基于似零范数和混合优化的压缩感知信号快速重构算法

伍飞云 [1] 周跃海 [1] 童 峰 [1]

摘 要 欠定系统 (又称超完备系统) 的稀疏信号恢复在压缩感知、源信号分离和信号采集等领域中被广泛研究. 目前这类问题主要采用 l_1 范数约束结合线性规划优化或贪婪算法进行求解, 但这些方法存在收敛速度慢、恢复精度不高等缺陷. 提出一种快速恢复稀疏信号的算法, 该算法采用一种新的近似 l_0 范数代替 l_1 范数构造代价函数, 并融合牛顿法和最陡梯度法推导出寻优迭代式, 以获得似零范数代价函数的最优解. 仿真实验和真实数据实验结果表明, 与经典算法相比, 该算法在能提供相同精度、甚至更好精度的条件下, 收敛速度更快.

关键词 范数约束, 稀疏信号恢复, 似零范数, 稀疏水声信通, 压缩感知

引用格式 伍飞云, 周跃海, 童峰. 基于似零范数和混合优化的压缩感知信号快速重构算法. 自动化学报, 2014, **40**(10): 2145−2150

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.02145

A Fast Sparse Signal Recovery Algorithm Based on Approximate l_0 Norm and Hybrid Optimization

WU Fei-Yun[1] ZHOU Yue-Hai[1] TONG Feng[1]

Abstract Obtaining sparse solutions of under-determined, or over-complete, linear systems of equations has found extensive applications in signal processing of compressive sensing, source separation and signal acquisition. However, the previous approaches to this problem, which generally minimize the l_1 norm using linear programming (LP) techniques or greedy methods, are subject to drawbacks such as low accuracy and slow convergence. This paper proposes to replace the l_1 norm with a newly defined approximate l_0 norm (AL0), the optimization of which leads to the derivation of a hybrid approach by incorporating the steepest descent method with the Newton iteration. Numerical simulations and real data experiment show that the proposed algorithm is about two to three orders of magnitude faster than the state-of-the-art interior-point LP solvers, while providing the same (or better) accuracy.

Key words Norm constraint, sparse signal reconstruction, approximate l_0 norm, sparse underwater acoustic channel, compressed sensing

Citation Wu Fei-Yun, Zhou Yue-Hai, Tong Feng. A fast sparse signal recovery algorithm based on approximate l_0 norm and hybrid optimization. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(10): 2145−2150

压缩感知又称压缩采样, 其目标是如何准确而有效地从一些非自适应线性测量矩阵中重建稀疏信号, 简称稀疏信号恢复. 即假设 m 个传感器测量 n 个源信号, 采用线性瞬时无噪模型表示为 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, 其中, $\boldsymbol{y}$ 是 $m\times 1$ 的采样信号向量, $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times 1$ 的源信号向量, A 是 $m \times n$ 的混合矩阵 (或称采样矩阵), 且 $m << n$. 当给定 $\boldsymbol{y}$ 和 A, 且 $\boldsymbol{x}$ 是具有稀疏特征的条件下, 由 $\boldsymbol{y}$ 和 A 重构出稀疏解 $\boldsymbol{x}$ 是目前得到广泛研究的各类压缩感知方法需解决的主要问题[1−3]. 一些文献指出, 线性规划类算法能以较高的准确率重建欠定系统中的稀疏信号[1−3]. 这类算法主要包括 l_1 范数规则化的最小均方算法 (l_1-ls)、内点法和梯度投影算法等. 尽管这些算法取得一些成效, 但在实际应用中尤其是处理大型数据时, 其计算效率并不高.

匹配算法以及正交匹配算法 (Orthogonal matching pursuit, OMP) 等贪婪算法也被广泛用于处理稀疏信号恢复问题[4−5]. 贪婪算法是通过逐次迭代找出与所需信号最匹配的列向量, 再用这些列向量重建稀疏信号, 但这些方法往往需要保证测量矩阵的列是充分非相关的条件, 才能保证稀疏信号的恢复有效[4−5].

解决稀疏信号恢复问题的其他办法还有硬阈值迭代算法 (Iterative hard thresholding, IHT)[6] 和基于光滑 l_0 范数算法 (Smoothed l_0 norm, SL0)[7].

