基于微分方程对称的分布参数系统稳态控制

魏 萍 [1] 丁 卯 [1] 左 信 [1] 罗雄麟 [1]

摘 要 应用对称群理论中经典对称, 以无穷小生成元为分析工具, 考虑分布参数系统的控制问题已有研究, 在此基础上, 本文给出利用微分方程对称实现分布参数系统稳态控制的方法. 通过求解微分方程的对称, 借助其和无穷小生成元之间的关系, 研究给出符合控制目标稳态要求的分布参数系统边界控制条件. 针对两个例子, 说明了利用微分方程对称实现分布参数系统稳态控制的过程, 设计了边界控制条件, 进行了仿真说明. 相较基于经典对称获得分布参数系统无穷小生成元的过程, 利用微分方程对称, 避免了空间延拓过程, 并可能获得与其不同的无穷小生成元形式.

关键词 分布参数系统, 稳态控制, 边界控制, 对称, 无穷小生成元

引用格式 魏萍, 丁卯, 左信, 罗雄麟. 基于微分方程对称的分布参数系统稳态控制. 自动化学报, 2014, **40**(10): 2163−2170

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.02163

Steady-state Control for Distributed Parameter Systems by Symmetry of Differential Equations

WEI Ping[1] DING Mao[1] ZUO Xin[1] LUO Xiong-Lin[1]

Abstract The problem of controlling distributed parameter systems has been studied by infinitesimal generators based on classical symmetry in some literature. Motivated by this, the symmetry of differential equations used to realize steady-state control of distributed parameter systems is presented in the paper. After computing the symmetry of the differential equations, the boundary control condition satisfying the control purpose can be obtained by the relationship between the symmetry and infinitesimal generators. The steps to realize the steady-state control of distributed parameter systems are described by two examples, and their effectiveness are shown by simulations. Compared with the process obtaining the infinitesimal generators by classical symmetry, the infinitesimal generators can be obtained without space prolongation, and some new type infinitesimal generators may be found in the process. Furthermore, the methods of designing steady-state control law presented here provide a new branch for the research on controlling distributed parameter systems by symmetry group.

Key words Distributed parameter systems, steady-state control, boundary control, symmetry, infinitesimal generator

Citation Wei Ping, Ding Mao, Zuo Xin, Luo Xiong-Lin. Steady-state control for distributed parameter systems by symmetry of differential equations. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(10): 2163−2170

分布参数系统在实际生活中广泛存在, 建立其数学模型及设计控制方案, 一直是国内外相关领域学者的研究课题[1]. 边界控制是分布参数系统控制中研究较为广泛的一个分支, 存在大量研究成果[2−11]. 如 Ng 等利用无穷维线性状态空间表示法考虑了一类具有时变项的反应扩散模型的最优边界控制问题[2]; Alessandri 等通过有线维逼近思想对 Burgers 方程设计了反馈最优控制方案[3]; Smyshlyaev 等将 Backstepping 方法用于不稳定热方程的边界控制中, 建立了一套控制理论[4−5], 并在自适应边界控制领域做出了一系列成果[6−7]. 之后, Liu 等和 Wu 等分别针对热方程的镇定问题和非线性抛物型系统的指数稳定性进行了相关研究[8−9]; Cheng 等分析了一类含有参数变化和不确定边界的不稳定热方程的滑动模态边界控制问题[10−11].

本文准备基于对称群理论研究分布参数系统边界控制, 实现系统稳态的问题. 微分方程的对称群 (李群) 理论最早是由挪威数学家 SoPhus Lie 提出, 当前主要应用于求解微分方程的精确解[12−13]. 2000 年, Palazoğlu 等提出了推广的不变性条件, 以及利用对称群理论实现分布参数系统控制的思想[14]. 随后, 又将该思想具体化, 采用经典对称, 以无穷小生成元作为分析工具, 研究了分布参数系统控制的实现问题[15]. 在此基础上, 文献 [16] 给出了利用无穷

收稿日期 2012-12-31 录用日期 2014-05-01
received December 31, 2012; accepted May 1, 2014
国家自然科学基金 (20976193), 中国石油大学 (北京) 科研基金资助项目 (KYJJ2012-05-31)
Supported by National Natural Science Foundation of China (20976193), and the Science Foundation of China University of Petroleum (KYJJ2012-05-31)
本文责任编委 李少远
Recommended by Associate Editor LI Shao-Yuan
1. 中国石油大学 (北京) 自动化系 北京 102249
1. Department of Automation, China University of Petroleum, Beijing 102249

小生成元实现分布参数系统控制的具体步骤, 并研究了 Burgers 方程的开环和闭环形式的边界控制.

本文通过求解微分方程的对称, 利用其和无穷小生成元之间的关系, 研究实现分布参数系统稳态控制, 设计边界控制律的方法. 微分方程的对称目前也主要用于求解偏微分方程, 通过求解偏微分方程的对称, 利用对称将偏微分方程约化为常微分方程进而求得方程的解[12, 17−18]. 国内学者田畴等关于微分方程的对称有着深入的研究, 相关结果是求解偏微分方程精确解的一个重要分支[12, 17−18].

