第18卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 18, No. 1
1992年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1992

关于波波夫不等式求解的第一子问题

王 恒 震 (天津理工学院自动化系 300191)
姚 妙 新 (天津大学数学系 300072)
李 广 义 (天津工业自动化仪表研究所 300060)

摘 要

本文讨论波波夫不等式求解的第一子问题，给出解的更一般形式，进一步推广了关于MRAS的Landau设计方法中的一些结果,扩展了选取复杂自适应规律的范围.

关键词: 模型参考自适应系统 (MRAS),渐近超稳定性,波波夫不等式，正实传递矩阵.

一、引 言

以超稳定性设计 MRAS,应将系统化为波波夫标准型（等价反馈系统），欲使系统为渐近超稳定的,应使波波夫标准型前向块满足严格正实条件,而其反馈块满足波波夫积分不等式

$$\eta(0,t_1)\triangleq\int_0^{t_1}\boldsymbol{v}^T(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t\geqslant -r_0^2,\ \forall t_1\geqslant 0,$$

其中 r_0^2 为有限正常数,$\boldsymbol{v}$ 为反馈块 n 维输入矢量,$\boldsymbol{w}$ 为反馈块 n 维输出矢量.

在参数自适应情况下,根据 Landau 假定[1],应找

$$\boldsymbol{w}(t)=\left[\int_0^t\Phi_1(\boldsymbol{v},t,\tau)\mathrm{d}\tau+\Phi_2(\boldsymbol{v},t)+A_0\right]\boldsymbol{y}(t)$$

时满足

$\eta(0,t_1)\geqslant -r_0^2$ 的解 Φ_1,Φ_2 的一般形式,由

$$\eta(0,t_1)=\int_0^{t_1}\boldsymbol{v}^T\left[\int_0^t\Phi_1(\boldsymbol{v},t,\tau)+A_0\right]\boldsymbol{y}\mathrm{d}t+\int_0^{t_1}\boldsymbol{v}^T\Phi_2(\boldsymbol{v},t)\boldsymbol{y}\mathrm{d}t,$$

问题化归两个子问题,其中第一子问题为:

寻求 Φ_1 的一般形式,使得

$$A)\quad \eta_1(0,t_1)\triangleq\int_0^{t_1}\boldsymbol{v}^T\left(\int_0^t\Phi_1(\boldsymbol{v},t,\tau)d\tau+A_0\right)\boldsymbol{y}\mathrm{d}t\geqslant -r_1^2,$$

$\forall t_1\geqslant 0$ (其中 γ_1^2 为有限正常数)成立.

若对自适应机构要求有记忆时,对 Φ_1 还要求

$$A')\quad \lim_{t\to\infty}v(t)=0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\int_0^t\Phi_1(v,t,\tau)=\text{非零常数矩阵}.$$

本文于1990年6月5日收到.

在文献[1]中，Landau 给出了一些结果(即引理 $D.1-1$ 至 $D.1-4$ 等),本文将寻求解的更一般形式,并结合对 $v(t)$ 和 $y(t)$ 性态的考虑,得出更一般的相应结果,从而扩展了选取自适应规律的范围.

二、主要结果

考虑 $\Phi_1(\boldsymbol{v},t,\tau)=[\Phi_1^{ij}(\boldsymbol{v},t,\tau)]_{n\times q}$,其元素形如

$$\Phi_1^{ij}(\boldsymbol{v},t,\tau)=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant l\leqslant q}}P_{ijkl}v_k(\tau)y_l(\tau),$$

P_{ijkl} 皆为变量 t 的分段连续函数，记 $R(t)=\int_0^t\sum_{\substack{1\leqslant i,k\leqslant n\\1\leqslant j,l\leqslant q}}v_i(t)y_j(t)P_{ijkl}v_k(\tau)y_l(\tau)\mathrm{d}\tau$,则

$\eta_1(0,t_1)=\int_0^{t_1}(R(t)+\boldsymbol{v}^TA_0\boldsymbol{y})\mathrm{d}t.$

对于 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$,定义矩阵集合:

$\mathscr{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})\triangleq\{P(t)\,|\,P(t)$ 为$[0+\infty)$ 上实对称可微矩阵,满足 $\Lambda_P^-\left(\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^2$ 有界和

$\Lambda_{P'}^+\left(\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^2$ 可积，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant q\}$，其中 Λ_P^- 表示矩阵 P 的特征值负部之和，$\Lambda_{P'}^+$ 表示矩阵 P 的导数矩阵的特征值正部之和.