收稿日期 2013-04-10 录用日期 2014-05-21
Manuscript received April 10, 2013; accepted May 21, 2014
国家自然科学基金 (11274259), 教育部高等学校博士点专项基金 (20120121110030) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (11274259), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20120121110030)
本文责任编委 查红彬
Recommended by Associate Editor ZHA Hong-Bin
1. 厦门大学水声通信与海洋信息技术教育部重点实验室 厦门 361005
1. Key Laboratory of Underwater Acoustic Communication and Marine Information Technique of the Ministry of Education, Xiamen University, Xiamen 361005

本质上, 这两种算法可以看成是硬阈值和软阈值算法. IHT 算法采用了一个非线性算子, SL0 采用的是一个粗略的可变的阈值进行迭代处理. 然而, IHT 算法性能不够稳定[8], SL0 算法求得的稀疏解则不够精确[9]. 与 SL0 算法类似, 拟牛顿算法 (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, BFGS)[9] 通过构造一个近似 l_0 范数, 再通过构造一个可近似海森矩阵逆的正定对称阵在 "拟牛顿" 的条件下优化目标函数. 但该方法存储量大, 且计算效率有限.

本文在之前 l_0 范数工作[10−11] 的基础上, 针对 l_0 范数[7, 9, 12−13] 导致 NP (Nondeterministic polynomial) 难问题、噪声敏感等不足提出一种近似 l_0 范数 (Approximate l_0 norm, AL0) 的连续可导函数, 结合近似 l_0 范数和最小均方函数构建代价函数, 并推导出一种快速稀疏信号恢复算法 (简称 AL0 算法), 该算法结合牛顿迭代和最陡梯度法对欠定系统的稀疏解进行混合寻优迭代. 文章的第 3 节和第 4 节将本文算法与几种经典算法进行了数值仿真和实际海试数据实验. 结果表明, 与经典算法相比, 本文算法在提供相同精度, 甚至更好精度的条件下, 计算效率更高.

1 稀疏信号恢复模型

考虑如下稀疏恢复问题:

$$\min_{\boldsymbol{x}} ||\boldsymbol{x}||_0 \text{ s.t. } \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \tag{1}$$

其中, 代价函数 s.t.表示服从于, l_0 范数的定义为 $||\boldsymbol{x}||_0 = \#\{i|x(i) \neq 0, i = 1, \cdots, n\}$, 其中 # 表示个数, 由于 l_0 范数导致 NP 难问题、噪声敏感等问题, 处理起来非常棘手, 很多方法[1−6] 将式 (1) 转化为如下一个更为简单的问题:

$$\min_{\boldsymbol{x}} ||\boldsymbol{x}||_1 \text{ s.t. } \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \tag{2}$$

其中, l_1 范数的定义为 $||\boldsymbol{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x(i)|$. 实际上, 如果稀疏向量 $\boldsymbol{x}$ 是式 (2) 的解, 那么它也可以看成是 $\boldsymbol{y}$ 的稀疏估计. 式 (2) 可进一步转化为如下的凸优化问题:

$$\min_{\boldsymbol{x}} ||\boldsymbol{x}||_1 \text{ s.t. } ||\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}|| < \epsilon \tag{3}$$

或

$$\min_{\boldsymbol{x}} ||\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}|| \text{ s.t. } ||\boldsymbol{x}||_1 < \tau \tag{4}$$

其中, ϵ 和 τ 是非负实数, 内点算法[2] 和梯度算法[3] 是基于式 (3) 和式 (4) 提出的, 而 l_1-ls 方法则是采用拉格朗日方法将其变为:

$$\boldsymbol{x} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} ||\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}|| + \lambda||\boldsymbol{x}||_1 \tag{5}$$

其中, λ 是拉格朗日算子, l_1-ls 方法在文献 [2−3] 中有详尽的描述, 这种方法在处理大型问题时效率不高.

与 l_1-ls 方法不同, IHT 算法采用的第 k 步迭代的表达式为:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = H_s(\boldsymbol{x}_k + A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x})) \tag{6}$$

其中, $H_s(\cdot)$ 是一个非线性算子, 它能使式 (6) 中的 $\boldsymbol{x}_k + A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x})$ 的幅度较小的元素 s 置为 0. 但是, IHT 算法的性能不够稳定.

