F_j 为时变正半定，则 $\Lambda_{F_j}^- \equiv 0$ 显然属于 $\mathscr{B}(V,Y)$. 这正是文[2]中命题 1 的情形. 而本文上述结果表明，若在上述各 F_j 的主对角线元素上加上任意非负函数或者减去任意属于 $\mathscr{B}(V,Y)$ 的函数，是不影响系统的渐近超稳定性的.

命题 5. 若成立

(H_5) $H_{iikl} = \delta_{ik}G_{iil}, 1 \leqslant i,k \leqslant n, 1 \leqslant j,l \leqslant q$. 且矩阵 $G_i \triangleq (G_{iil}), 1 \leqslant i \leqslant n$，皆

为时变实对称方阵，并满足

$\Lambda_{G_i}^{-}\in\mathscr{B}(V,Y)$，$1\leqslant i\leqslant n$，则（$B$）式成立.

证明略.

注 6. 本命题为文[2]中命题 2 的推广.

命题 6. 当

$$H_{iikl}=\sum_{m=1}^{5}H_{iikl}^{(m)},1\leqslant i,k\leqslant n,1\leqslant j,l\leqslant q.$$

且 $H_{iikl}^{(m)}$ 满足条件（H_m），$m=1,2,3,4,5$. 则（B）式成立.

证明略. 此结论具有实用灵活性，实际就是前面各命题可以综合运用. 例如，我们有下述注.

注 7. 综合命题 1 和 2 或者命题 1 和 3 等，容易得出，在 Landau 引理 $D.1$—5 中的 F' 和 G' 若有有界迹，那么可在它们的任何元素上加上或者减去任何属于 $\mathscr{B}(V,Y)$ 的函数，由此得出的新的自适应规律仍可使系统渐近超稳定. 在文[2]的命题 1 中的时变正半定方阵（$F_i^TF_i$）中的元素上，加上或者减去任何属于 $\mathscr{B}(V,Y)$ 的函数，在方阵的主对角线元素上还可加上任意非负函数，所得出的新的自适应规律仍将保持系统的渐近超稳定性.

例. 设等效反馈系统反馈块的输入为

$$\boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix}v_1(t)\\v_2(t)\end{bmatrix},$$

可调系统的状态为

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{bmatrix},$$

并设 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的分量皆为 t 的有界函数，若采用文[2]的方法，取

$$F_1=[\sin t,\ \cos t]^T[\sin t,\ \cos t]=\begin{bmatrix}\sin^2 t, & \sin t\cos t\\ \sin t\cos t, & \cos^2 t\end{bmatrix},$$

$$F_2=\begin{bmatrix}1, & t\\ 2t, & \dfrac{1}{1+t}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1, & t\\ 2t, & \dfrac{1}{1+t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+4t^2, & t+\dfrac{2t}{1+t}\\ t+\dfrac{2t}{1+t}, & t^2+\dfrac{1}{(1+t)^2}\end{bmatrix},$$

$$F_3=\left[\frac{\ln(1+t)}{1+t^2},\ t\right]^T\left[\frac{\ln(1+t)}{1+t^2},\ t\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\ln^2(1+t)}{(1+t^2)^2}, & \dfrac{t\ln(1+t)}{1+t^2}\\ \dfrac{t\ln(1+t)}{1+t^2}, & t^2\end{bmatrix}.$$

可取自适应规律为

$$\phi_2(\boldsymbol{v},\ t)=\begin{bmatrix}(\sin^2 t v_1+\sin t\cos t v_2)y_1,\\ \\ (\sin t\cos t v_1+\cos^2 t v_2)y_1,\\ \left[(1+4t^2)v_1+\left(t+\frac{2t}{1+t}\right)v_2\right]y_2,\\ \left[\left(t+\frac{2t}{1+t}\right)v_1+\left(t^2+\frac{1}{(1+t)^2}\right)v_2\right]y_2,\\ \left[\frac{\ln^2(1+t)}{(1+t^2)^2}v_1+\frac{t\ln(1+t)}{1+t^2}v_2\right]y_3\\ \left[\frac{t\ln(1+t)}{1+t^2}v_1+t^2v_2\right]y_3\end{bmatrix}.$$

根据本文结果，见注1—6，可分别将 F_1、F_2 和 F_3 改变为

$$\begin{bmatrix}1, & \sin t\cos t\\ \\ \sin t\cos t, & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1+4t^2, & t+\frac{2t}{1+t}\\ \\ t+\frac{2t}{1+t}, & t^2\end{bmatrix}\text{ 和 }\begin{bmatrix}0, & \frac{t\ln(1+t)}{1+t^2}\\ \\ \frac{t\ln(1+t)}{1+t^2}, & t^2\end{bmatrix}.$$

而得出新的自适应规律，进一步根据命题 6 和注 7、还可将 F_1、F_2 和 F_3 改变为

$$\begin{bmatrix}e^t, & \sin t\cos t\\ \\ \sin t\cos t, & e^t\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1+4t^2, & t+\frac{2t}{1+t}+\frac{1}{1+t^2}\\ \\ t+\frac{2t}{1+t}-\frac{1}{1+t^2}, & t^2-\frac{1}{1+t^2}\end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix}t^2, & \frac{t\ln(1+t)-1}{1+t^2}\\ \\ \frac{t\ln(1+t)-2}{1+t^2}, & t^2\end{bmatrix}.$$

与文[2]不同，这里出现了非对称矩阵，由此得出新的自适应规律

$$\phi_2(\boldsymbol{v},t)=\begin{bmatrix}(e^t v_1+\sin t\cos t v_2)y_1,\\ \\ (\sin t\cos t v_1+e^t v_2)y_1\\ \left[(1+4t^2)v_1+\left(t+\frac{2t}{1+t}+\frac{1}{1+t^2}\right)v_2\right]y_2,\\ \left[\left(t+\frac{2t}{1+t}-\frac{1}{1+t^2}\right)v_1+\left(t^2-\frac{1}{1+t^2}\right)v_2\right]y_2,\end{bmatrix}$$

$$\left(t^2v_1+\frac{t\ln(1+t)+1}{1+t^2}v_2\right)y_3\Bigg]\cdot$$
$$\left(\frac{t\ln(1+t)-2}{1+t^2}v_1+t^2v_2\right)y_3\Bigg]$$

仍然使系统渐近超稳定。

参　考　文　献

[1] Landau, I. D., Adaptive Control, The Model Reference Approach, Marcel Dekker, New York, 1979.

[2] 王礼信、周俊荣，关于 MRAS Landau 设计方法的一个注记，自动化学报. **13**(1987),3, 229—231.

ON THE SECOND SUBPROBLEM FOR SOLVING THE POPOV'S INEQUALITY

YAO MIAOXIN

(*Dept. of Maths., Tianjin University*)

WANG HENGZHEN

(*Tianjin Institute of Technology*)

LI GUANGYI

(*Tianjin Institute for Process Automation and Instrumentation*)

ABSTRACT

In this paper, a more general form of the soluton to the second subproblem for solving the Popov's inequality is given, hence the corresponding results in [1] and [2] are extended. Using this method, more freedom in selecting the adaptation laws can be obtained.

Key words: MRAS; asymptotic hyperstability; Popov's inequality.