注 1. 当 $|v_i(t)y_j(t)|\leqslant\dfrac{M}{(a+t)^p}$，$\forall t_1\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant q$，其中 $M,a>0$，$p>1$[2]. $\mathscr{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})$ 中元素的两个显然例子是任意常数对称矩阵和对角元素为有界非增可微函数的任意对角矩阵.

当 $|v_i(t)y_j(t)|$ 有界，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant q$，$\mathscr{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})$ 中元素的一个例子是对角元素皆形如 $b/(a+t)^p$ 或 $b/a+t^p$的对角矩阵，这里 b 是任意常数，a 为任意正数，p 为大于 2 的任意常数. 因此在了解 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$ 的性态情况下,选取 $\mathscr{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})$ 中的元素是不难的.

命题 1. 当 $P_{ijkl}=(F_{ijk}(t-\tau)+A_{ijk}(t))\delta_{jl}$,
且对每个 $1\leqslant j\leqslant q$，矩阵 $F^j\triangleq(F_{ijk}(t-\tau))$ 是一个正定方阵核，其拉氏变换是在 $s=0$ 处有一个极点的正实传递矩阵,矩阵 $A^j(A_{ijk}(t))$ 属于 $\mathscr{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})$，则 A)成立，即系统是渐近超稳定的.

若还有 $$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{v}(t)=0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}A_{ijk}(t)\int_0^t v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau=\text{非零常数矩阵},$$

$$1\leqslant i,\ k\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant q,$$

则 A')成立,即系统具有记忆.

注 2. 本命题为文献[1]中引理 $D.1-1$ 的推广,后者相当于每个 A^j 为零矩阵的情形.

证.

$$\eta_1(0,t_1)=\int_0^{t_1}(R(t)+\boldsymbol{v}^T A_0\boldsymbol{y})\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{t_1}\left[\int_0^t\sum_{i,j,k,l}v_i(t)y_j(t)P_{ijkl}v_k(\tau)y_l(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{v}^T(t)A_0\boldsymbol{y}(t)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{t_1}\left[\int_0^t\sum_{i,j,k}v_i(t)y_j(t)F_{ijk}(t-\tau)v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{v}^T(t)A_0\boldsymbol{y}(t)\right]\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^{t_1}\left[\int_0^t\sum_{i,j,k}A_{ijk}(t)v_i(t)y_j(t)v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t.$$

根据 Landau 引理 $D.1\text{-}1$ 的证明，第一个积分大于某负常数，故只需证明第二个积分(记为 I_2)大于某负常数即可。

由 $A_{ijk}(t)=A_{kji}(t)$,

$$I_2=\int_0^{t_1}\left(\int_0^t\sum_{i,j,k}A_{ijk}(t)v_i(t)y_j(t)v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\sum_{i,j,k}A_{ijk}(t)\mathrm{d}\left(\int_0^t v_i(t)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^t v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_j\sum_{i,k}A_{ijk}(t)\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^t v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\Big|_0^{t_1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_j\int_0^{t_1}\left(\sum_{i,k}A'_{ijk}(t)\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^t v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t,$$

现设正交矩阵 $g^j(t)$ 使得

$$g^j(t)A_{ijk}(t)g^j(t)^T=\mathrm{diag}[\lambda_1^j(t),\lambda_2^j(t),\cdots,\lambda_n^j(t)],$$

则有

$$\sum_{i,k}A_{ijk}(t)\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^t v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\sum_{i=1}^n\lambda_i^j(t)\sum_{k=1}^n\left[g_{ik}^j(t)\cdot\int_0^t v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2$$

$$\geqslant-\sum_{i=1}^n\Lambda_{A^j}^-\sum_{k=1}^n\left[g_{ik}^j(t)\cdot\int_0^t v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2$$

$$=-\sum_{i=1}^n\Lambda_{A^j}^-\left[\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2.$$