相较基于经典对称获得分布参数系统的无穷小生成元过程, 利用微分方程对称, 可以略去系统的空间延拓过程, 计算过程相对简化, 并可能获得不同形式的无穷小生成元, 丰富了设计方案的选择性. 另外, 本文对于一类分布参数系统, 给出了实现系统稳态控制的设计方法, 详细分析了设计边界控制律的具体实现过程, 丰富了基于对称群理论研究分布参数系统控制的内容.

下面本文先研究微分方程对称与无穷小生成元之间的关系; 然后, 对于一类分布参数系统, 给出基于无穷小生成元实现分布参数系统稳态控制, 设计边界控制律的具体过程; 最后, 针对两个具体例子设计符合控制目标要求的边界控制条件, 并进行仿真说明.

1 关于对称

基于微分方程对称的分布参数系统边界控制设计过程, 首先需求得系统方程的对称, 利用对称与无穷小生成元之间的关系, 然后考虑边界控制条件的设计问题.

1.1 定义

下面介绍微分方程对称的定义, 详细描述见文献 [12].

考虑偏微分方程

$$u_t = K\left(x, t, u, u_x, u_{xx}, \cdots\right) \tag{1}$$

其中, x, t 是自变量. 设 M 是全体连续可微函数 $u(x,t)$ 的集合, $G = \{g_\varepsilon \,|\varepsilon \in \mathbf{R}\}$ 是作用于 M 上的一个单参数变换群, 即

$$g_\varepsilon:\ u \to \bar{u} = \bar{u}(u,\, \varepsilon)$$

且 $g_0 u = u$, 即 $\bar{u}(u,\, 0) = u$. 则 $g_\varepsilon u = \bar{u}$ 是 M 中过 u 的一条曲线, 记 $\sigma(u)$ 是曲线在 u 的切向量, 则

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon}\,|_{\varepsilon=0} = \sigma(u)$$

是 M 上与 G 相对应的向量场. 由

$$\bar{u}(u,\varepsilon) = u + \varepsilon\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon}\,|_{\varepsilon=0} + \cdots = u + \varepsilon\sigma(u) + \cdots \tag{2}$$

方便起见, 记 $K(\bar{u}) = K(x,t,u,u_x,u_{xx},\,\cdots)\,|_{u=\bar{u}}$, 则

$$K(\bar{u}) = K(\bar{u})\,|_{\varepsilon=0} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}K(\bar{u})}{\mathrm{d}\varepsilon}\,|_{\varepsilon=0} + \cdots \tag{3}$$

由 $K(\bar{u})\,|_{\varepsilon=0} = K(u)$, 以及 $\dfrac{\mathrm{d}K(\bar{u})}{\mathrm{d}\varepsilon}\,|_{\varepsilon=0} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}K(u+\varepsilon\sigma)\,|_{\varepsilon=0} = K'(u)\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\varepsilon}\,|_{\varepsilon=0} = K'(u)\,\sigma$, 其中 $K'(u)\,\sigma$ 是 $K(u)$ 对 u 沿 $\sigma(u)$ 方向的方向导数 (简记为 $K'\sigma$)

$$K'\sigma = \frac{\partial K}{\partial u}\sigma + \frac{\partial K}{\partial u_x}\sigma_x + \frac{\partial K}{\partial u_{xx}}\sigma_{xx} + \cdots \tag{4}$$

故

$$K(\bar{u}) = K(u) + \varepsilon K'\sigma(u) + \cdots \tag{5}$$

由不变群的定义, 如果有 $u_t = K(u)$ 成立, 则 $\bar{u}_t = K(\bar{u})$ 成立. 结合式 (2) 和式 (5), 即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(u)}{\mathrm{d}t} = K'(u)\sigma(u)$$

简记为 $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = K'\sigma$. 于是给出对称定义如下:

定义 1. g_ε 是方程 (1) 的单参数不变群, $\sigma(u)$ 是与之相对应的向量场, 且 $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = K'\sigma$, 其中 u 是方程 (1) 的解, 那么, 将这样与方程的单参数不变群相对应的向量场 $\sigma(u)$ 称为该方程的一个对称[12].

1.2 求解微分方程的对称

考虑方程

$$u_t = K\left(x, t, u, u_x, u_{xx}, \cdots\right)$$

设方程的一个对称 σ 的表达式为

$$\sigma = a(x,t)\,u_x + b(x,t)\,u_t + c(x,t)\,u + d(x,t)$$

则

$$\sigma_t = au_{xt} + a_t u_x + bu_{tt} + b_t u_t + cu_t + c_t u + d_t = au_{xxx} + a_t u_x + bu_{xxt} + b_t u_t + cu_{xx} + c_t u + d_t$$

$$\sigma_x = au_{xx} + a_x u_x + bu_{xt} + b_x u_t + cu_x + c_x u + d_x$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = {} & a u_{xxx} + 2a_x u_{xx} + a_{xx} u_x + \\ & b u_{xxt} + 2b_x u_{xt} + \\ & b_{xx} u_t + c u_{xx} + 2c_x u_x + c_{xx} u + d_{xx}\end{aligned}$$

根据定义 1, σ 满足等式:

$$\sigma_t = K' \sigma \tag{6}$$

将系统方程 (1)、式 (4), 以及上述 σ_t、σ_x、σ_{xx} 的表达式, 代入式 (6), 确定参数 a、b、c、d, 进而得到对称 σ 的表达式.