2 AL0 算法推导及讨论

考虑到 l_0 范数导致 NP 难问题、噪声敏感问题, 希望能有一种函数代替它, 在保证对噪声鲁棒性的同时加速算法的稀疏恢复性能. 与文献 [7, 9−10] 不同, 本文采用式 (7) 对 l_0 范数进行近似:

$$||\boldsymbol{x}||_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha x^2(i)}{1 + \alpha x^2(i)}, \quad \alpha = \frac{1}{2\sigma^2} \tag{7}$$

其中, σ^2 是与信号方差有关的近似函数的控制参数, 其取值需要在函数的近似精度和近似光滑度之间权衡. 如果 σ 越大, 则式 (7) 越光滑; 如果 σ 越小, 则式 (7) 对 l_0 范数的逼近程度就越高, 不过也越不光滑.

定理 1. 当 $\sigma \to 0$ 时, 问题 $\min_{\boldsymbol{x}} \sum_{i=1}^{n} \alpha x^2(i)/(1 + \alpha x^2(i))$ s.t. $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ 的解为方程 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ 的最小二范数解, 即 $\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{y}$.

证明. 将问题 $\min_{\boldsymbol{x}} \sum_{i=1}^{n} \alpha x^2(i)/(1 + \alpha x^2(i))$ s.t. $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ 转化为拉格朗日问题, 可得:

$$\min_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha x^2(i)}{1 + \alpha x^2(i)} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{\lambda}$ 是拉格朗日乘子向量, 其维度与向量 $\boldsymbol{y}$ 相同, 采用拉格朗日求导, 可得:

$$\begin{cases} [\mathrm{grad}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^* = 0 \\ \min\limits_{\boldsymbol{x}} ||\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}|| \end{cases} \tag{9}$$

其中,

$$\mathrm{grad}(\boldsymbol{x}) = \Big[\Big(\frac{x(1)}{\alpha x^2(1) + 1} - \frac{\alpha x^3(1)}{[\alpha x^2(1) + 1]^2}\Big), \cdots, \Big(\frac{x(n)}{\alpha x^2(n) + 1} - \frac{\alpha x^3(n)}{[\alpha x^2(n) + 1]^2}\Big)\Big]^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}/(2\alpha)$ 为一个正比于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的拉格朗日乘子向量, 此时, 当 $\alpha \to 0$, 式 (9) 可转化为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^* \\ \min\limits_{\boldsymbol{x}} ||\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}|| \end{cases} \tag{10}$$

从而有 $\boldsymbol{\lambda}^* = (AA^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{y}$, 结合 $\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^*$, 式 (10) 最终解为 $\boldsymbol{x} = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{y}$. □

实际应用中, 由定理 1 可以看出, 足够大的 σ 能确保稀疏解不落入局部最优. 为了解决稀疏问题, 即为问题 $\min_{\boldsymbol{x}} \sum_{i=1}^{n} \alpha x^2(i)/(1+\alpha x^2(i))$ s.t. $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ 的稀疏求解, 可分为两部分进行计算:

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x} \\ \min\limits_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha x^2(i)}{1+\alpha x^2(i)} \end{cases} \tag{11}$$

用牛顿迭代法解式 (11) 中的第 1 个问题, 第 k 次迭代的表达式记为:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \frac{f(\boldsymbol{x}_k)}{f'(\boldsymbol{x}_k)} \tag{12}$$

考虑到 $1/f'(\boldsymbol{x}_k)$ 可能产生病态问题, 故采用伪逆进行计算, 将式 (12) 变为:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}_k) \tag{13}$$

为了避免牛顿迭代发散, 迭代中的初始解选择尤为重要, 本文选择 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ 的最小二范数解 $\boldsymbol{x}_0 = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{y}$ 作为牛顿迭代的初始解, 以保证初始解在最优解的领域内. 分析式 (13) 的收敛性, 将式 (12) 记为:

$$h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{f(\boldsymbol{x}_k)}{f'(\boldsymbol{x}_k)} \tag{14}$$

对式 (14) 求导, 得:

$$h'(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x})f''(\boldsymbol{x})}{[f'(\boldsymbol{x})]^2} \tag{15}$$

设 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 的最优解, 且 $f'(\boldsymbol{x}^*) \neq 0$, 那么,

$$h'(\boldsymbol{x}^*) = \frac{f(\boldsymbol{x}^*)f''(\boldsymbol{x}^*)}{[f'(\boldsymbol{x}^*)]^2} \tag{16}$$

可见, 如果存在一个解 $\boldsymbol{x}$ 在最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 附近, 那么存在 $|h'(\boldsymbol{x})| < \boldsymbol{1}$, 按固定点原理[14] 可知式 (13) 是收敛的.

