多模型 GM-CBMeMBer 滤波器及航迹形成

连 峰[1] 韩崇昭[1] 李 晨[2]

摘 要 提出了一种可适用于杂波环境下对多个机动目标进行跟踪并能形成多目标航迹的多模型势平衡多目标多伯努利 (Cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli, CBMeMBer) 滤波器. 随后, 在多机动目标时间演化模型和观测模型均为线性高斯的假设条件下利用高斯混合 (Gaussian mixture, GM) 技术获得了该滤波器解析的递推形式 — 多模型 GM-CBMeMBer 滤波器, 并简要给出了它在非线性条件下的扩展卡尔曼 (Extended Kalman, EK) 滤波近似. 仿真实验结果表明所建议的多模型 GM-CBMeMBer 滤波器能有效地对多个机动目标进行跟踪而单模型 GM-CBMeMBer 滤波器则会产生明显的航迹丢失和虚假航迹, 并且对于信噪比较低的仿真场景, 它的性能优于多模型高斯混合概率假设密度 (GM probability hypothesis density, GM-PHD) 滤波器, 接近于多模型高斯混合势概率假设密度 (GM cardinalized PHD, GM-CPHD) 滤波器.

关键词 多机动目标跟踪, 势平衡多目标多伯努利滤波器, 交互式多模型算法, 高斯混合实现

引用格式 连峰, 韩崇昭, 李晨. 多模型 GM-CBMeMBer 滤波器及航迹形成. 自动化学报, 2014, **40**(2): 336−347

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00336

Multiple-model GM-CBMeMBer Filter and Track Continuity

LIAN Feng[1] HAN Chong-Zhao[1] LI Chen[2]

Abstract A multi-model cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli (CBMeMBer) filter is proposed in this paper for tracking multiple maneuvering targets and forming the multi-target trajectories in clutter. Given the assumptions that the dynamic and observation models of the multi maneuvering targets are linear-Gaussian and by applying the Gaussian mixture (GM) technique, the analytic recursion for the proposed filter, namely the multi-model GM-CBMeMBer filter, is obtained. The extended Kalman (EK) filtering approximations for the multi-model GM-CBMeMBer filter to accommodate non-linear models are described briefly. Simulation results show that the proposed filter performs multiple maneuvering targets tracking well whereas the single-model GM-CBMeMBer filter obviously produces the missing and false trajectories. In addition, simulation results also show that for the scenarios of the relatively low signal-to-noise ratio (SNR), the performance of the proposed filter is better than that of the multi-model GM probability hypothesis density (GM-PHD) filter, and is close to that of the multi-model GM cardinalized PHD (GM-CPHD) filter.

Key words Multiple maneuvering targets tracking, cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli (CBMeMBer) filter, interacting multiple models (IMM) algorithm, Gaussian mixture (GM) implementation

Citation Lian Feng, Han Chong-Zhao, Li Chen. Multiple-model GM-CBMeMBer filter and track continuity. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(2): 336−347

近年来, 基于随机有限集 (Random finite set, RFS)[1] 理论的多目标跟踪算法, 尤其是概率假设密度 (Probability hypothesis density, PHD) 滤波器[2] 和势概率假设密度 (Cardinalized PHD, CPHD) 滤波器[3−4], 受到了国内外学者的广泛关注. Vo 等分别给出了 PHD 和 CPHD 滤波器的序贯蒙特卡洛 (Sequential Monte Carlo, SMC) 实现[5], 但该实现必须采用聚类算法从粒子群中提取多目标的状态估计, 这一过程需要耗费昂贵的计算代价且所获得结果的可靠性较低[6−7]. 针对此问题, Vo 等通过将多目标运动过程近似建模为多伯努利 RFS, 提出了势平衡多目标多伯努利 (Cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli, CBMeMBer) 滤波器[8] 并给出了它的 SMC 实现以及在线性高斯条件下的高斯混合 (Gaussian mixture, GM) 实现. 其中, 相比 SMC-PHD 和 SMC-CPHD 滤波器, SMC-CBMeMBer 滤波器的优势在于其不需要采用

收稿日期 2012-07-20 录用日期 2013-01-28
Manuscript received July 20, 2012; accepted January 28, 2013
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2013CB329405), 国家自然科学基金创新研究群体 (61221063), 中国博士后科学基金 (20100481338), 中国博士后科学基金特别资助项目 (2012T50746), 中央高校基本科研业务费专项资金资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB329405), Foundation for Innovative Research Groups of the National Natural Science Foundation of China (61221063), China Postdoctoral Science Foundation (20100481338), China Postdoctoral Science Foundation-Special Fund (2012T50746), and Fundamental Research Funds for the Central University
本文责任编委 文成林
Recommended by Associate Editor WEN Cheng-Lin
1. 西安交通大学电信学院综合自动化研究所智能网络与网络安全教育部重点实验室 西安 710049 2. 西安交通大学软件学院 西安 710049
1. Ministry of Education Key Laboratory for Intelligent Networks and Network Security (MOE KLINNS Lab), Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049 2. School of Software Engineering, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049

粒子聚类算法便可容易地获得多目标状态估计. 最近, CBMeMBer 滤波器已经被成功地应用于音频和视频跟踪问题中[9].

现有的 CBMeMBer 滤波器并没有考虑目标机动的情况. 众所周知, 交互式多模型 (Interacting multiple model, IMM) 算法[10] 是跟踪无杂波条件下单个机动目标的一种非常有效的方法. 在该算法中, 多个不同模型的滤波器并行计算并互相交互. 最近, 已有学者将 IMM 算法和 CBMeMBer 滤波器相结合, 提出了一种可用于跟踪杂波环境下多个机动目标的多模型 CBMeMBer 滤波器[11]. 但该滤波器尚不能形成目标航迹, 且由于其包含积分运算, 也没有解析的递推形式, 故只能通过 SMC 方法实现, 计算量较大. 因此, 本文通过引入航迹索引号及相应的管理策略, 提出了一种能直接形成多机动目标航迹的多模型 CBMeMBer 滤波器. 随后, 在多机动目标时间演化模型和观测模型均为线性高斯的假设条件下, 证明了该滤波器具有解析的递推形式, 这一递推可通过 GM 技术实现, 随后又简要给出了它在非线性条件下的扩展卡尔曼 (Extended Kalman, EK) 滤波[12] 近似. 仿真实验结果表明所建议的多模型 GM-CBMeMBer 滤波器能有效地对多个机动目标进行跟踪而单模型 GM-CBMeMBer 滤波器则会产生明显的航迹丢失和虚假航迹, 并且对于信噪比较低的仿真场景, 它的性能优于多模型 GM-PHD 滤波器[13], 接近于多模型 GM-CPHD 滤波器[14].

1　具有航迹信息的多模型 CBMeMBer 滤波器

记 k 时刻单个机动目标的运动状态为 $\boldsymbol{x}_k \in \mathbf{R}^n$, 其所产生的传感器测量为 $\boldsymbol{z}_k \in \mathbf{R}^m$, 运动模型索引号为 $n_k \in \mathbf{N}$. 可令 $\boldsymbol{y}_k = (\boldsymbol{x}_k, n_k) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{N}$ 表示单个机动目标的扩展状态. 若 k 时刻的目标个数为 T_k, 测量个数为 S_k, 则多机动目标扩展状态和传感器测量可分别表示为随机有限集合 $Y_k = \{\boldsymbol{y}_k^{(i)}\}_{i=1}^{T_k}$ 和 $Z_k = \{\boldsymbol{z}_k^{(j)}\}_{j=1}^{S_k}$. 记 $Z_{1:k} := Z_1, \cdots, Z_k$ 表示由 1 时刻到 k 时刻的累积测量序列.

若 Y_k 为单伯努利 RFS, 那么它为空集的概率记为 $1-r_k$, 它为单元素集合的概率为 r_k $(0 \le r_k \le 1)$, 且该元素的分布服从概率密度 p_k. 最终 Y_k 的概率密度可表示为

$$\pi_k(Y_k) = \begin{cases} 1 - r_k, & Y_k = \emptyset \\ r_k p_k(\boldsymbol{x}_k, n_k), & Y_k = \{(\boldsymbol{x}_k, n_k)\} \end{cases} \tag{1}$$

若 Y_k 为由多个单伯努利 RFS 并构成的多伯努利 RFS, $Y_k = \bigcup_{i=1}^{M_k} Y_k^{(i)}$, 其概率密度可表示为

$$\pi_k(Y_k) = \prod_{j=1}^{M_k}(1 - r_k^{(j)}) \sum_{1 \le i_1 \ne \cdots \ne i_{|Y_k|} \le M_k} \prod_{j=1}^{|Y_k|} \frac{r_k^{(i_j)} p_k^{(i_j)}(\boldsymbol{x}_k, n_k)}{1 - r_k^{(i_j)}} \tag{2}$$

其中, $|\cdot|$ 表示集合的势.