1.3 对称与无穷小生成元之间的关系

接下来借助系统的对称群理论, 由对称 $\sigma(u)$ 得到系统的无穷小生成元 v. 对于一个单参数变换群 $\bar{\boldsymbol{X}} = U(\boldsymbol{X}, \varepsilon)$, $\boldsymbol{X} = (x,\ t,\ u)$, 将其在 $\varepsilon = 0$ 展开, 则

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} + \varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} \right) + \cdots$$

记 $\eta(\boldsymbol{X}) = \left(\dfrac{\partial U}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \right)$, 称 $\bar{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} + \varepsilon\eta(\boldsymbol{X})$ 为该变换群的无穷小变换, $\eta(\boldsymbol{X}) = (\xi(\boldsymbol{X}), \tau(\boldsymbol{X}), \phi(\boldsymbol{X}))$ 为该变换群的无穷小, 而算子

$$v = \xi(\boldsymbol{X})\frac{\partial}{\partial x} + \tau(\boldsymbol{X})\frac{\partial}{\partial t} + \phi(\boldsymbol{X})\frac{\partial}{\partial u}$$

称为该变换群的无穷小生成元. 关于无穷小生成元的详细介绍, 可参考文献 [12−15].

从对称和无穷小生成元的定义不难看出, 对于由方程 (1) 的解 $u = u(x,t)$ 所构成的空间流形, $v \cdot u$ 和 $\sigma(u)$ 同样表示流形在 u 的切方向, 即如下关系成立

$$\sigma(u) = v \cdot u \tag{7}$$

2 设计边界控制条件

确定了对称与无穷小生成元的关系后, 即可通过对称 σ 获得相应的无穷小生成元 v, 从而利用推广的不变性条件、输出条件、边界输入等, 确定边界控制律的解析形式.

对于如下分布参数系统:

$$\begin{cases} u_t = K(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots),\ a < x < b \\ u(a,t) = g(t) \\ F(x,t,u,u_x)\big|_{x=b} = 0 \\ u(x,0) = U_0(x) \end{cases}$$

其中, x 是空间位置变量, t 是时间变量, $u\,(x,t)$ 是系统的状态变量. 研究问题是: 设计出合适的边界控制条件 $g(t)$, 实现系统输出符合给定的稳态控制要求, 即对于某点 $\hat{x} \in (a,\ b]$, $\lim_{t\to\infty} u(\hat{x},t) = U_\infty$, U_∞ 为设定的稳态目标值.

首先根据第 1.2 节和 1.3 节的描述, 确定基于微分方程对称的无穷小生成元的基本形式:

$$v = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

设 $u(\hat{x},t) = h(t)$, 根据推广的不变性条件和控制目标, 有下式成立

$$\begin{cases} \Pr^{(n)} v[F(x,t,u,u_x)|_{x=b} = 0] = 0 \\ \Pr^{(n)} v[u(\hat{x},t) = h(t)] = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} h(t) = U_\infty \end{cases} \tag{8}$$

由此, 确定符合系统输出目标要求的无穷小生成元, 即确定系数 $\xi(x,t,u)$、$\tau(x,t,u)$、$\phi(x,t,u)$ 的具体形式.

控制方式可以选择设计为开环控制形式或闭环控制形式.

1) 如果设计开环形式的边界控制, 那么边界控制形式为: $u(a,t) = g(t)$, 由推广的不变性条件:

$$\Pr^{(n)} v[u(a,t) = g(t)] = 0 \tag{9}$$

从中确定边界控制律 $g(t)$.

2) 如果设计闭环形式的边界控制, 需选择反馈环节, 不妨令: $u(a,t) = g(t) = f(u(x_c,t))$, $x_c \in (a,\ b]$. 这表明设置了 x_c 处的状态反馈, $f(\cdot)$ 表示状态反馈的函数关系. 由推广的不变性条件, 有

$$\Pr^{(n)} v[u(a,t) = f(u(x_c,t)] = 0 \tag{10}$$

从中确定边界控制律 $g(t)$.