对于式 (11) 中的第 2 个问题, l_0 范数 $||\boldsymbol{x}||_0$ 可以看成是对向量 $\boldsymbol{x}$ 的稀疏度测量, 因此解决式 (11) 中的第 2 个问题相当于求出最稀疏的解. 为确保最优解的全局性, 在算法的初始阶段, σ 的设置要充分大, 而为了不陷入局部最优解, 有必要逐步减小 σ 的值, 因此本文采用最陡梯度法解决式 (11) 中的第 2 个问题:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(i) = x_k(i) - \mu_k \frac{\partial g(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k} \\ x_k(i) - \mu_k \left\{ \left(\frac{2\alpha x_k(i)}{\alpha x_k^2(i)+1} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2\alpha^2 x_k^3(i)}{[\alpha x_k^2(i)+1]^2} \right) \right\}, \ \forall 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{17}$$

因为式 (17) 每迭代一步, σ 都相应减少, 随着迭代的深入, 处理的信号范围也变得越来越精细, 故需要调整相应的步长 μ_k, 以达到精细化处理的效果. 为便于计算, 本文采用 $\mu_k = \mu_0\sigma_k^2$. 其中 μ_0 是一个常数, 将 $\mu_k = \mu_0\sigma_k^2, \alpha = 1/(2\sigma^2)$ 代入式 (17), 得:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(i) = x_k(i) - \mu_0 \left\{ \left(\frac{x_k(i)}{\alpha x_k^2(i)+1} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\alpha x_k^3(i)}{[\alpha x_k^2(i)+1]^2} \right) \right\}, \ \forall 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{18}$$

考虑到充分大的 σ 以确保最优解的全局性, 本文初始化设置为 $\sigma_0 = \max(|\boldsymbol{x}|)$, 更新式为 $\alpha \leftarrow \beta\sigma$, 其中 $0 < \beta < 1$ 是 σ 的一个衰减因子, 可知式 (18) 是收敛的.

本文算法用 Matlab 伪代码描述步骤如下:

步骤 1. 初始化 $\boldsymbol{x}_0 = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{y}$; $\sigma_0 = \max(|\boldsymbol{x}_0|)$; 设定 $\mu_0, \beta, \sigma_{\mathrm{th}}, T$;

步骤 2. 当 $\sigma > \sigma_{\mathrm{th}}$;

步骤 3. 迭代 $k = 1:T$、式 (18)、式 (13); 结束迭代;

步骤 4. 更新: $\sigma \leftarrow \beta \cdot \sigma$;

步骤 5. 若步骤 2 不满足, 则输出 $\boldsymbol{x}$.

下面讨论 AL0 算法收敛速度和复杂度.

首先, 讨论牛顿迭代法的收敛速度. 令 $f(\boldsymbol{x})$ 在区间 [a,b] 上连续可导, 若满足 $f(a)f(b) < 0$, $f''(\boldsymbol{x})$ 在该区间上不变号, $f'(\boldsymbol{x}) \neq 0$, 令 $\min|f(\boldsymbol{x})| = m$, $\max|f(\boldsymbol{x})| = M$ 有 $b - a < 2m/M$, 那么存在对任意 $\boldsymbol{x}_0 \in [a,b]$, 牛顿迭代式收敛于 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ 在 [a,b] 中的唯一实根 $\boldsymbol{x}^*$, 考虑到算法收敛速度与计算精度, 本文算法步骤中参数 T 设置为 $3 \sim 5$ 的任一整数.

然后, 讨论本文所提的几种稀疏恢复算法的复杂度. 考虑到 A 是 $m \times n$ 的矩阵, 而 K 表示 2 个矩阵运算 $A\boldsymbol{x}$ 或 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 的时间, 对于非稀疏矩阵而言, 其相当于 $2mn$ 次运算, 而对于稀疏矩阵或者特殊变换矩阵而言, 该计算量会大大减小, s 表示稀疏度, $L = \mathrm{O}(\log(n))$ 表示对解所要求的比特精度, 详细资料参见文献 [15]. 可知 l_1-ls、OMP、IHT、SL0、BFGS 和 AL0 复杂度分别为 $\mathrm{O}((m+n)^3)$、$K+\mathrm{O}(msL)$、$K+\mathrm{O}(L)$、$K+\mathrm{O}(s)$、$K+\mathrm{O}((n)^2)$ 和 $K+\mathrm{O}(2s)$[1−6].