由上式可见多伯努利 RFS 的概率密度 $\pi_k(Y_k)$ 可由参数集 $\{(r_k^{(i)}, p_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_k}$ 完全描述, 故可将上式表示的多伯努利 RFS 的概率密度简写成为一个相应的参数集合形式, 即 $\pi_k(Y_k) = \{(r_k^{(i)}, p_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_k}$, 其中, $r_k^{(i)}$ 表示了第 i 个假设航迹为真的概率, $p_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k)$ 表示了该条假设航迹所对应的机动目标扩展状态的分布, $\sum_{i=1}^{M_k} r_k^{(i)}$ 为 $\pi_k(Y_k)$ 的均值. 为了形成机动目标的航迹, 本文增加 $l_k^{(i)} \in \mathbf{N}$ 表示第 i 个假设航迹的索引号并令 $\mathcal{T}_k(Y_k) = \{(l_k^{(i)}, r_k^{(i)}, p_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_k}$, 那么 $\mathcal{T}_k(Y_k)$ 完整地描述了具有航迹信息的多伯努利多机动目标扩展状态 RFS 的密度.

类似文献 [8], 为了获得多模型 CBMeMBer 滤波器, 首先, 需要将 Y_k 和 Z_k 分别建模为如下的多伯努利 RFS:

$$Y_k = \left[\bigcup_{\boldsymbol{y}_{k-1} \in Y_{k-1}} \Omega_{k|k-1}(\boldsymbol{y}_{k-1})\right] \cup \Gamma_k \tag{3}$$

$$Z_k = \left[\bigcup_{\boldsymbol{y}_k \in Y_k} \Theta_k(\boldsymbol{y}_k)\right] \cup K_k \tag{4}$$

上两式中, Γ_k 表示新生机动目标的多伯努利 RFS; 单伯努利 RFS $\Omega_{k|k-1}(\boldsymbol{y}_{k-1})$ 用于建模 $\boldsymbol{y}_{k-1} \in Y_{k-1}$ 的时间演化过程, 其 $r_k = p_{S,k}(\boldsymbol{y}_{k-1})$ 为 $\boldsymbol{y}_{k-1}$ 的存活概率, $p_k(\boldsymbol{y}_k) = f_{k|k-1}(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{k-1})$ 为单个机动目标扩展状态的转移概率密度, 假设目标机动时, 其运动模型随时间的切换满足转移概率为 $h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1})$ 的一阶齐次马尔科夫过程[10], 那么

$$f_{k|k-1}(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{k-1}) = f_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}, n_k) h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1}) \tag{5}$$

其中, $f_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}, n_k)$ 表示运动状态 $\boldsymbol{x}_k$ 的转移概率密度, 其依赖于运动模型 n_k; 单伯努利 RFS $\Theta_k(\boldsymbol{y}_k)$ 用于建模 $\boldsymbol{y}_k \in Y_k$ 的传感器观测过程, 其 $r_k = p_{D,k}(\boldsymbol{y}_k)$ 为 $\boldsymbol{y}_k$ 的传感器检测概率, $p_k(\boldsymbol{z}_k) = g_k(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{y}_k)$ 为单目标单传感器测量似然函数; K_k 表示杂波 RFS, 假设其满足强度为 $\kappa_k(\boldsymbol{z}_k)$ 的泊松分布.

根据上述的多机动目标多伯努利模型和 Mahler 的有限集合统计 (Finite-set statistics, FISST) 方法, 最终可得 k 时刻多模型 CBMeMBer 滤波器的递推公式为:

1) 模型交互步. 若 $k-1$ 时刻具有航迹信息的后验多机动目标多伯努利密度为 $\mathcal{T}_{k-1}(Y_{k-1}|Z_{1:k-1}) =$

$\{(l_{k-1}^{(i)}, r_{k-1}^{(i)}, p_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_{k-1}, n_{k-1}))\}_{i=1}^{M_{k-1}}$, 那么经模型交互后, $l_{k-1}^{(i)}$ 和 $r_{k-1}^{(i)}$ 均不变, 仅是模型索引号由 n_{k-1} 变为 n_k, 故其仍为一个多伯努利密度:

$$\widehat{\mathcal{T}}_{k-1}(\widehat{Y}_{k-1}|Z_{1:k-1}) = \{(l_{k-1}^{(i)}, r_{k-1}^{(i)}, p_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_{k-1}, n_k))\}_{i=1}^{M_{k-1}} \tag{6}$$

其中

$$p_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_{k-1}, n_k) = \sum_{n_{k-1}} p_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_{k-1}, n_k, n_{k-1}) = \sum_{n_{k-1}} h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1}) p_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_{k-1}, n_{k-1}) \tag{7}$$

2) 预测步. 若 $k-1$ 时刻经模型交互后具有航迹信息的多机动目标多伯努利密度为式 (6) 和 (7) 所示, 那么其预测后也为一个多伯努利密度:

$$\mathcal{T}_{k|k-1}(Y_k|Z_{1:k-1}) = \{(l_{\Gamma,k}^{(i)}, r_{\Gamma,k}^{(i)}, p_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k}} \cup \{(l_{P,k|k-1}^{(i)}, r_{P,k|k-1}^{(i)}, p_{P,k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_{k-1}} \tag{8}$$

其中, $l_{\Gamma,k}^{(i)}$ 为新的航迹索引号, $\{(r_{\Gamma,k}^{(i)}, p_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k}}$ 为新生机动目标多伯努利 RFS 的密度参数, 且

$$l_{P,k|k-1}^{(i)} = l_{k-1}^{(i)} \tag{9}$$

$$r_{P,k|k-1}^{(i)} = r_{k-1}^{(i)} \sum_{n_k} \sum_{n_{k-1}} h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1}) \times \left\langle p_{k-1}^{(i)}(\cdot, n_{k-1}), p_{S,k}(\cdot, n_{k-1}) \right\rangle \tag{10}$$

$$p_{P,k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k) = \frac{\sum\limits_{n_{k-1}} h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1}) \left\langle f_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_k|\cdot, n_k), p_{k-1}^{(i)}(\cdot, n_{k-1}) p_{S,k}(\cdot, n_{k-1}) \right\rangle}{\sum\limits_{n_k} \sum\limits_{n_{k-1}} h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1}) \left\langle p_{k-1}^{(i)}(\cdot, n_{k-1}), p_{S,k}(\cdot, n_{k-1}) \right\rangle} \tag{11}$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积运算.

3) 更新步. 若 k 时刻经模型交互和预测后具有航迹信息的多机动目标多伯努利 RFS 的密度为 $\mathcal{T}_{k|k-1}(Y_k|Z_{1:k-1}) = \{(l_{k|k-1}^{(i)}, r_{k|k-1}^{(i)}, p_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_{k|k-1}}$, 那么其更新后也近似为一个多伯努利密度:

$$\mathcal{T}_k(Y_k|Z_k) \approx \{(l_{L,k}^{(i)}, r_{L,k}^{(i)}, p_{L,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_{k|k-1}} \cup \{(l_{U,k}(\boldsymbol{z}_k), r_{U,k}(\boldsymbol{z}_k), p_{U,k}(\boldsymbol{x}_k, n_k; \boldsymbol{z}_k))\}_{\boldsymbol{z}_k \in Z_k} \tag{12}$$

其中

$$\begin{cases} l_{L,k}^{(i)} = l_{k|k-1}^{(i)}, l_{U,k}(z_k) = l_{k|k-1}^{(m)} \quad \text{with} \\ m = \\ \arg\max\limits_i \dfrac{\left(1-r_{k|k-1}^{(i)}\right) r_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), g_k(\boldsymbol{z}_k|\cdot, n_k) p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle}{\left(1-r_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle\right)^2} \end{cases}$$

(13)

$$r_{L,k}^{(i)} = r_{k|k-1}^{(i)} \frac{1 - \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle}{1 - r_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle} \tag{14}$$

$$p_{L,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k) = \frac{(1 - p_{D,k}(\boldsymbol{x}_k, n_k)) p_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k)}{1 - \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle} \tag{15}$$

$$r_{U,k}(\boldsymbol{z}_k) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}} \dfrac{\left(1-r_{k|k-1}^{(i)}\right) r_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), g_k(\boldsymbol{z}_k|\cdot, n_k) p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle}{\left(1-r_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle\right)^2}}{\kappa_k(\boldsymbol{z}_k) + \sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}} \dfrac{r_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), g_k(\boldsymbol{z}_k|\cdot, n_k) p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle}{1-r_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle}} \tag{16}$$

$$p_{U,k}(\boldsymbol{x}_k, n_k; \boldsymbol{z}_k) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}} \frac{r_{k|k-1}^{(i)}}{1-r_{k|k-1}^{(i)}} p_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k) g_k(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{x}_k, n_k) p_{D,k}(\boldsymbol{x}_k, n_k)}{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}} \frac{r_{k|k-1}^{(i)}}{1-r_{k|k-1}^{(i)}} \sum\limits_{n_k} \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), g_k(\boldsymbol{z}_k|\cdot, n_k) p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle} \tag{17}$$

4) 删除步. 由于机动目标新生过程, 导致该多伯努利密度的参数项随着时间的推移而不断增大, 故需要对 $r_k^{(i)}$ 较小的参数项进行删除. 为了提高所建议算法的性能, 可采用多假设跟踪 (Multiple hypothesis track, MHT) 算法中的 N-帧删除法[15].