注 1. $\Pr^{(n)} v$ 是无穷小生成元 v 的 n 阶延拓, 这里

$$\begin{aligned}\Pr^{(n)} v = {} & v + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \\ & \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \cdots\end{aligned}$$

而实际上, 由于式 (8) ∼ (10) 中一般不包含状态变量关于位置变量和时间变量的导数项 (即 u_x, u_t, u_{xx}, $\cdots$), 故式 (8) 中

$$\Pr^{(n)} v[u(\hat{x},t) = h(t)] = 0 \Leftrightarrow v[u(\hat{x},t) = h(t)] = 0$$

$$\text{式 (9)} \Leftrightarrow v[u(a,t) = g(t)] = 0$$

$$\text{式 (10)} \Leftrightarrow v[u(a,t) = f(u(x_c,t)] = 0$$

注 2. 设计闭环形式的边界控制时, 可根据实际的状态可测量情况, 设置反馈状态 $u(x_c,t)$ 的位置 x_c, 这里, $x_c \in (a,\ b]$.

注 3. 尽管上述研究问题是对于某一点 $\hat{x} \in (a,\ b]$, 实现 $\lim_{t\to\infty} u(\hat{x},t) = U_\infty$. 不过具体设计过程中, 如果在保证式 (8) 成立情况下, 能够通过恰当选择参数, 得到与 $\hat{x}$ 无关的无穷小生成元, 那么可以实现 $\forall x \in (a,\ b]$, $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = U_\infty$. 第 4.2 节即利用这个性质实现了控制系统稳定性的要求.

3 实例研究和仿真验证

这里将利用微分方程的对称, 针对分布参数系统进行边界控制律设计, 并通过仿真实验说明.

3.1 具有对流项的热传导方程

考虑一类分布参数系统, 如下:

$$\begin{cases} u_t = \lambda_1 u_{xx} + \lambda_2 u_x, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u\left(0,t\right) = g\left(t\right), & t > 0 \\ u_x\left(1,t\right) = 0, & t > 0 \\ u\left(x,0\right) = U_0\left(x\right), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

这是一种包含对流特性的热传导方程, 通常参数 λ_1 表示传导特性系数, λ_2 表示对流特性系数. 研究问题是: 选取适当的边界控制律 $g(t)$, 实现右端 $x = 1$ 处, 系统状态 $u\left(1,t\right)$ 稳定于 U_∞.

设 σ 为系统状态方程 $u_t = \lambda_1 u_{xx} + \lambda_2 u_x$ 的一个对称, 由定义 1 和式 (4) 联立可得对称条件式如下:

$$\sigma_t = \lambda_1 \sigma_{xx} + \lambda_2 \sigma_x$$

将 σ_t、σ_x、σ_{xx} 的表达式代入上式, 求解得该对称的表达式为

$$\begin{aligned} \sigma = {} & \left(c_1 x + c_3 t + c_4\right) u_x + \left(2c_1 t + c_2\right) u_t + \\ & \frac{c_3 x + c_1\lambda_2 x + \lambda_2\left(c_3 t + c_4\right) + c_1\lambda_2^2 t}{2\lambda_1} u + \\ & c_5\left(x + \lambda_2 t\right) + c_6 \end{aligned}$$

其中, c_1、c_2、c_3、c_4、c_5、c_6 是待定常数. 根据对称和无穷小生成元之间的关系式 (7), 即无穷小生成元系数的基本形式为

$$\begin{cases} \xi = c_1 x + c_3 t + c_4 \\ \tau = 2c_1 t + c_2 \\ \phi = \dfrac{\left(c_3 + c_1\lambda_2\right) x + c_1\lambda_2^2 t + \lambda_2\left(c_3 t + c_4\right)}{2\lambda_1} u + \\ \qquad c_5\left(x + \lambda_2 t\right) + c_6 \end{cases}$$

由式 (8):

$$\left(v + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x}\right)\left[u_x(1,t) = 0\right] = 0 \Leftrightarrow \left.\phi^x\right|_{x=1} = 0$$

从而

$$\frac{c_3 + c_1\lambda_2}{2\lambda_2} u(1,t) + c_5 = 0 \tag{11}$$

设 $h\left(t\right) = u\left(1,t\right)$, 由 $v[h\left(t\right)] = v[u\left(1,t\right)]$ 得:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = {} & \frac{c_3 + c_1\lambda_2 + \left(c_1\lambda_2^2 + \lambda_2 c_3\right) t + \lambda_2 c_4}{2\lambda_1\left(2c_1 t + c_2\right)} h + \\ & \frac{c_5\left(1 + \lambda_2 t\right) + c_6}{2c_1 t + c_2} \end{aligned}$$

为保证 $\lim_{t\to\infty} u\left(1,t\right) = U_\infty$, 需 $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0$ 成立. 在上式两边取极限, 可知:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1\lambda_2 + c_3 = 0 \\ c_5 = 0, c_1 \ne 0 \end{cases} \tag{12}$$

则 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\lambda_2 c_4}{2\lambda_1\left(2c_1 t + c_2\right)} h + \dfrac{c_6}{2c_1 t + c_2}$, 从而

$$h\left(t\right) = K_1\left(2c_1 t + c_2\right)^{\frac{\lambda_2 c_4}{4c_1\lambda_1}} - \frac{2\lambda_1 c_6}{\lambda_2 c_4}$$