3 仿真实验

为验证本文 AL0 算法的有效性, 与 l_1-ls、OMP、IHT、BFGS、SL0 这几种经典算法进行比较, 实验中的稀疏信号由高斯混合模型产生, 也称为贝努立–高斯模型[7,16], 定义为:

$$x_i \sim r \cdot \mathrm{N}(0, \Omega_{on}) + (1-r) \cdot \mathrm{N}(0, \Omega_{off}), \quad \forall 1 \le i \le n \tag{19}$$

其中, r 表示大的非零系数的出现概率[7], $\mathrm{N}(0, \Omega)$ 表示均值为 0 标准方差为 Ω 的高斯白噪声, 分别设置不同数量级的 Ω_{on} 和 Ω_{off} 来表示大系数和小系数, 两者叠加起来构成稀疏源信号. 实验中稀疏源信号的稀疏度设置为 $r = 0.1$, $\boldsymbol{y}$ 是 $m \times 1$ 的采样信号向量, $\boldsymbol{x}$ 是 $n \times 1$ 的源信号向量, A 是 $m \times n$ 的高斯混合矩阵, 且 $m << n$. 当给定 $\boldsymbol{y}$ 和 A, 且 $\boldsymbol{x}$ 是具有稀疏特征的条件下, 结合压缩感知各种方法重构出稀疏解 $\boldsymbol{x}$. 本次实验中采用信噪比 (Signal noise radio, SNR) 作为评估算法精度的性能指标, 定义为:

$$\mathrm{SNR} = 10 \cdot \lg \frac{\sum\limits_i |x(i)|^2}{\sum\limits_i [x(i) - x_{\mathrm{opt}}(i)]^2} \tag{20}$$

其中, x_{opt} 表示对源信号 $\boldsymbol{x}$ 的稀疏估计值. 实验中随机产生源信号和混合矩阵, 在参数设定的情况下进行 100 次求平均. 实验条件为奔腾双核处理器 2.09 GHz×2, 1 GB 内存, Microsoft Windows XP 操作系统, Matlab7 的运行环境.

实验一是测试不同算法的稀疏恢复精度. 设置参数为 $\Omega_{on} = 1$ 和 $\Omega_{off} = 4i \times 10^{-3}, i = 1, \cdots, 5$, $m = 400$, $m = 1\,000$, 分别用 l_1-ls、OMP、IHT、SL0、BFGS 和 AL0 算法对检测信号 $\boldsymbol{y}$ 进行求解, 得到不同的稀疏解 $\boldsymbol{x}$, 结果如图 1 所示. 从图 1 可以看出, BFGS 略优于 OMP、IHT、SL0、l_1-ls 算法, 而 AL0 比 BFGS 算法更优. 因本文 AL0 算法是基于稳定的初始解, 对最优解进行更为精确的搜索, 而不必构造出一个正定矩阵以代替海森矩阵进行计算.

实验二是测试不同算法的复杂度. 以本文算法计算所需时间作为测量标准, 尽管中央处理器时间不能算是一个精确的测量标准, 但它可以提供一个参考[7]. 设参数为 $\Omega_{on} = 1$, $\Omega_{off} = 10^{-3}$, 并改变混合矩阵 A 的维度以对应不同的数据量, 设定行数不变 $m = 100$, 列数则逐渐递增 $n = 100 + 50i, i = 1, \cdots, 5$. 实验中各算法运行时间和所需处理的数据长度关系见图 2. 从图 2 中可以看出, 随着待处理信号长度的增加, l_1-ls 算法所需时间显著增加; OMP 也有类似趋势, 但计算量比 l_1-ls 小很多; IHT 算法保持比较平稳, 这是因为其非线性算子减少了一部分计算量, 从而加快了计算速度; AL0、BFGS 和 SL0 算法计算时间消耗量都相对较小, 而本文 AL0 算法由于具有牛顿迭代二阶收敛性, 保证了算法的高效运算性能, 在处理不同长度的数据时, 所需的时间量基本保持平稳或是略有上升的趋势.