5) 状态估计步. 对于多伯努利密度 $\mathcal{T}_k(Y_k|Z_k) = \{(l_k^{(i)}, r_k^{(i)}, p_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_k}$, 其多个机动目标的个数估计和扩展状态估计可通过如下方法获得: 令初始目标个数估计 $\hat{T}_k = 0$, 对于 $i = 1, \cdots, M_k$, 若 $r_k^{(i)}$ 大于给定的阈值 (通常阈值选择 0.5), 则 $\hat{T}_k = \hat{T}_k + 1$ 且

$$\begin{cases} \hat{l}_k^{(\hat{T}_k)} = l_k^{(i)}; \hat{n}_k^{(\hat{T}_k)} = \arg\max\limits_{n_k} \int p_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\hat{T}_k)} = \sum\limits_{n_k} \int \boldsymbol{x}_k p_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k \end{cases} \tag{18}$$

最终可得具有航迹信息的多机动目标扩展状态集合 $\{(\hat{l}_k^{(i)}, \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}, \hat{n}_k^{(i)})\}_{i=1}^{\hat{T}_k}$. 需要说明的是, 状态估计也可采用两阶段法获得, 即先通过对该多伯努利密度的均值取整数获得机动目标的个数估计 $\hat{T}_k$, 再根据式 (18) 从 $\hat{T}_k$ 个权重最大的参数项中提取机动目标的扩展状态. 但由于取整运算可能会引入较大的

误差, 导致后续的扩展状态提取无法正确进行, 因此, 在状态估计步通常采用前述的方法而非两阶段法.

2　多模型 CBMeMBer 滤波器的 GM 实现

若多机动目标运动和观测过程满足如下的线性高斯假设:

假设 1. 单个机动目标的运动状态时间演化模型和测量似然函数均是线性高斯的,

$$f_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1},n_{k-1})=\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k;F_k(n_k)\boldsymbol{x}_{k-1},A_k(n_k)Q_k(n_k)\left(A_k(n_k)\right)^{\mathrm{T}}\right) \tag{19}$$

$$g_k(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{x}_k,n_k)=\mathcal{N}\left(\boldsymbol{z}_k;H_k(n_k)\boldsymbol{x}_k,B_k(n_k)R_k(n_k)\left(B_k(n_k)\right)^{\mathrm{T}}\right) \tag{20}$$

其中, $\mathcal{N}(\cdot;\boldsymbol{m},P)$ 表示均值为 $\boldsymbol{m}$, 协方差阵为 P 的高斯分布; $F_k(n_k)$, $Q_k(n_k)$ 和 $A_k(n_k)$ 分别表示模型 n_k 的运动状态转移矩阵, 过程噪声协方差矩阵和过程噪声系数矩阵; $H_k(n_k)$, $R_k(n_k)$ 和 $B_k(n_k)$ 分别表示模型 n_k 的观测矩阵、观测噪声协方差矩阵和观测噪声系数矩阵.

假设 2. 单个机动目标的存活概率和检测概率均独立于目标运动状态,

$$\begin{aligned}&p_{S,k}(\boldsymbol{x}_{k-1},n_{k-1})=p_{S,k}(n_{k-1})\\&p_{D,k}(\boldsymbol{x}_k,n_k)=p_{D,k}(n_k)\end{aligned} \tag{21}$$

假设 3. 新生机动目标模型可由参数集为 $\{(\bar{r}_{\Gamma,k}^{(i)},\bar{p}_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k))\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k}}$ 的多伯努利密度表示, 其中, $\bar{p}_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k)$, $i=1,\cdots,M_{\Gamma,k}$, 满足如下的 GM 形式:

$$\bar{p}_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k)=\bar{p}_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k|n_k)h_{\Gamma,k}^{(i)}(n_k)=h_{\Gamma,k}^{(i)}(n_k)\times\sum_{j=1}^{J_{\Gamma,k}^{(i)}(n_k)}\varpi_{\Gamma,k}^{(i,j)}(n_k)\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_k;\boldsymbol{m}_{\Gamma,k}^{(i,j)}(n_k),P_{\Gamma,k}^{(i,j)}(n_k)) \tag{22}$$

其中, $h_{\Gamma,k}^{(i)}(n_k)$ 表示新生目标运动模型分布, $\bar{p}_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k|n_k)$ 表示模型为 n_k 时的运动状态分布, 其满足上式所示的 GM 形式.

那么, 如下两个定理给出了前述的多模型 CB-MeMBer 滤波器解析的递推形式, 这一递推通过 GM 方法实现, 故又称为多模型 GM-CBMeMBer 滤波器. 为方便起见, 在定理 1 中我们将模型交互步和预测步合并.

1) 模型交互步和预测步

定理 1. 若假设 1∼3 成立且 $k-1$ 时刻具有航迹信息的后验多机动目标多伯努利密度为 $\bar{\mathcal{T}}_{k-1}(Y_{k-1}|Z_{1:k-1})=\{(\bar{l}_{k-1}^{(i)},\bar{r}_{k-1}^{(i)},\bar{p}_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_{k-1},n_{k-1}))\}_{i=1}^{M_{k-1}}$, 且 $\bar{p}_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_{k-1},n_{k-1})$ 为 GM 形式:

$$\bar{p}_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_{k-1},n_{k-1})=\sum_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}(n_{k-1})}\varpi_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})\times\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_{k-1};\boldsymbol{m}_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1}),P_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})\right) \tag{23}$$

那么经模型交互和预测后的多伯努利密度 $\bar{\mathcal{T}}_{k|k-1}(Y_k|Z_{1:k-1})=\{(\bar{l}_{P,k|k-1}^{(i)},\bar{r}_{P,k|k-1}^{(i)},\bar{p}_{P,k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k))\}_{i=1}^{M_{k-1}}\cup\{(\bar{l}_{\Gamma,k}^{(i)},\bar{r}_{\Gamma,k}^{(i)},\bar{p}_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k))\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k}}$ 为如下的 GM 形式:

$$\bar{l}_{P,k|k-1}^{(i)}=\bar{l}_{k-1}^{(i)} \tag{24}$$

$$\bar{r}_{P,k|k-1}^{(i)}=\bar{r}_{k-1}^{(i)}\sum_{n_k}\sum_{n_{k-1}}\sum_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}(n_{k-1})}p_{S,k}(n_{k-1})\times h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1})\varpi_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1}) \tag{25}$$

$$\bar{p}_{P,k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k)=\sum_{n_{k-1}}\sum_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}(n_{k-1})}\varpi_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k,n_{k-1})\times\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k;\boldsymbol{m}_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k,n_{k-1}),P_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k,n_{k-1})\right) \tag{26}$$

其中, $\bar{l}_{\Gamma,k}^{(i)}$ 为新的航迹索引号, $\{(\bar{r}_{\Gamma,k}^{(i)},\bar{p}_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k))\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k}}$ 由新生机动目标模型 (22) 给定, 而

$$\boldsymbol{m}_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k,n_{k-1})=F_k(n_k)\boldsymbol{m}_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1}) \tag{27}$$

$$P_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k,n_{k-1})=F_k(n_k)P_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})\times\left(F_k(n_k)\right)^T+A_k(n_k)Q_k(n_k)\left(A_k(n_k)\right)^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

$$\varpi_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k,n_{k-1})=\frac{h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1})p_{S,k}(n_{k-1})\varpi_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})}{\sum\limits_{n_k}\sum\limits_{n_{k-1}}\sum\limits_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}(n_{k-1})}h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1})p_{S,k}(n_{k-1})\varpi_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})} \tag{29}$$

2) 更新步

定理 2. 若假设 1 和 2 成立且 k 时刻经模型交互和预测后具有航迹信息的多机动目标多伯努利密度为 $\bar{\mathcal{T}}_{k|k-1}(Y_k|Z_{1:k-1})=\{(\bar{l}_{k|k-1}^{(i)},\bar{r}_{k|k-1}^{(i)},\bar{p}_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k))\}_{i=1}^{M_{k|k-1}}$, 且 $\bar{p}_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k)$ 为 GM 形式:

$$\bar{p}_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k)=\sum_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)}\varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)\times\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k;\boldsymbol{m}_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k),P_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)\right) \tag{30}$$

那么, 更新后近似的多伯努利密度 $\bar{\mathcal{T}}_k(Y_k|Z_{1:k})\approx\{(\bar{l}_{L,k}^{(i)},\bar{r}_{L,k}^{(i)},\bar{p}_{L,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k))\}_{i=1}^{M_{k|k-1}}\cup$

$\{(\bar{l}_{U,k}(\boldsymbol{z}_k), \bar{r}_{U,k}(\boldsymbol{z}_k), \bar{p}_{U,k}(\boldsymbol{x}_k, n_k; \boldsymbol{z}_k))\}_{\boldsymbol{z}_k \in Z_k}$ 为如下的 GM 形式:

$$\begin{cases} \bar{l}_{L,k}^{(i)} = \bar{l}_{k|k-1}^{(i)}, \quad \bar{l}_{U,k}(\boldsymbol{z}_k) = \bar{l}_{k|k-1}^{(m)} \quad \text{with} \\ m = \arg\max\limits_i \left(1 - \bar{r}_{k|k-1}^{(i)}\right) \bar{r}_{k|k-1}^{(i)} \times \\ \dfrac{\sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) p_{D,k}(n_k) \mathcal{Q}_k^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k)}{\left(1 - \bar{r}_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) p_{D,k}(n_k)\right)^2} \end{cases} \tag{31}$$

$$\bar{r}_{L,k}^{(i)} = \bar{r}_{k|k-1}^{(i)} \times \frac{1 - \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) p_{D,k}(n_k)}{1 - \bar{r}_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) p_{D,k}(n_k)} \tag{32}$$

$$\bar{p}_{L,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k) = (1 - p_{D,k}(n_k)) \times \frac{\sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{m}_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k), P_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)\right)}{1 - \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) p_{D,k}(n_k)} \tag{33}$$

$$\bar{r}_{U,k}(\boldsymbol{z}_k) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}} \dfrac{\left(1 - \bar{r}_{k|k-1}^{(i)}\right) \bar{r}_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) \mathcal{Q}_k^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k)}{\left(1 - \bar{r}_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) p_{D,k}(n_k)\right)^2}}{\kappa_k(\boldsymbol{z}_k) + \sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}} \dfrac{\bar{r}_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) \mathcal{Q}_k^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k)}{1 - \bar{r}_{k|k-1}^{(i)} \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) p_{D,k}(n_k)}} \tag{34}$$

$$\bar{p}_{U,k}(\boldsymbol{x}_k, n_k; \boldsymbol{z}_k) = \sum_{i=1}^{M_{k|k-1}} \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{U,k}^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k) \times \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{m}_{U,k}^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k), P_{U,k}^{(i,j)}(n_k)\right) \tag{35}$$