其中 K_1 为常数. 为保证 $\lim_{t\to\infty} h(t) = U_\infty$, 需以下条件成立:

$$c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ \frac{\lambda_2 c_4}{4c_1\lambda_1} < 0,\ -\frac{2\lambda_1 c_6}{\lambda_2 c_4} = U_\infty$$

假设 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, 结合式 (11) 和 (12), 本着方便原则不妨选取其他参数如下:

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = -2,\ c_4 = -2,\ c_6 = 2U_\infty$$

则符合系统要求的无穷小生成元系数如下:

$$\begin{cases} \xi = x - 2t + 2 \\ \tau = 2t + 1 \\ \phi = -2u + 2U_\infty \end{cases}$$

注 4. 在本例中, 控制目标是要求实现在 $x = 1$ 处, 实现状态变量稳定于 U_∞. 所以在求解无穷小生成元的过程中直接令 $\hat{x} = 1$, 没有考虑无穷小生成元是否和 $\hat{x}$ 有关. 事实上, 按照本例对无穷小生成元相关系数 $\lambda_i\ (i = 1,\ 2)$, $c_i\ (i = 1, 2, \cdots, 6)$ 的选择, 即便将变量 $\hat{x}$ 代入, 也可以得到上述形式的无穷小生成元. 所以实际上对于本例可以实现

$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = U_\infty$, 关于这点从下面的仿真数据和图像上可以看出.

1) 设计开环控制形式. 式 (9) 变化为

$$v[u(0,t)] = v[g(t)]$$

求解可得控制律如下:

$$g(t) = k_1 (2t+1)^{-1} + U_\infty$$

k_1 为常数. 由 $u(x,0) = U_0(x)$, 则 $g(0) = U_0(0)$, 即确定 $k_1 = U_0(0) - U_\infty$. 设 $U_0(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $U_\infty = 2$, 则 $k_1 = -1$ 时, 能实现在 $x = 1$ 处, $\lim_{t\to\infty} u(1,t) = 2$, 有图 1 所示的曲线变化. 由曲线图可见, 在 $x = 1$ 处的状态变量从初始值开始上升并无限趋近于控制目标值. 图 2 是系统的状态变化图.

2) 设计闭环控制形式. 在系统右端设置反馈环节, 即

$$u(0,t) = f(u(1,t))$$

由式 (10)

$$v[u(0,t)] = v[f(u(1,t))]$$

从而可得:

$$u(0,t) = k_2 (u(1,t) - U_\infty) + U_\infty$$

其中 k_2 为常数. 同样设 $U_0(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $U_\infty = 2$, 则 $k_2 = 1/(2-\mathrm{e}^{-1})$, 控制效果仿真如图 3 和 4 所示. 从仿真数据和效果图 1 ~ 图 4 可以看到, 相比较而言, 在刚开始一段时间, 闭环控制的收敛速度慢于开环控制. 不过闭环控制能最终达到并稳定于设定的控制目标值, 而开环控制只能实现系统状态逐渐趋近, 很难在有限时间内达到目标值.