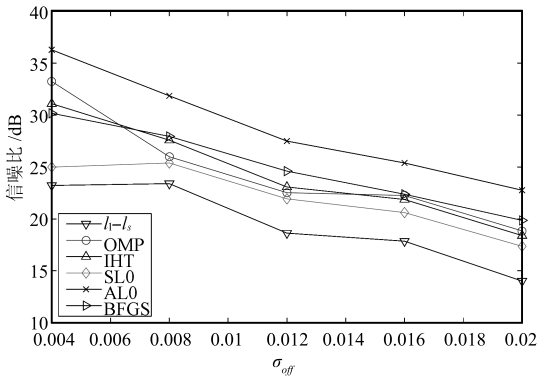


图 1 各算法随噪声水平变化而变化的恢复精度

Fig. 1 The relationship of recovery accuracy and noise level associated with different algorithms

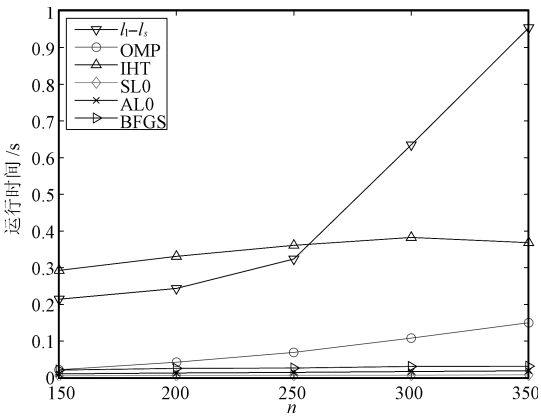


图 2 各算法在处理不同长度数据时所需时间量对比图

Fig. 2 The CPU running time of different algorithms when processing different data lengths

实验三是测试不同算法的收敛性. 考虑到式 (18) 中的参数 μ 和参数 α 都与参数 σ 的取值有关, 设参数为 $m = 100$, $n = 300$, $\Omega_{on} = 1$, $\Omega_{off} = 10^{-3}$, $\beta = 0.5$, AL0 算法经过了 30 次迭代后进入平稳状态, 其收敛过程如图 3 所示. 从图 3 可以看出, 每 3 次迭代更新一次 σ, 且随着 σ 数值的递减, 恢复的 SNR 逐步增加, 最终达到一个平稳过程. 这与前面的理论分析结果一致. 且本文 AL0 算法比 BFGS、OMP、SL0 算法收敛速度更快.

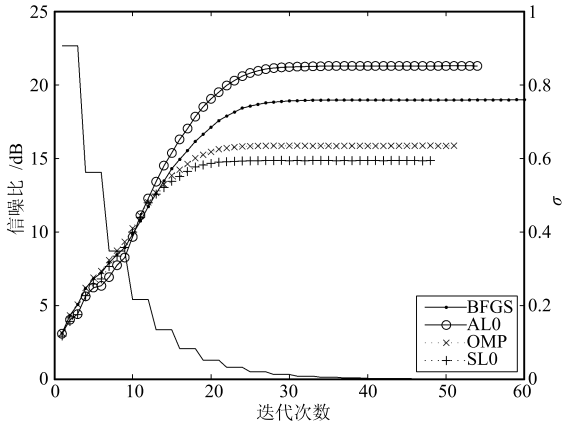


图 3　各算法在 σ 变化相同条件下的迭代收敛情况

Fig. 3　The convergence performances of different algorithms in the same conditions of varying σ

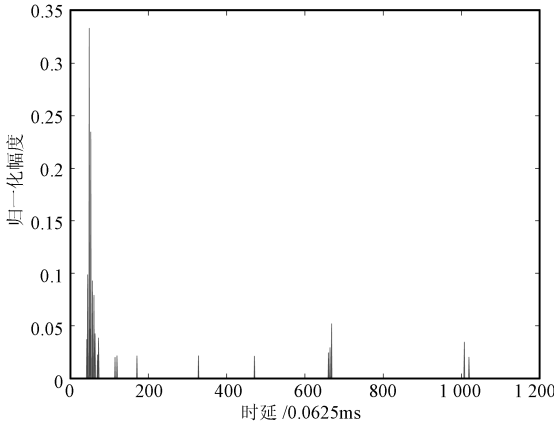


图 4　AL0 算法对真实水声信道的估计结果

Fig. 4　The estimation result of real underwater channel via AL0 algorithm

4　海试实验

为验证本文 AL0 对真实数据的有效性, 将不同算法在海上实验稀疏水声信道进行压缩感知估计的性能比较. 本文算法的海试实验采用四相相移键控调制信号, 信号载波频率为 16 kHz, 数据率 6.4 kbps, 发射随机序列.