其中

$$\mathcal{Q}_k^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k) = p_{D,k}(n_k) \times \mathcal{N}(\boldsymbol{z}_k; H_k(n_k) \boldsymbol{m}_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k), B_k(n_k) R_k(n_k) \times (B_k(n_k))^{\mathrm{T}} + H_k(n_k) P_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) (H_k(n_k))^{\mathrm{T}}) \tag{36}$$

$$K_{U,k}^{(i,j)}(n_k) = P_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) (H_k(n_k))^{\mathrm{T}} \times \left(\begin{array}{l} H_k(n_k) P_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) (H_k(n_k))^{\mathrm{T}} + \\ B_k(n_k) R_k(n_k) (B_k(n_k))^{\mathrm{T}} \end{array} \right)^{-1} \tag{37}$$

$$\boldsymbol{m}_{U,k}^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k) = \boldsymbol{m}_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) + K_{U,k}^{(i,j)}(n_k) \left(\boldsymbol{z}_k - H_k(n_k) \boldsymbol{m}_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)\right) \tag{38}$$

$$P_{U,k}^{(i,j)}(n_k) = \left(I - K_{U,k}^{(i,j)}(n_k) H_k(n_k)\right) P_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) \tag{39}$$

$$\varpi_{U,k}^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k) = \frac{\frac{\bar{r}_{k|k-1}^{(i)}}{1 - \bar{r}_{k|k-1}^{(i)}} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) \mathcal{Q}_k^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k)}{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}} \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \frac{\bar{r}_{k|k-1}^{(i)}}{1 - \bar{r}_{k|k-1}^{(i)}} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) \mathcal{Q}_k^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k)} \tag{40}$$

定理 1 和 2 的证明过程见附录.

3) 删除与合并步. 除了采用 N-帧删除法对该多伯努利密度的部分参数项进行删除, 还可利用 GM-PHD 滤波器中的合并和删除法[6] 对 $\bar{p}_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k)$ 的 GM 项进行有效管理.

4) 状态估计步. 给定具有航迹信息的多机动目标多伯努利后验密度 $\bar{\mathcal{T}}_k(Y_k|Z_{1:k}) = \{(\bar{l}_k^{(i)}, \bar{r}_k^{(i)}, \bar{p}_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k))\}_{i=1}^{M_k}$, 其中, $\bar{p}_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k) = \sum_{j=1}^{J_k^{(i)}(n_k)} \varpi_k^{(i,j)}(n_k) \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{m}_k^{(i,j)}(n_k), P_k^{(i,j)}(n_k)\right)$. 令初始目标个数估计 $\hat{T}_k = 0$, 对于 $i = 1, \cdots, M_k$, 若 $\bar{r}_k^{(i)}$ 大于给定的阈值 (通常阈值选择 0.5), 则:

$$\begin{cases} \hat{T}_k = \hat{T}_k + 1, \quad \hat{l}_k^{(\hat{T}_k)} = l_k^{(i)} \\ \hat{n}_k^{(\hat{T}_k)} = \arg\max\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_k^{(i)}(n_k)} \varpi_k^{(i,j)}(n_k) \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\hat{T}_k)} = \sum\limits_{n_k} \sum\limits_{j=1}^{J_k^{(i)}(n_k)} \varpi_k^{(i,j)}(n_k) \boldsymbol{m}_k^{(i,j)}(n_k) \end{cases} \tag{41}$$

最终可得具有航迹信息的多机动目标扩展状态估计为 $\{(\hat{l}_k^{(i)}, \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}, \hat{n}_k^{(i)})\}_{i=1}^{\hat{T}_k}$.

上述的多模型 GM-CBMeMBer 滤波器可以通过 EK 滤波器近似扩展到非线性的多机动目标运动和观测模型. 令假设 2 和 3 仍成立, 而单个机动目标的运动模型和观测模型为如下的非线性形式:

$$\boldsymbol{x}_k = a_k(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{w}_k(n_k), n_k) \tag{42}$$

$$\boldsymbol{z}_k = u_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{v}_k(n_k), n_k) \tag{43}$$

其中, $a_k(\cdot, \cdot, n_k)$ 和 $u_k(\cdot, \cdot, n_k)$ 为关于模型 n_k 的非线性函数; $\boldsymbol{w}_k(n_k)$ 和 $\boldsymbol{v}_k(n_k)$ 分别为模型 n_k 的过程噪声和观测噪声.

将多模型 GM-CBMeMBer 滤波器递推公式中的 $F_k(n_k)$, $A_k(n_k)$, $H_k(n_k)$ 和 $B_k(n_k)$ 用如下相应的局部线性化值来代替, 即可获得其在非线性条件下的 EK 滤波近似的递推公式.

$$F_k^{\mathrm{EK}}(n_k) = \left.\frac{\partial a_k(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{w}_k(n_k), n_k)}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}_{k-1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{w}_k(n_k) = \boldsymbol{0}}} \tag{44}$$

$$\mathrm{A}_k^{\mathrm{EK}}(n_k) = \left.\frac{\partial a_k(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{w}_k(n_k), n_k)}{\partial \boldsymbol{w}_k(n_k)}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}_{k-1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{w}_k(n_k) = \boldsymbol{0}}} \tag{45}$$

$$H_k^{\mathrm{EK}}(n_k)=\left.\frac{\partial u_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{v}_k(n_k),n_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}_{k-1}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\ \boldsymbol{v}_k(n_k)=\boldsymbol{0}}} \tag{46}$$

$$B_k^{\mathrm{EK}}(n_k)=\left.\frac{\partial u_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{v}_k(n_k),n_k)}{\partial \boldsymbol{v}_k(n_k)}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}_{k-1}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\ \boldsymbol{v}_k(n_k)=\boldsymbol{0}}} \tag{47}$$

3　仿真分析

已知监控区域的范围为 $[-1\,000,1\,000]\times[-1\,000,1\,000]\ \mathrm{m}^2$, 监控时间长度为 50 s, 传感器采样间隔 $\Delta t=1\,\mathrm{s}$. 目标在监控时间内可能作匀速运动或匀加速机动. 因此, 可令目标的运动模型集由一个匀速 (Constant velocity, CV) 模型和一个匀加速 (Constant acceleration, CA) 模型构成.

记 k 时刻单个目标的运动状态为 $\boldsymbol{x}_k=[x_k,y_k,\dot{x}_k,\dot{y}_k,\ddot{x}_k,\ddot{y}_k]^{\mathrm{T}}$, 其中, $[x_k,y_k]^{\mathrm{T}}$, $[\dot{x}_k,\dot{y}_k]^{\mathrm{T}}$ 和 $[\ddot{x}_k,\ddot{y}_k]^{\mathrm{T}}$ 分别为它在 x 轴和 y 轴方向的位置向量、速度向量和加速度向量. 令 $\boldsymbol{x}_k$ 的时间演化模型满足式 (19) 所描述的线性高斯形式, 且 $n_k=1$ 表示 CV 模型, $n_k=2$ 表示 CA 模型, 那么

$$\begin{cases} F_k(n_k=1)=F_{CV}\otimes I_2\\ Q_k(n_k=1)=Q_{CV}\otimes I_2\\ \mathrm{A}_k(n_k=1)=I_6 \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} F_k(n_k=2)=F_{CA}\otimes I_2\\ Q_k(n_k=2)=Q_{CA}\otimes I_2\\ \mathrm{A}_k(n_k=2)=I_6 \end{cases} \tag{49}$$

其中

$$F_{CV}=\begin{bmatrix}1&\Delta t&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad Q_{CV}=\sigma_{CV}^2\times\begin{bmatrix}\frac{\Delta t^4}{4}&\frac{\Delta t^3}{2}&0\\\frac{\Delta t^3}{2}&\Delta t^2&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{50}$$

$$F_{CA}=\begin{bmatrix}1&\Delta t&\frac{\Delta t^2}{2}\\0&1&\Delta t\\0&0&1\end{bmatrix}\quad Q_{CA}=\sigma_{CA}^2\times\begin{bmatrix}\frac{\Delta t^4}{4}&\frac{\Delta t^3}{2}&\frac{\Delta t^2}{2}\\\frac{\Delta t^3}{2}&\frac{\Delta t^2}{2}&\Delta t\\\frac{\Delta t^2}{2}&\Delta t&1\end{bmatrix} \tag{51}$$

上式中 $\otimes$ 表示 Kronecker 乘积; I_n 表示 $n\times n$ 维单位对角矩阵; σ_{CV} 和 σ_{CA} 分别表示 CV 和 CA 模型的过程噪声标准差, 本例中令 $\sigma_{CV}=0.1\,\mathrm{m/s}^2$, $\sigma_{CA}=0.2\,\mathrm{m/s}^2$.