这里用到了正交变换保持长度不变的性质．类似地，有

$$\sum_{i,k}A'_{ijk}(t)\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^t v_k(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\Lambda_{A^{j'}}^+\left[\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2,$$

从而

$$I_2\geqslant-\frac{1}{2}\sum_j\sum_i\Lambda_{A^j}^-\left(\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^2\Big|_0^{t_1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{i}\int_{0}^{t_1}\Lambda_{A}^{+}i'\left[\int_{0}^{t}v_i(\tau)y_i(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2\mathrm{d}t.$$

由于
$$\int_0^t\Phi_1(\boldsymbol{v},\tau,t)\mathrm{d}\tau=\int_0^t\left(\sum_{k,l}F_{ijk}(t-\tau)\delta_{jl}v_k(\tau)y_l(\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_0^t\left(\sum_{k,l}A_{ijk}(t)\delta_{jl}v_k(\tau)y_l(\tau)\right)\mathrm{d}\tau,$$
当 $t\to\infty$，前一积分趋于非零常数矩阵，这是因为 $F^i(t)$ 的拉氏变换在 $s=0$ 处有一极点(参见文[1]引理 $D.1$-1 的证明)，后一积分趋于零矩阵，从而 A')成立。

类似地，有下述命题，它的特殊情况即文献[1]中引理 $D.1$-3。

命题 2. 当
$$P_{ijkl}=\delta_{ik}(G_{ijl}(t-\tau)+B_{ijl}(t)),$$
且对每个 $1\leqslant i\leqslant n$，矩阵 $G^i\triangleq(G_{ijl}(t-\tau))$ 是一个正定方阵核，它的拉氏变换是在 $s=0$ 处有一个极点的正实传递矩阵，矩阵 $B^i\triangleq(B_{ijl}(t))$ 属于 $\mathscr{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})$，则 A)成立；若还有
$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{v}(t)=0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}B_{ijl}(t)\int_0^t v_i(\tau)y_l(\tau)\mathrm{d}\tau=\text{非零常数矩阵},$$
则 A')成立。

命题 3. 当
$$P_{ijkl}=(k^{ij}(t-\tau)+c^{ij}(t))\delta_{ik}\delta_{lj},$$
且 $k^{ij}(t-\tau)$ 是一个正定标量核，其拉氏变换是在 $s=0$ 处有一个极点的正实传递函数，作为 1×1 矩阵，$c^{ij}(t)$ 属于 $\mathscr{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})$，则 A)成立；若还有
$$\lim_{t\to\infty}v(t)=0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}c^{ij}(t)\int_0^t v_i(\tau)y_j(\tau)\mathrm{d}\tau=\text{非零常数},$$
则 A')成立。

证．完全类似于命题 1，系标量情况。

下述命题是文献[1]中引理 $D.1$-2 的推广。

命题 4. 当
$$P_{ijkl}=(F_{ik}(t-\tau)+D_{ik}(t))G_{lj},$$
且矩阵 $F\triangleq(F_{ik}(t-\tau))$ 是一个正定方阵核，它的拉氏变换是在 $s=0$ 处有一个极点的正实传递矩阵，矩阵 $D\triangleq(D_{ik}(t))$ 属于 $\mathscr{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})$，矩阵 $G\triangleq(G_{lj})$ 是一个正定矩阵，则 A)成立；若还有
$$\lim_{t\to\infty}v(t)=0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}D_{ik}(t)\int_0^t v_k(\tau)y_l(\tau)\mathrm{d}\tau=\text{非零常数矩阵},$$
则 A')成立。

证．第一部分只需证明
$$J\triangleq\int_0^{t_1}\sum_{i,j,k,l}\left(\int_0^t D_{ik}(t)G_{lj}v_i(t)y_j(t)v_k(\tau)y_l(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t$$
有下界(参见文献[1]引理 $D.1$-2 的证明)。

令

$$G = \bar{G}\bar{G}^T,\ \text{则}\ G_{lj} = \sum_{\nu=1}^{q} \bar{G}_{l\nu}\bar{G}_{j\nu},$$