实验海域为青岛某海湾, 实验水域平均水深 15 m, 发射机和接收机间的距离为 200 m, 发射换能器、接收换能放置深度均为 4 m. 接收数据的原始采样率为 96 kHz, 降采样至 1/4 分数间隔进行压缩感知信道估计. 将式 (1) 转化为:

$$\min_{\boldsymbol{h}} ||\boldsymbol{h}||_0 \text{ s.t. } \boldsymbol{y} = X\boldsymbol{h} \tag{21}$$

式中, X 为 $m \times n$ 维发射信号矩阵, $\boldsymbol{y}$ 为 $m \times 1$ 维接收信号向量, $\boldsymbol{h}$ 为 $n \times 1$ 维有待估计的稀疏水声信道. 矩阵 X 为结构化的托普利茨矩阵[17−19], 实验中的参数设置为 $m = 600$, $n = 1\,200$, $\beta = 0.5$.

考虑到实际中的稀疏水声信道未知, 本次实验采用预测误差 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}$[20] 作为性能评价测度, 用以评价各算法对稀疏信号的恢复精度, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}$ 定义为:

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_{\text{opt}}| = |\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{h}_{\text{opt}}| \tag{22}$$

其中, $\boldsymbol{h}_{\text{opt}}$ 为式 (21) 中对 $\boldsymbol{h}$ 的估计向量.

AL0 算法得到的信道估计结果如图 4 所示. 从图 4 可以看出, 海试水声信道由于半封闭海湾形成的边界反射, 具有典型的稀疏分布特性, 针对各算法计算得出的预测误差 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}$ 结果如图 5 所示. 从图 5 可以看出, SL0 算法和 l_1-ls 算法性能较差, 这 2 种算法对真实数据的估计精度有限, 而 AL0 算法优于 OMP、IHT、BFGS 等算法的估计精度. 真实数据处理结果与数值仿真实验基本一致, 进一步证明了本文算法的有效性.

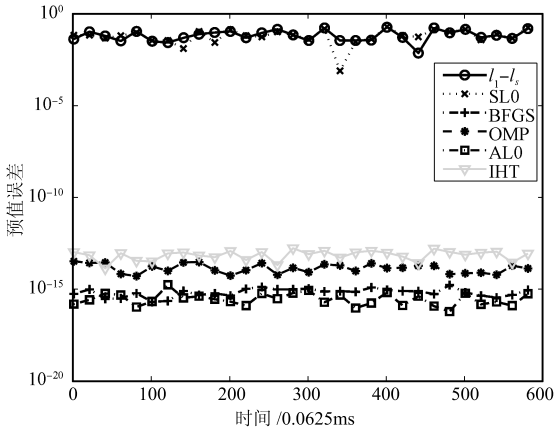


图 5　各算法对真实水声信道估计的预测误差

Fig. 5　The residual prediction errors of experimental underwater acoustic channel estimation via different algorithms

5　结论

为提高稀疏信号重构性能, 本文引入一种新的似 l_0 范数作为目标函数并混合采用牛顿迭代和最陡梯度法进行推导, 得出 AL0 全局寻优算法. 数值仿真实验与真实数据实验表明, 与其他算法相比, 本文算法在提供相同精度, 甚至更好精度的条件下, 收敛速度更快.