令 k 时刻模型间的转移概率为

$$\left[h_{k|k-1}(n_k|n_{k-1})\right]=\begin{bmatrix}0.8&0.2\\0.2&0.8\end{bmatrix} \tag{52}$$

传感器位于坐标原点, 它可获得目标的位置测量, $\boldsymbol{z}_k=[x_k,y_k]^{\mathrm{T}}$. 令似然函数为式 (20) 所描述的线性高斯形式, 那么

$$\begin{cases} H_k(n_k)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\\ R_k(n_k)=\mathrm{diag}\{{\sigma_x}^2,{\sigma_y}^2\},\quad B_k(n_k)=I_2 \end{cases} \tag{53}$$

上式中 diag{·} 表示对角矩阵; σ_x 和 σ_y 分别表示 x 和 y 方向位置测量的标准差, 本例令 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_m=10\,\mathrm{m}$.

令传感器检测概率 $p_{D,k}(n_k)=p_D=0.95$, 机动目标存活概率 $p_{S,k}(n_{k-1})=p_S=0.95$.

杂波为泊松 RFS, 强度为 $\kappa_k(\boldsymbol{z}_k)=\lambda_c f_c(\boldsymbol{z}_k)$. 本例中令 $\lambda_c=20$, $f_c(\cdot)=\mathcal{U}(\cdot)$, 其中 $\mathcal{U}(\cdot)$ 表示均匀分布的概率密度.

本例中多机动目标的真实运动轨迹如图 1 所示.

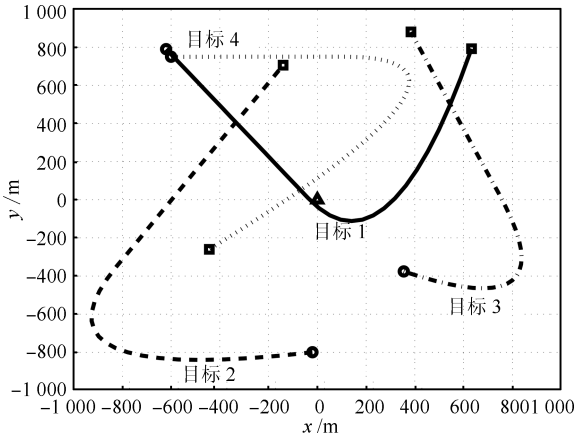


图 1　多机动目标真实运动轨迹

Fig. 1　True trajectories of multiple maneuvering targets

在图 1 中, Δ 表示传感器位置, ◯ 表示目标起点, □ 表示目标终点. 目标 1 出生于第 1 s, 消亡于第 30 s, 它在 1 s～15 s 内作匀速运动, 在 16 s～30 s 内以加速度 $[0,15]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{m/s}^2$ 进行机动; 目标 2 出生于第 1 s, 消亡于第 35 s, 它在 1 s～20 s 内以加速度 $[10,5]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{m/s}^2$ 进行机动, 在 21 s～35 s 内作匀速运动; 目标 3 出生于第 10 s, 消亡于第 42 s, 它在 10 s～30 s 内以加速度 $[-5,5]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{m/s}^2$ 进行机动, 在 31 s～42 s 内作匀速运动; 目标 4 出生于第 20 s, 消亡于第 50 s, 它在 20 s～30 s 内作匀速运动, 在 31 s～50 s 内以加速度 $[-10,-5]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{m/s}^2$ 进行机动.

在多模型 GM-CBMeMBer 滤波器中, k 时刻的目标出生过程被建模为一个多伯努利 RFS, 其密度为 $\pi_{\Gamma,k}(Y_k)=\{(r_{\Gamma,k}^{(i)},p_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k))\}_{i=1}^{3}$, 其中, $r_{\Gamma,k}^{(1)}=0.04$, $r_{\Gamma,k}^{(2)}=r_{\Gamma,k}^{(3)}=0.02$, $p_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k,n_k)=h_{\Gamma,k}^{(i)}(n_k)\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_k;\boldsymbol{m}_{\Gamma,k}^{(i)},P_{\Gamma,k}^{(i)})$ 且 $\boldsymbol{m}_{\Gamma,k}^{(1)}=[-600,800,0,0,0,0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{m}_{\Gamma,k}^{(2)}=[0,-800,0,0,0,0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{m}_{\Gamma,k}^{(3)}=$

$[400, -400,\ 0, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, $P_{\Gamma,k}^{(1)} = P_{\Gamma,k}^{(2)} = P_{\Gamma,k}^{(3)} = \mathrm{diag}\{10^4, 10^4, 10^4, 10^4, 10^2, 10^2\}$, $\left[h_{\Gamma,k}^{(i)}(n_k)\right] = [0.5, 0.5]$.

首先, 将本文所建议的多模型 GM-CBMeMBer 滤波器与单模型 GM-CBMeMBer 滤波器相比较, 其中后者仅采用 CV 模型, 但过程噪声标准差变为 $\sigma'_{CV} = 1\,\mathrm{m/s}^2$. 在这两个 GM-CBMeMBer 滤波器中, 令假设航迹删除门限为 $r_{\mathrm{threshold}} = 0.001$, 而对于每个假设航迹的 GM 项, 令删除门限为 10^{-5}, 合并距离为 4 m, GM 项的最大个数为 $J_{\max} = 100$.

图 2 和图 3 分别展示了单次仿真实验中两者的多机动目标航迹估计.

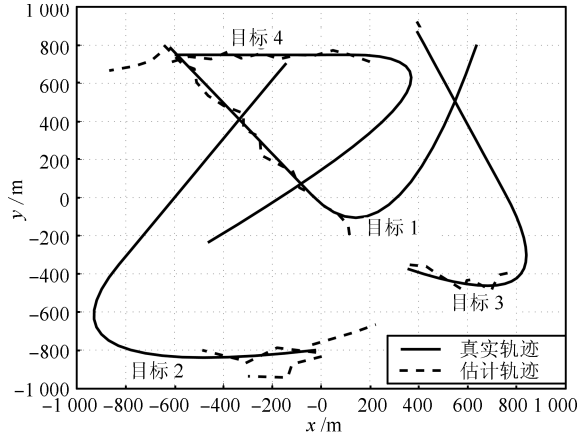


图 2 单模型 GM-CBMeMBer 滤波器的航迹估计

Fig.2 Trajectory estimates of single-model GM-CBMeMBer filter

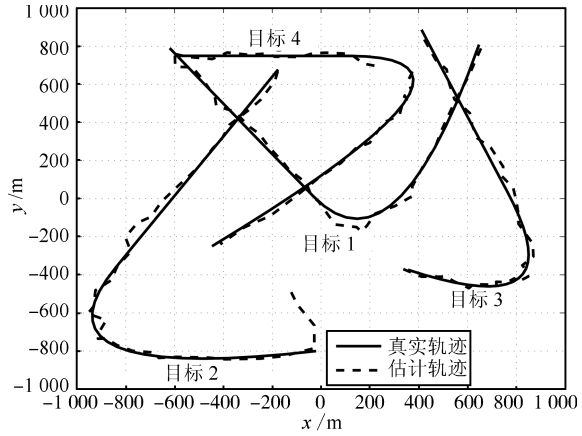


图 3 多模型 GM-CBMeMBer 滤波器的航迹估计

Fig.3 Trajectory estimates of multiple-model GM-CBMeMBer filter

由图 2 和图 3 可见, 建议的多模型 GM-CBMeMBer 滤波器的多机动目标跟踪性能显著优于单模型 GM-CBMeMBer 滤波器, 后者在目标机动发生时刻会产生明显的目标状态及航迹估计丢失现象, 而前者能有效地对多个机动目标进行跟踪并形成目标航迹, 其产生的虚假航迹也要明显少于后者.

图 4 ~ 图 7 展示了经 500 次蒙特卡洛 (Monte Carlo, MC) 仿真实验平均后多模型 GM-CBMeMBer 滤波器中各机动目标的不同模型概率估计随时间的变化曲线.