记 $\bar{y}_\nu(t) = \sum_{j=1}^{q} \bar{G}_{j\nu} y_j(t)$,

则
$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_1} \sum_{i,k,\nu} \left(\int_0^t D_{ik}(t) v_i(t) v_k(\tau) \bar{y}_\nu(t) \bar{y}_\nu(\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_\nu \int_0^{t_1} \left(\int_0^t \sum_{i,k} D_{ik}(t) v_i(t) \bar{y}_\nu(t) v_k(\tau) \bar{y}_\nu(\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t \\ &\geqslant -\frac{1}{2} \sum_\nu \Lambda_D^- \sum_i \left(\int_0^t v_i(\tau) \bar{y}_\nu(\tau)\ \mathrm{d}\tau \right)^2 \Big|_0^{t_1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_\nu \int_0^{t_1} \Lambda_{D'}^+ \sum_i \left(\int_0^t v_i(\tau) \bar{y}_\nu(\tau) \mathrm{d}\tau \right)^2 \mathrm{d}t \\ &\geqslant \mathrm{const}\,\Lambda_D^- \sum_{i,j} \left(\int_0^t v_i(\tau) \bar{y}_j(\tau) \mathrm{d}\tau \right)^2 \Big|_0^{t_1} \\ &\quad - \mathrm{const} \int_0^{t_1} \Lambda_{D'}^+ \sum_{i,j} \left(\int_0^t v_i(\tau) y_j(\tau) \mathrm{d}\tau \right)^2 \mathrm{d}t \end{aligned}$$

由于 D 属于 $\mathscr{L}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})$，所以结论成立.

第二部分的证明是容易的，在此从略.

以上命题实际上减弱了文献 [1] 中诸引理中关于正定方阵核的要求. 根据 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$ 的性态和本文结果，在引用 Landau 诸引理的时候，将有关的正定方阵核作适当的改变而系统的渐近超稳定性或者记忆性将不改变. 因此在选取自适应规律，特别是复杂自适应规律方面获得更大自由.

三、应用举例

在文献[1]中，由状态方程(4.1—1)—(4.1—6)描述的模型参考自适应系统，在自适应规律的一般形式中选取一些特别的形式，即可获得积分、积分加比例以及积分加继电器自适应，它们在实践中可以获得满意的效果，但 Landau 指出，选取其它形式自适应规律的可能性尚未充分探索. 根据本文结果、结合对 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$ 的了解，有时可方便地获得其它自适应规律而保持系统的渐近超稳定性或记忆性. 例如，当 $|v_i(t)y_j(t)|$ 有界，代替积分型自适应:

$$F_A(t-\tau) = F_A > 0\ \text{和}\ F_B(t-\tau) = F_B > 0,\ t \geqslant \tau,$$

可以在它们的主对角线元素上随意增减形如 $\dfrac{b}{(a+t)^p}$ 或 $\dfrac{b}{a+t^p}$ 的函数.

而当 $|v_i(t)y_j(t)| \leqslant \dfrac{M}{(a+t)^p}$ 时，(见注 1) 可以在它们的任意一个元素上增减任何常数，并且在主对角线元素上随意增加一个有界非增的函数. 这样，便得出其它一些新的

自适应规律.

2）在分段连续标量输入函数作用下，SISO 模型参考自适应控制系统、可被描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_m\boldsymbol{x} + B_m\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A_s(\boldsymbol{v},t)\boldsymbol{y} + B_s(\boldsymbol{v},t)\boldsymbol{u}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v} = D\boldsymbol{e}. \tag{4}$$

若等价反馈系统的前向块已由线性补偿器变换为严格正实块,且对一切 $t \geqslant 0$,

$$|v_i(t)y_j(t)| \leqslant \frac{M}{(a+t)^p}, \text{ 式中 } M > 0,\ a > 0, p > 1$$

$$i = 1,\cdots,n,\ j = 1,\cdots,n.$$

若选取自适应规律为

$$A_s(\boldsymbol{v},t) = \int_0^t H_2\boldsymbol{v}(\tau)[\boldsymbol{y}(\tau)]^T d\tau + H_1\boldsymbol{v}(t)[\boldsymbol{y}(t)]^T + A_s(0),$$

$$B_s(\boldsymbol{v},t) = \int_0^t K_2\boldsymbol{v}(\tau)[\boldsymbol{u}(\tau)]^T d\tau + K_1\boldsymbol{v}(t)[\boldsymbol{u}(t)]^T + B_s(0),$$