References

1 Takigawa T, Kudo M, Toyama T. Performance analysis of minimum l_1-norm solutions for underdetermined source separation. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2004, **52**(3): 582−591

2 Kim S J, Koh K, Lustig M, Boyd S, Gorinevsky D. An interior-point method for large-scale l_1-regularized least squares. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, **1**(4): 606−617

3 Figueiredo M, Nowak R, Wright S. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, **1**(4): 586−597

4 Tropp J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation. *IEEE Transaction on Information Theory*, 2004, **50**(10): 2231−2242

5 Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, **53**(12): 4655−4666

6 Blumensath T, Davies M E. Iterative hard thresholding for compressed sensing. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, **27**(3): 265−274

7 Hosein M, Massoud B Z, Christian J. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed l_0 norm. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2009, **57**(1): 289−301

8 Blumensath T, Davies M E. Normalized iterative hard thresholding: guaranteed stability and performance. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 298−309

9 Wang Jun-Hua, Huang Zhi-Tao, Zhou Yi-Yu, Wang Feng-Hua. Robust sparse recovery based on approximate l_0 norm. *Chinese Journal of Electronics*, 2012, **40**(5): 1185−1189
(王军华, 黄知涛, 周一宇, 王丰华. 基于近似 l_0 范数的稳健稀疏重构算法. 电子学报, 2012, **40**(5): 1185−1189)

10 Wu F Y, Tong F. Gradient optimization p-norm-like constraint LMS algorithm for sparse system estimation. *Signal Processing*, 2013, **93**(4): 967−971

11 Wu F Y, Tong F. Non-uniform norm constraint LMS algorithm for sparse system identification. *IEEE Communication Letters*, 2013, **17**(2): 385−388

12 Jin J, Gu Y, Mei S. A stochastic gradient approach on compressive sensing signal reconstruction based on adaptive filtering framework. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 409−420

13 Shi K, Shi P. Adaptive sparse Volterra system identification with l_0-norm penalty. *Signal Processing*, 2011, **91**(10): 2432−2436

14 Palais R S. A simple proof of the Banach contraction principle. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 2007, **2**(2): 221−223

15 Garg R, Khandekar R. Gradient descent with sparsification: an iterative algorithm for sparse recovery with restricted isometry property. In: Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning. New York: ACM, 2009. 337−344

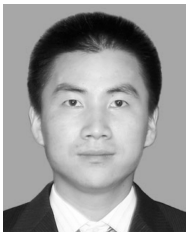
16 Stojanovic M. Retrofocusing techniques for high rate acoustic communications. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2005, **117**(3): 1173−1185

17 Zhang Cheng, Yang Hai-Rong, Wei Sui. Compressive sensing based on deterministic sparse Toeplitz measurement matrices with random pitch. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(8): 1362−1369
(张成, 杨海蓉, 韦穗. 基于随机间距稀疏 Teoplitz 测量矩阵的压缩传感. 自动化学报, 2012, **38**(8): 1362−1369)

18 Li Shu-Tao, Wei Dan. A survey on compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(11): 1369−1377
(李树涛, 魏丹. 压缩传感综述. 自动化学报, 2009, **35**(11): 1369−1377)

19 Liu Fang, Wu Jiao, Yang Shu-Yuan, Jiao Li-Cheng. Research advances on structured compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(12): 1980−1995
(刘芳, 武娇, 杨淑媛, 焦李成. 结构化压缩感知研究进展. 自动化学报, 2013, **39**(12): 1980−1995)

20 Li W C, Preisig J C. Estimation of rapidly time-varying sparse channels. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2007, **32**(4): 927−939



伍飞云 厦门大学海洋与地球学院博士研究生. 主要研究方向为信号处理, 水声通信. E-mail: wfyfly@126.com
(**WU Fei-Yun** Ph. D. candidate at the College of Ocean & Earth Sciences, Xiamen University. His research interest covers signal processing and underwater acoustic communication.)

周跃海 厦门大学海洋与地球学院博士研究生. 2009 年和 2012 年获厦门大学海洋与地球学院学士和硕士学位. 主要研究方向为水声信号处理, 水声通信.
E-mail: ruddy100@sina.com
(**ZHOU Yue-Hai** Ph. D. candidate at the College of Ocean & Earth Sciences, Xiamen University. He received his bachelor and master degrees from Xiamen University in 2009 and 2012. His research interest covers underwater acoustic signal processing and underwater acoustic communication.)

童 峰 厦门大学海洋与地球学院教授. 主要研究方向为水声信号处理, 水声通信. 本文通信作者.
E-mail: ftong@xmu.edu.cn
(**TONG Feng** Professor at the College of Ocean Earth & Sciences, Xiamen University. His research interest covers underwater acoustic signal processing and underwater acoustic communication. Corresponding author of this paper.)