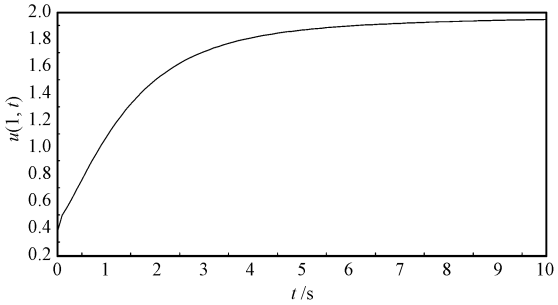

图 1　开环控制下 $u(1, t)$ 的曲线

Fig. 1　The plot of $u(1, t)$ in open-loop control

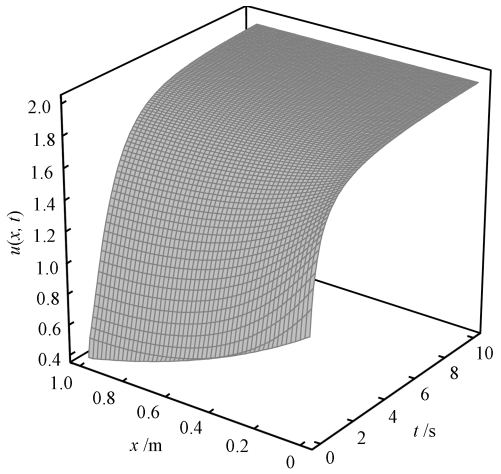

图 2　开环控制下 $u(x, t)$ 变化图

Fig. 2　The plot of $u(x, t)$ in open-loop control

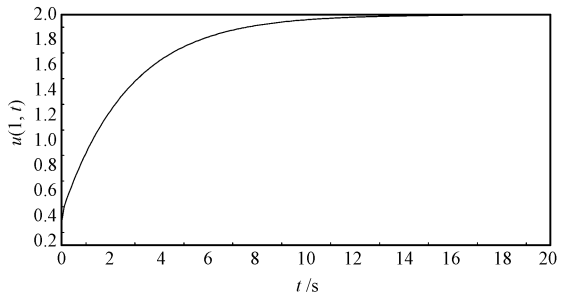

图 3　闭环控制下 $u(1, t)$ 的曲线

Fig. 3　The plot of $u(1, t)$ in closed-loop control

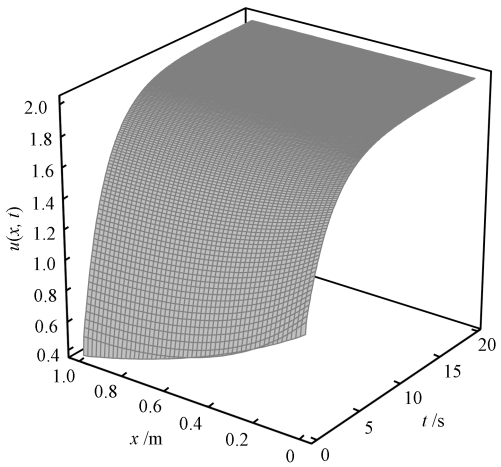

图 4　闭环控制下 $u(x, t)$ 变化图

Fig. 4　The plot of $u(x, t)$ in closed-loop control

3.2　具有不确定控制系数和边界扰动的热方程

考虑一种具有不确定控制系数和边界扰动的热方程[19].

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1,\ \ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(1,t) = bg(t) + d(t), & t > 0 \\ u(x,0) = U_0(x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

其中, $g(t)$ 是系统的控制输入; b 称为控制系数, 用来表示热交换过程中不可避免的热量损失; $d(t)$ 是边界扰动, 可看作是在端点 $x = 1$ 处输出或输入的热流, 满足假设

$$\int_0^{+\infty} d^2(t)\mathrm{d}t < \infty$$

这里控制输入从 $x = 0$ 变为 $x = 1$, 并且考虑了控制系数 b 和边界扰动 $d(t)$ 这两项不确定因素.

研究问题是: 利用微分方程的对称来选取适当的边界控制律 $g(t)$, 实现对任意 $x \in (0,1)$, 系统状态 $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

若不考虑不确定因素 b 和 $d(t)$, 即假设系统输入端方程为 $u(1,t) = g(t)$. 利用微分方程对称得到的无穷小生成元的参系数的基本形式为

$$\begin{cases} \xi = c_1 x + c_4 t + c_5 \\ \tau = 2c_1 t + c_2 \\ \phi = \dfrac{1}{2} c_4 x u + c_3 u + c_6 x + c_7 \end{cases}$$

由 $\left(v + \phi^x \dfrac{\partial}{\partial u_x}\right)[u_x(0,t) = 0] = 0$, 可得:

$$\frac{1}{2} c_4 u(0,t) + c_6 = 0$$

由 $v[u(\hat{x},t)] = v[h(t)]$, 可得

$$h(t) = K_2 (2c_1 t + c_2)^{\frac{c_3 + \frac{c_4}{2}\hat{x}}{2c_1}} + \frac{c_6 \hat{x} + c_7}{-\dfrac{c_4}{2}\hat{x} - c_3} \tag{13}$$

另外需满足对于任意点, $h(t)$ 稳定于 0. 不妨取参数 $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = c_6 = c_7 = 0$, 则符合系统要求的无穷小生成元系数有如下形式:

$$\begin{cases} \xi = x + c_5 \\ \tau = 2t + 1 \\ \phi = -u \end{cases}$$

注 5. 在本例中, 控制目标是要求实现对任意 $x \in (0,1)$, $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$. 在求解无穷小生成元的过程中, 通过恰当选择参数 c_i ($i = 1, 2, 3, 4, 6$), 使得式 (13) 符合条件且和 $\hat{x}$ 无关, 才可能进一步得到满足控制目标要求的边界控制条件; 否则, 不能实现对任意 $x \in (0,1)$, $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ 的控制目标要求, 只能实现对于某一确定赋值的点 $\hat{x}$ 处的状态稳定效果.

由 $v[u(1,t)] = v[g(t)]$, 可得控制律

$$g(t) = k_3 (2t+1)^{-\frac{1}{2}} \tag{14}$$

其中, k_3 为常数. 考虑初始条件 $u(x,0) = U_0(x)$, 即确定 $k_3 = U_0(1)$.

考虑与文献 [19] 相同的初始条件, 令 $U_0(x) = x^2$, 即 $k_3 = 1$ 时, 能实现对任意 $\hat{x}$, $\lim_{t\to\infty} u(\hat{x},t) = 0$, 控制效果仿真如图 5 所示.