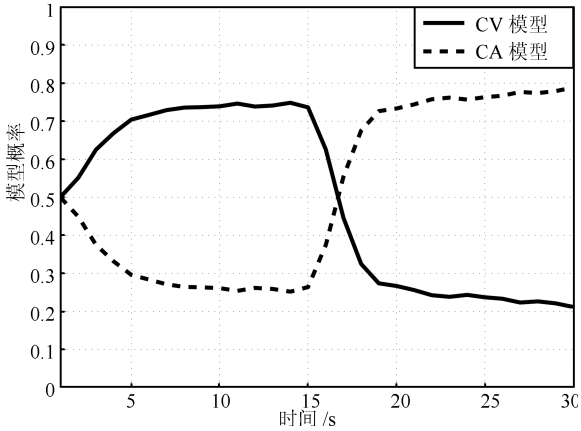


图 4 目标 1 的模型概率估计随时间变化曲线

Fig.4 Model probability estimates for Target 1 vs. time

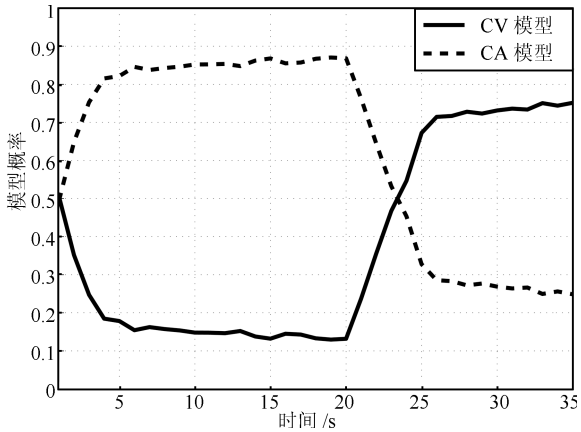


图 5 目标 2 的模型概率估计随时间变化曲线

Fig.5 Model probability estimates for Target 2 vs. time

以上 4 图展示了多模型 GM-CBMeMBer 滤波器在目标机动时刻能够有效地进行模型切换, 使与目标实际运动相匹配模型的概率估计占优, 这也是该算法相比单模型 GM-CBMeMBer 滤波器能较好地完成多机动目标跟踪任务的主要原因. 但由上图也可看出机动时刻模型的切换需要一定的时间 (本例约为 3 s ~ 5 s), 这一时间滞后导致了如图 3 所示的多模型 GM-CBMeMBer 滤波器在目标机动发生时刻的航迹估计误差相对目标未机动时更明显.

为进一步分析多模型 GM-CBMeMBer 滤波器的性能, 下面将其与多模型 GM-PHD 滤波器和多模型 GM-CPHD 滤波器进行比较. 对于后两者, 可采用与多模型 GM-CBMeMBer 滤波器相同的模型集和相同的 GM 项管理方法.

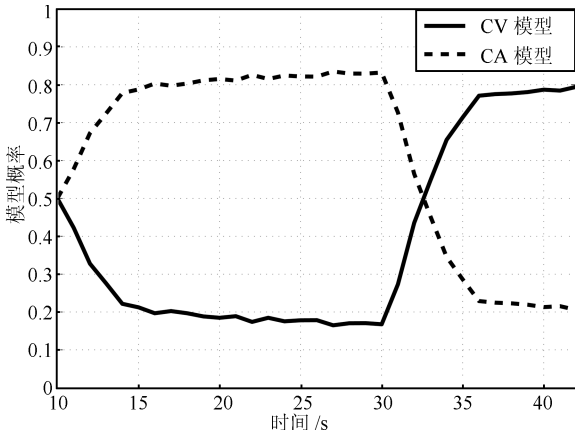


图 6　目标 3 的模型概率估计随时间变化曲线

Fig.6　Model probability estimates for Target 3 vs. time

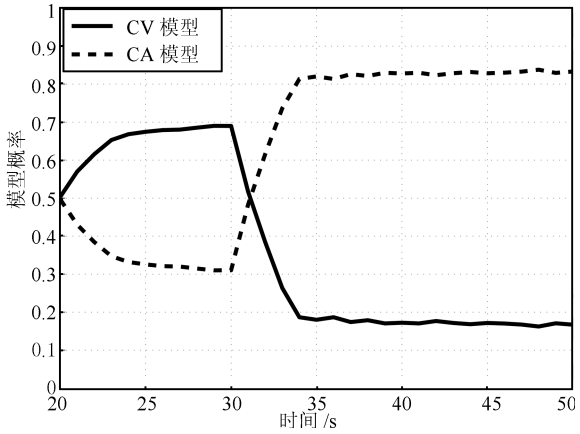


图 7　目标 4 的模型概率估计随时间变化曲线

Fig.7　Model probability estimates for Target 4 vs. time

图 8～10 分别展示了经 500 次 MC 仿真实验平均后三者的多目标个数估计及其标准差 (Standard deviation, STD) 随时间变化曲线.

由以上 3 图可见, 在目标发生或未发生机动时, 三者的多目标个数估计的均值都是无偏的且接近于真实值. 然而, 由多模型 GM-CPHD 滤波器获得的多目标个数估计的标准差最小, 由多模型 GM-CBMeMBer 滤波器获得的多目标个数估计的标准差次之, 由多模型 GM-PHD 滤波器获得的多目标个数估计的标准差最大. 这主要是由于多模型 CPHD 滤波器理论上可以递推地传递完整的多机动目标的个数分布, 多模型 CBMeMBer 滤波器则递推地传递多机动目标个数分布的多伯努利近似, 多模型 PHD 滤波器则递推地传递多机动目标个数分布的一阶矩近似 (即均值). 另外, 在目标机动的时刻, 例如 16 s, 21 s 和 31 s 处, 三者目标个数估计的标准差均有不同程度的增大, 其中多模型 GM-PHD 滤波器增大的最为显著, 多模型 GM-CPHD 滤波器次之, 多模型 GM-CBMeMBer 滤波器最小, 这说明相对其他两个滤波器, 多模型 GM-CBMeMBer 滤波器在目标机动时刻的性能较为稳定, 鲁棒性较好.

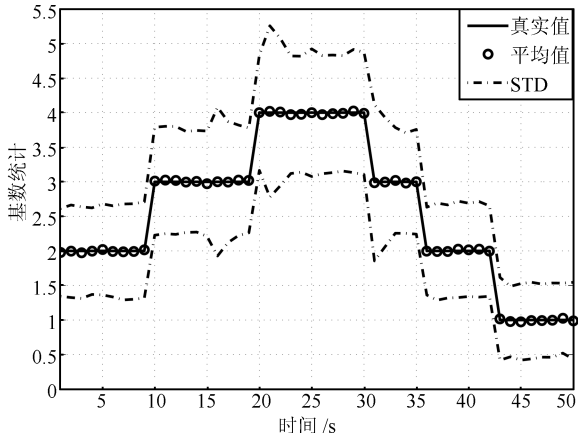


图 8　多模型 GM-PHD 滤波器的 1 目标个数估计及其标准差

Fig.8　Target number estimates and their STD from multiple-model GM-PHD filter

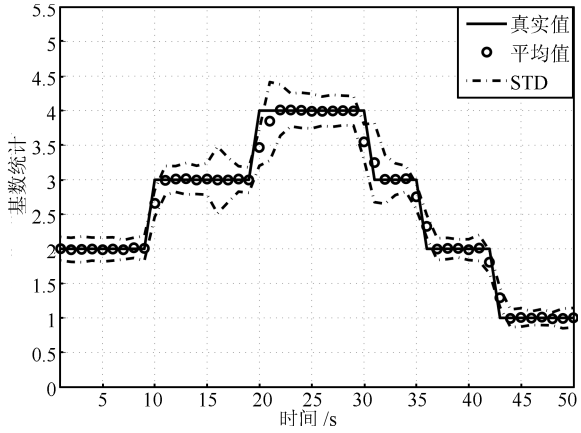


图 9　多模型 GM-CPHD 滤波器的目标个数估计及其标准差

Fig.9　Target number estimates and their STD from multiple-model GM-CPHD filter

最优子模式分配 (Optimal sub-pattern assignment, OSPA) 距离[8] 用于定量地分析算法的估计误差. 给定真实的和估计的多目标状态集合 $X_k = \{\boldsymbol{x}_k^{(i)}\}_{i=1}^{T_k}$ 和 $\hat{X}_k = \{\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}\}_{i=1}^{\hat{T}_k}$, 则两集合间阶 $p = 2$ 的 OSPA 距离可定义为: 若 $T_k \leq \hat{T}_k$, 那么

$$\mathrm{OSPA}_{2,k}^{(c)}(X_k, \hat{X}_k) = \Big(\frac{1}{\hat{T}_k}\Big(c^2(\hat{T}_k - T_k) + \min_{\pi \in \Pi_{\hat{T}_k}} \sum_{i=1}^{T_k} \min(c, ||\boldsymbol{x}_k^{(i)} - \hat{\boldsymbol{x}}_k^{(\pi(i))}||_2)^2\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{54}$$

若 $T_k > \hat{T}_k$, 那么 $\mathrm{OSPA}_{2,k}^{(c)}(X_k, \hat{X}_k) = \mathrm{OSPA}_{2,k}^{(c)}(\hat{X}_k, X_k)$. $\Pi_{\hat{T}_k}$ 表示集合 $\{1, 2, \cdots, \hat{T}_k\}$ 的全排列组合, $||\cdot||_2$ 表示取 2 范数, c 表示设定的截断值, 它用于控制 OSPA 距离对目标个数估计误差的惩罚度. 本仿真中, 令 $c = 100$ m.

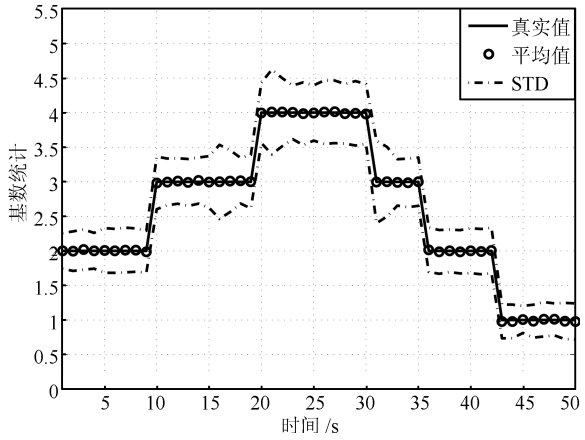


图 10 多模型 GM-CBMeMBer 滤波器的目标个数估计及其标准差

Fig.10 Target number estimates and their STD from multiple-model GM-CBMeMBer filter

图 11 展示了经 500 次 MC 仿真实验平均后得到的三者目标位置估计的 OSPA 距离随时间变化曲线.