式中 $A_s(0)$ 和 $B_s(0)$ 是被控对象参数矩阵的初始值，H_1,H_2 为任意常数矩阵， $K_1 \geqslant 0$，$K_2 > 0$，$0 \leqslant \tau \leqslant t$. 则此 MRAC 系统必是渐近超稳定的.

事实上,由(1)—(4)式可得

$$\dot{\boldsymbol{e}} = A_m\boldsymbol{e} + I\boldsymbol{w}_1$$

$$\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w}_1 = \left[\int_0^t H_2\boldsymbol{v}(\tau)\boldsymbol{y}(\tau)^T + H_1\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{y}(t)^T + A_s(0) - A_m\right]\boldsymbol{y}(t)$$
$$+ \left[\int_0^t K_2\boldsymbol{v}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau + K_1\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{u}(t) + B_s(0) - B_m\right]\boldsymbol{u}(t),$$

式中 $\boldsymbol{w}$ 为反馈块的输出.

根据文献[1]中的引理 D.1-2 以及本文和文献[3]的结论,可立即得出

$$\eta(0,\ t_1) = \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}dt \geqslant \text{const.} > -\infty.$$

这是因为可将由文献[1]得出的 $H_2 > 0$ 和 $H_1 \geqslant 0$，$0 \leqslant \tau \leqslant t$ 的要求，通过本文及文[3] 的结果加以放松. 文献[2]中的引理是本例中 $H_2 = H_1 = 0$ 的特殊情况. 这说明本文的结论确有一定的实用性.

参 考 文 献

[1] Landau, I. D., Adaptive Control, The Model Reference Approach, Marcel Dekker, New York, (1979).

[2] Wang, L.X. (王礼信),Study of Simplifying Schemes for Designing MRAC, IECON'88: *Control and Simulation*, **10**(1988), 314—319. Singapore.

[3] 姚妙新、王恒震、李广义,关于波波夫不等式求解的第二子问题,自动化学报,**4**(1991).

ON THE FIRST SUBPROBLEM FOR SOLVING THE POPOV'S INEQUALITY

WANG HENGZHEN

(*Dept. of Automation, Tianjin Institute of Technology* 300191)

YAO MIAOXIN

(*Dept. of Mathematics, Tianjin University* 300072)

LI GUANGYI

(*Tianjin Institute for Process Automation and Instrumentation* 300060)

ABSTRACT

In this paper, a more general form of the solution to the first subproblem for solving the Popov's inequality is given., hence the corresponding results in [1] are extended and more freedom in selecting the adaptation laws can be obtained.

Key words: Model reference adaptive system (MRAS); asymptoptic hyperstability; Popov's inequality; positive and real transfer matrix.

王恒震 1935 年生，山东黄县人。1956 年毕业于上海交通大学电讯工程系。现任教于天津理工学院自动化系，并担任天津模式识别与智能控制专业委员会委员，曾从事电视与广播设备、家电及教学机器人的研制。现研究领域为计算机控制系统、自适应控制，和视觉制导机器人等。

姚妙新 1947 年生于上海。南开大学数学系研究生毕业，曾赴美国明尼苏达大学研修偏微分方程、非线性分析及自控理论。现任天津大学数学系副主任、副教授，并任天津模式识别与智能控制专业委员会委员。目前研究领域为非线性方程和自适应控制。

李广义 1945 年生，河北蠡县人。1970 年毕业于大连工学院。曾从事机加工生产线的设计与制造及自动化仪表的研制，获国家科技大会奖及天津市科技进步二等奖。现为天津工业自动化仪表研究所工程师，中国自动化学会会员，感兴趣的领域为工业自动化及仪表和控制理论及应用等。