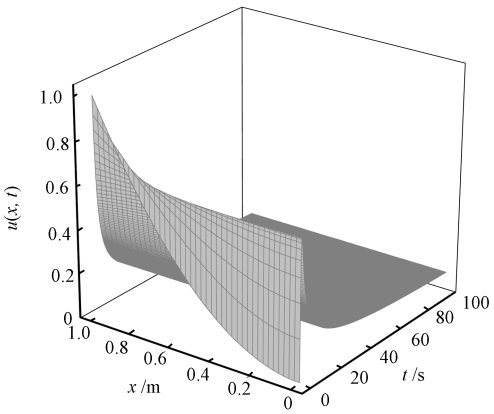

图 5 控制效果仿真图

Fig. 5 The control plot of $u(x, t)$ without uncertainties

现在分析存在控制系数和边界扰动的情况 (参考文献 [19]), 取 $d(t) = 2/(t+1)$. 应用不变性条件约束 $u(1,t) = bg(t) + d(t)$, 得:

$$\left(\frac{1}{2} c_4 + c_3\right)(bg + d) + c_6 + c_7 = (2c_1 t + c_2)(bg_t + d_t)$$

代入 $g(t) = (2t+1)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $d(t) = 2/(t+1)$, 为保证上式成立, 不妨令

$$\begin{cases} b\left(\dfrac{1}{2} c_4 + c_3\right)(2t+1)^{-\frac{1}{2}} = -b(2c_1 t + c_2)(2t+1)^{-\frac{3}{2}} \\ \left(\dfrac{1}{2} c_4 + c_3\right) d + c_6 + c_7 = \dfrac{-2(2c_1 t + c_2)}{(t+1)^2} \end{cases}$$

由第一个方程可得:

$$c_1 = c_2 = 1, \qquad \frac{1}{2} c_4 + c_3 = -1$$

代入第二个方程, 可得:

$$-\frac{2}{t+1} + c_6 + c_7 = \frac{-2(2t+1)}{(t+1)^2}$$

令 $t\to\infty$, 则 $c_6+c_7=0$.

对于输出

$$h\left(t\right)=K_3\left(2c_1t+c_2\right)^{\frac{c_3+\frac{c_4}{2}\hat{x}}{2c_1}}+\frac{c_6\hat{x}+c_7}{-\dfrac{c_4}{2}\hat{x}-c_3}$$

若对于任意点, 要求 $h(t)$ 稳定于常值. 也就是, 需要 $c_3+c_4\hat{x}/2<0$, 且 $(c_6\hat{x}+c_7)/(-c_4\hat{x}/2-c_3)$ 是定值即可. 通过恰当选取参数值可以实现 $c_3+c_4\hat{x}/2<0$, 而由

$$\frac{c_6}{-\dfrac{c_4}{2}}=\frac{c_7}{-c_3}=\frac{c_6+c_7}{-\dfrac{c_4}{2}-c_3}=0$$

可以表明, $(c_6\hat{x}+c_7)/(-c_4\hat{x}/2-c_3)$ 恒等于 0.

由此可见, 若存在未知控制系数 b 和边界扰动 $d\left(t\right)=2/(t+1)$, 取控制输入: $g\left(t\right)=(2t+1)^{-\frac{1}{2}}$, 则系统输出仍能稳定于 0. 假设 $b=0.9$, 有如图 6 所示的控制效果.

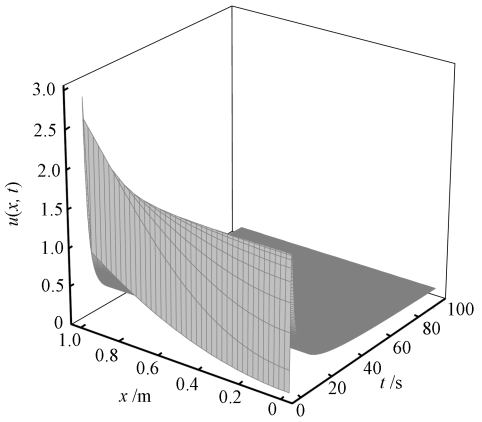

图 6　存在控制系数和边界扰动的控制效果仿真图

Fig. 6　The control plot of $u(x,\ t)$ with uncertainties

本例的后半部分, 主要是通过分析方法说明在边界控制律不变的情况下, 加入控制系数和边界扰动, 系统状态仍然能稳定于零. 对比仿真图看到, 虽然图 5 和图 6 最终状态都趋于零, 不过图 6 中系统状态在开始处的一段时间内变化更为剧烈, 这主要是加入边界扰动的缘故.

4　结论

在对称群理论的基础上, 提出了基于微分方程对称实现分布参数系统稳态控制的边界控制条件的设计方法, 并针对两个具体例子, 分析了边界控制律的设计过程.

基于对称群理论研究分布参数系统控制, 不需要限制系统的类型, 理论上适用于任意的分布参数系统. 不过, 在具体应用时能否找到符合系统边界条件, 以及控制目标要求的对称群 (用无穷小生成元表示), 具有一定的不确定性. 因此, 深入研究对称群理论, 结合于分布参数系统控制很有必要. 另外, 在确定无穷小生成元的具体形式时, 选取参数有很大的自由度, 如何能够恰当地选取参数值, 也即参数选取不同对控制效果的影响, 是值得进一步研究的课题.