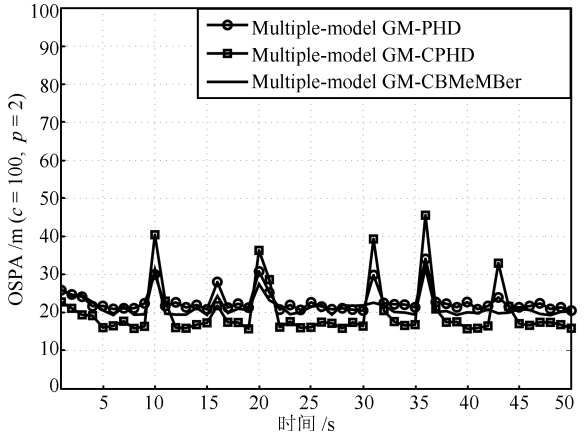


图 11 目标位置估计的 OSPA 距离

Fig.11 OSPA for target position estimates

OSPA 距离既包含了目标位置估计误差, 也包含了目标个数估计误差, 它在目标个数估计错误的时刻会出现峰值, 因此 OSPA 距离实际上反映了一个滤波器对多目标个数和状态估计的综合精度, OSPA 距离越大该算法的综合精度越差. 由图 11 可以看出在三者之中, 多模型 GM-CPHD 滤波器的 OSPA 距离最小, 这是由于它的目标个数估计在三者之中最优; 然而, 尽管多模型 GM-CBMeMBer 滤波器的目标个数估计优于多模型 GM-PHD 滤波器, 但两者的 OSPA 距离近似相等, 其中一个原因是对于信噪比相对较高的多机动目标跟踪场景 (例如本例中测量噪声标准差和杂波密度相对较低, 检测概率相对较高), PHD 滤波器相比 CBMeMBer 滤波器可能更具有优势. 另外, 由于受目标个数变化以及目标机动的影响, 三者的 OSPA 距离曲线均随时间波动. 但如图 11 所示, 由于多模型 GM-CBMeMBer 滤波器对于目标机动的鲁棒性相对最好, 因此它的 OSPA 距离曲线在目标机动时刻 (例如 16 s、21 s 和 31 s 处) 波动相对最小.

为了进一步比较平均每帧杂波个数 λ_c, 传感器测量噪声标准差 σ_m 以及传感器检测概率 p_D 对三种算法整体性能的影响, 假设前述的仿真场景和滤波参数不变, 并给定 λ_c, σ_m 和 p_D 中的两个量, 将另一个量逐渐变化, 且每变化一次重复进行 500 次 MC 仿真实验. 另外, 为了使仿真实验更加充分, 我们还补充比较了多模型 MHT 滤波器[16] 在相应场景下的跟踪性能. 表 1～3 分别给出了 4 者的 OSPA 距离 (包括目标丢失情况下的总体统计结果) 随相应量的变化.

由表 1～3 可以清楚地看到, 当杂波密度和测量噪声标准差增大或检测概率减小时, 4 者的跟踪精度均会出现不同程度地下降, 首先, 在前三者中, 多模型 GM-PHD 滤波器的 OSPA 距离始终保持最大, 且其上升速度也最快; 多模型 GM-CPHD 滤波器的 OSPA 距离始终保持最小, 其上升速度居中; 多模型 GM-CBMeMBer 滤波器的 OSPA 距离始终居中, 但其上升速度最慢, 且当杂波密度和测量噪声标准差增大或检测概率减小到一定范围时 (例如 $\lambda_c \geq 80$ 或 $\sigma_m \geq 25\,\mathrm{m}$ 或 $p_D \leq 0.65$), 它的 OSPA 距离与多模型 GM-CPHD 滤波器的距离非常接近, 两者均要明显小于多模型 GM-PHD 滤波器的距离. 这说明对于信噪比相对较低的场景 (例如测量噪声标准差和杂波密度相对较高, 检测概率相对较低), 多模型 GM-CBMeMBer 滤波器更具有优势, 它的跟踪精度接近于多模型 GM-CPHD 滤波器, 明显优于多模型 GM-PHD 滤波器. 其次, 表 1～3 还反映出, 对于多模型 MHT 滤波器, 由于它是基于数据关联的多机动目标跟踪算法, 因此当测量噪声标准差和杂波密度相对较低或检测概率相对较高时, 数据关联较为容易, 此时它的性能优于前三者; 反之, 数据关联的复杂度显著增加, 导致它的跟踪性能出现严重的下降, 最终甚至次于多模型 GM-PHD 滤波器.

为了对这 4 种方法进行更加全面的对比和分析, 还采用了平均每步所耗费的 CPU 时间比较它们的计算量大小. 用于测试算法的 PC 机的 CPU 为 1.83 GHz AMD Athlon (tm) XP 2500+, 内存为 512 MB. 给定 $\sigma_m = 10\,\mathrm{m}$, $p_D = 0.95$, 表 4 通过 500 次 MC 仿真给出了 4 者的平均每步 CPU 耗时的时间平均值随 λ_c 的变化. 由 4 者的递推公式可知, 给定 λ_c, 当 σ_m 和 p_D 发生变化时 4 者的计算时间均近似不变.

表 4 说明随着杂波密度的逐渐增大, 尽管多模型 GM-CBMeMBer 滤波器的跟踪精度介于多模型 GM-PHD 滤波器和多模型 GM-CPHD 滤波器

之间, 但它的计算代价始终小于后两者且增长相对缓慢; 而多模型 GM-CPHD 滤波器的计算代价始终大于前两者且增长相对迅速. 另外, 由于多模型 GM-PHD 和多模型 GM-CPHD 滤波器在状态提取步也不再需要聚类过程, 因此, 本文方法在计算代价方面的优势没有多模型 SMC-CBMeMBer 滤波器相比多模型 SMC-PHD 和多模型 SMC-CPHD 滤波器的优势明显. 其次, 表 4 还反映出, 对于多模型 MHT 滤波器, 当杂波密度较低时, 其所包含的 "假设分支" 数较少, 因此, 它的计算代价优于前三者; 反之, 其所包含的 "假设分支" 数显著增加, 导致它的计算代价迅速增大, 最终大于多模型 GM-PHD 滤波器, 小于多模型 GM-CPHD 滤波器.

表 1　给定 $\sigma_m = 10\,\mathrm{m}$, $p_D = 0.95$ 时, 4 者时间平均 OSPA 距离 (m) 随 λ_c 的变化

Table 1　The time-averaged OSPA distances (m) of the four algorithms versus λ_c given $\sigma_m = 10\,\mathrm{m}$ and $p_D = 0.95$

	$\lambda_c = 20$	$\lambda_c = 40$	$\lambda_c = 60$	$\lambda_c = 80$	$\lambda_c = 100$
多模型 GM-PHD 滤波器	22.8	28.2	34.5	40.9	47.1
多模型 GM-CPHD 滤波器	20.0	24.8	30.3	36.7	41.9
多模型 GM-CBMeMBer 滤波器	22.6	27.4	32.1	37.6	42.4
多模型 MHT 滤波器	18.3	24.2	31.1	38.9	48.0

表 2　给定 $\lambda_c = 20$, $p_D = 0.95$ 时, 4 者时间平均 OSPA 距离 (m) 随 σ_m 的变化

Table 2　The time-averaged OSPA distances (m) of the four algorithms versus σ_m given $\lambda_c = 20$ and $p_D = 0.95$

	$\sigma_m = 10\,\mathrm{m}$	$\sigma_m = 15\,\mathrm{m}$	$\sigma_m = 20\,\mathrm{m}$	$\sigma_m = 25\,\mathrm{m}$	$\sigma_m = 30\,\mathrm{m}$
多模型 GM-PHD 滤波器	22.8	31.2	42.6	52.4	63.2
多模型 GM-CPHD 滤波器	20.0	27.9	38.5	48.1	57.9
多模型 GM-CBMeMBer 滤波器	22.6	29.7	39.1	48.6	58.3
多模型 MHT 滤波器	18.3	27.6	38.8	50.9	63.8

表 3　给定 $\lambda_c = 20$, $\sigma_m = 10\,\mathrm{m}$ 时, 4 者时间平均 OSPA 距离 (m) 随 p_D 的变化

Table 3　The time-averaged OSPA distances (m) of the four algorithms versus p_D given $\lambda_c = 20$ and $\sigma_m = 10\,\mathrm{m}$

	$p_D = 0.95$	$p_D = 0.85$	$p_D = 0.75$	$p_D = 0.65$	$p_D = 0.55$
多模型 GM-PHD 滤波器	22.8	36.6	52.1	67.0	82.1
多模型 GM-CPHD 滤波器	20.0	33.7	49.0	63.1	76.7
多模型 GM-CBMeMBer 滤波器	22.6	36.2	51.3	63.7	77.2
多模型 MHT 滤波器	18.3	33.4	49.4	66.5	84.5