References

1 Padhi R, Ali S F. An account of chronological developments in control of distributed parameter systems. *Annual Reviews in Control*, 2009, **33**(1): 59−68

2 Ng J, Dubljevic S. Optimal boundary control of parabolic PDE with time-varying spatial domain. In: Proceedings of the 4th International Symposium on Advanced Control of Industrial Processes. Hangzhou, China: IEEE, 2011. 216−221

3 Alessandri A, Gaggero M, Zoppoli R. Feedback optimal control of distributed parameter systems by using finite-dimensional approximation schemes. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, **23**(6): 984−995

4 Smyshlyaev A, Krstic M. Backstepping observers for a class of parabolic PDEs. *Systems & Control Letters*, 2005, **54**(7): 613−625

5 Smyshlyaev A, Krstic M. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008

6 Krstic M, Smyshlyaev A. Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs — Part I: Lyapunov design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(7): 1575−1591

7 Krstic M, Smyshlyaev A. Adaptive control of PDEs . *Annual Reviews in Control*, 2008, **32**(2): 149−160

8 Liu W J. Boundary feedback stabilization of an unstable heat equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2004, **42**(3): 1033−1043

9 Wu H N, Wang J W, Li H X. Exponential stabilization for a class of nonlinear parabolic PDE systems via fuzzy control approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, **20**(3): 318−329

10 Cheng M B, Radisavljevic V, Su W C. Sliding mode boundary control of unstable parabolic PDE systems with parameter variations and matched disturbances. In: Proceedings of the 2009 American Control Conference. St. Louis, MO: IEEE, 2009. 4085−4090

11 Cheng M B, Radisavljevic V, Su W C. Sliding mode boundary control of a parabolic PDE system with parameter variations and boundary uncertainties. *Automatica*, 2011, **47**(2): 381−387

12 Tian Chou. *Applications of Lie Groups to Differential Equation*. Beijing: Science Press, 2001
(田畴. 李群及其在微分方程中的应用. 北京: 科学出版社, 2001)

13 Olver P J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (2nd edition). New York: Springer, 1993

14 Palazoğlu A, Karakaş A. Control of nonlinear distributed parameter systems using generalized invariants. *Automatica*, 2000, **36**(5): 697−703

15 Palazoglu A, Karakas A, Godasi S. Control of nonlinear distributed parameter processes using symmetry groups and invariance conditions. *Computers and Chemical Engineering*, 2002, **26**(7−8): 1023−1036

16 Wei Ping, Zuo Xin, Zou Lei, Luo Xiong-Lin. Infinitesimal generator for boundary control of Burgers equation. *Journal of the Tsinghua University (Science and Technology)*, 2012, **52**(9): 1171−1175
(魏萍, 左信, 邹磊, 罗雄麟. 基于无穷小生成元的 Burgers 方程的边界控制. 清华大学学报 (自然科学版), 2012, **52**(9): 1171−1175)

17 Tian Chou. Transformation of equations and transformation of symmetries. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1989, **12**(2): 238−249
(田畴. 方程的变换与对称的变换. 应用数学学报, 1989, **12**(2): 238−249)

18 Tian C. Symmetries and group-invariant solutions of differential equations. *Applied Mathematics: Journal of Chinese Universities (Series B)*, 1994, **9**(4): 319−324

19 Li Jian, Liu Yun-Gang. Adaptive boundary control for a class of uncertain heat equations. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 469−473
(李健, 刘允刚. 一类不确定热方程自适应边界控制. 自动化学报, 2012, **38**(3): 469−473)

魏 萍 中国石油大学 (北京) 自动化系讲师. 主要研究方向为非线性系统、分布参数系统和时滞微分系统的稳定性分析与控制. E-mail: helloweiping@163.com
(**WEI Ping** Lecturer in the Department of Automation, China University of Petroleum (Beijing). Her research interest covers stability analysis and control of nonlinear system, distributed parameter system and differential system with delay.)

丁 卯 中国石油大学 (北京) 自动化系硕士研究生. 主要研究方向为分布参数系统的稳定性分析与控制.
E-mail: 37605869@qq.com
(**DING Mao** Master student in the Department of Automation, China University of Petroleum (Beijing). His research interest covers stability analysis and control of distributed parameter system.)

左 信 中国石油大学 (北京) 自动化系教授. 主要研究方向为过程控制与实时优化, 可靠性分析.
E-mail: zuox@cup.edu.cn
(**ZUO Xin** Professor in the Department of Automation, China University of Petroleum (Beijing). His research interest covers process control and real-time optimization and reliability analysis.)

罗雄麟 中国石油大学 (北京) 自动化系教授. 主要研究方向为过程控制与实时优化, 机器学习与智能控制, 预测控制, 过程系统工程. 本文通信作者.
E-mail: luoxl@cup.edu.cn
(**LUO Xiong-Lin** Professor in the Department of Automation, China University of Petroleum (Beijing). His research interest covers process control and real-time optimization, machine learning and intelligent control, model predictive control, and process systems engineering. Corresponding author of this paper.)