表 4　给定 $\sigma_m = 10\,\mathrm{m}$, $p_D = 0.95$ 时, 4 者平均每步 CPU 耗时的时间平均值 (s/步) 随 λ_c 的变化

Table 4　The average CPU processing times per step (s/step) of the four algorithms versus λ_c given $\sigma_m = 10\,\mathrm{m}$ and $p_D = 0.95$

	$\lambda_c = 20$	$\lambda_c = 40$	$\lambda_c = 60$	$\lambda_c = 80$	$\lambda_c = 100$
多模型 GM-PHD 滤波器	0.21	0.28	0.37	0.48	0.61
多模型 GM-CPHD 滤波器	0.75	1.26	1.89	2.60	3.39
多模型 GM-CBMeMBer 滤波器	0.18	0.24	0.30	0.37	0.44
多模型 MHT 滤波器	0.09	0.17	0.34	0.59	0.97

4 结论和展望

本文提出了一种可用于对杂波环境下多个机动目标进行跟踪并能形成目标航迹的多模型 CBMeMBer 滤波器并给出了它的 GM 实现. 仿真实验表明本文所建议的多模型 GM-CBMeMBer 滤波器的性能显著优于单模型 GM-CBMeMBer 滤波器, 并且对于信噪比较低的仿真场景, 它的性能优于多模型 GM-PHD 滤波器, 接近于多模型 GM-CPHD 滤波器. 作者后续的工作主要包括:

1) 如何将本文所建议的单传感器多模型 GM-CBMeMBer 滤波器扩展到多传感器多机动目标跟踪情况, 仍值得进一步研究;

2) 需要利用实测数据对本文方法进行更加详细的测试.

附录

为了证明定理 1 和定理 2, 首先需要给出如下两个引理:

引理 A1. 给定适合维数的矩阵 F, Q, P 和向量 $\boldsymbol{m}$, 其中 Q 和 P 为正定矩阵, 那么下式成立:

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}; F\boldsymbol{x}', Q\right)\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}'; \boldsymbol{m}, P\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}; F\boldsymbol{m}, Q + FPF^{\mathrm{T}}\right)\end{aligned} \tag{A1}$$

引理 A2. 给定适合维数的矩阵 H, R, P 和向量 $\boldsymbol{m}$, 其中 R 和 P 为正定矩阵, 那么下式成立:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}\left(\boldsymbol{z}; H\boldsymbol{x}, R\right)\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{m}, P\right) = \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{z}; H\boldsymbol{m}, R + HPH^{\mathrm{T}}\right)\mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}; \widehat{\boldsymbol{m}}, \widehat{P}\right)\end{aligned} \tag{A2}$$

其中

$$\begin{cases} K = PH^{\mathrm{T}}(HPH^{\mathrm{T}} + R)^{-1} \\ \widehat{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m} + K(\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{m}) \\ \widehat{P} = (I - KH)P \end{cases} \tag{A3}$$

定理 1 的证明.

由式 (9) 和式 (22) 可容易获得式 (24) 和 (25). 下面证明式 (26)∼(29). 根据内积运算的定义 (式 (13)) 以及式 (21) 和式 (23) 可得:

$$\begin{aligned}&\left\langle \bar{p}_{k-1}^{(i)}(\cdot, n_{k-1}), p_{S,k}(\cdot, n_{k-1})\right\rangle = \\ &\quad p_{S,k}(n_{k-1})\int \sum_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}(n_{k-1})} \varpi_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})\times \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}; \boldsymbol{m}_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1}), P_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1} = \\ &\quad \sum_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}(n_{k-1})} p_{S,k}(n_{k-1})\varpi_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})\end{aligned} \tag{A4}$$

又根据式 (19) 以及引理 1 可得:

$$\begin{aligned}&\left\langle f_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_k|\cdot, n_k), \bar{p}_{k-1}^{(i)}(\cdot, n_{k-1})p_{S,k}(\cdot, n_{k-1})\right\rangle = \\ &\quad \int \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; F_k(n_k)\boldsymbol{x}_{k-1}, A_k(n_k)Q_k(n_k)\left(A_k(n_k)\right)^{\mathrm{T}}\right)\times \\ &\quad \sum_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}(n_{k-1})} \varpi_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})p_{S,k}(n_{k-1})\times \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}; \boldsymbol{m}_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1}), P_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1} = \\ &\quad \sum_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}(n_{k-1})} \varpi_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})p_{S,k}(n_{k-1})\times \\ &\quad \int \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; F_k(n_k)\boldsymbol{x}_{k-1}, A_k(n_k)Q_k(n_k)\left(A_k(n_k)\right)^{\mathrm{T}}\right)\times \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}; \boldsymbol{m}_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1}), P_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1} = \\ &\quad \sum_{j=1}^{J_{k-1}^{(i)}(n_{k-1})} \varpi_{k-1}^{(i,j)}(n_{k-1})p_{S,k}(n_{k-1})\times \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{m}_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k, n_{k-1}), P_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k, n_{k-1})\right)\end{aligned} \tag{A5}$$

其中, $\boldsymbol{m}_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k, n_{k-1})$ 和 $P_{P,k|k-1}^{(i,j)}(n_k, n_{k-1})$ 分别如式 (27) 和式 (28) 所示.

最终, 将式 (A4) 和式 (A5) 带入式 (11) 和式 (12), 可得式 (25) 和式 (29). □

定理 2 的证明.

由式 (15) 可容易获得式 (31). 下面证明式 (32)∼(40). 根据内积运算的定义 (式 (13)) 以及式 (21) 和式 (30) 可得:

$$\begin{aligned}&\left\langle \bar{p}_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), p_{D,k}(\cdot, n_k)\right\rangle = \\ &\quad \int \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)p_{D,k}(n_k)\times \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{m}_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k), P_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k = \\ &\quad \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} p_{D,k}(n_k)\varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)\end{aligned} \tag{A6}$$

又根据式 (20) 和引理 2 可得:

$$\begin{aligned}&\bar{p}_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}_k, n_k)g_k(\boldsymbol{z}_k|\boldsymbol{x}_k, n_k)p_{D,k}(\boldsymbol{x}_k, n_k) = \\ &\quad p_{D,k}(n_k)\sum_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)\times \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{m}_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k), P_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)\right)\times \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{z}_k; H_k(n_k)\boldsymbol{x}_k, B_k(n_k)R_k(n_k)\left(B_k(n_k)\right)^{\mathrm{T}}\right) = \\ &\quad \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k)\mathcal{Q}_k^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k)\times \\ &\quad \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{m}_{U,k}^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k), P_{U,k}^{(i,j)}(n_k)\right)\end{aligned} \tag{A7}$$

其中, $\mathcal{Q}_k^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k)$, $\boldsymbol{m}_{U,k}^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k)$ 和 $P_{U,k}^{(i,j)}(n_k)$ 分别如式 (36)∼(39) 所示.

根据式 (13) 和式 (A7) 可得:

$$\left\langle \bar{p}_{k|k-1}^{(i)}(\cdot, n_k), g_k(\boldsymbol{z}_k|\cdot, n_k) p_{D,k}(\cdot, n_k) \right\rangle = \int \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}^{(i)}(n_k)} \varpi_{k|k-1}^{(i,j)}(n_k) \mathcal{Q}_k^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k) \times \mathcal{N}\left(\boldsymbol{x}_k; \boldsymbol{m}_{U,k}^{(i,j)}(n_k; \boldsymbol{z}_k), P_{U,k}^{(i,j)}(n_k)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k \tag{A8}$$

最终, 将式 (A6) 和式 (A8) 带入式 (16) 和式 (19), 可得式 (32) ∼ 式 (40). □

References

1 Goodman I R, Mahler R P, Nguyen H T. *Mathematics of Data Fusion*. Norwood, MA: Kluwer Academic, 1997. 157−218

2 Mahler R P S. Multitarget Bayes filtering via first-order multitarget moments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, **39**(4): 1152−1178

3 Mahler R P S. PHD filters of higher order in target number. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(4): 1523−1543

4 Mahler R P S. *Statistical Multisource-Multitarget Information Fusion*. Norwood, MA: Artech House, 2007. 235−278

5 Vo B N, Singh S, Doucet A. Sequential Monte Carlo methods for multi-target filtering with random finite sets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, **41**(4): 1224−1245

6 Clark D E, Bell J M. Multi-target state estimation and track continuity for the particle PHD filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(4): 1441−1453

7 Liu W F, Han C Z, Lian F, Zhu H Y. Multitarget state extraction for the PHD filter using MCMC approach. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, **46**(2): 864−883

8 Vo B T, Vo B N, Cantoni A. The cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter and its implementations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(2): 409−423

9 Reza H, Vo B N, Vo B T, David S. Bayesian integration of audio and visual information for multi-target tracking using a CB-member filter. In: Proceedings of the 36th IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 2011. Prague, Czech Republic: IEEE, 2011. 2300−2303

10 Ouyang Cheng, Ji Hong-Bing, Gou Zhi-Qiang. Improved multiple model particle PHD and CPHD filters. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 341−348
(欧阳成, 姬红兵, 郭志强. 改进的多模型粒子 PHD 和 CPHD 滤波算法. 自动化学报, 2012, **38**(3): 341−348)

11 Xiong Bo, Gan Lu. Multiple maneuvering targets tracking using MM-CBMeMBer filter. *Journal of Radars*, 2012, **1**(3): 238−245
(熊波, 甘露. MM-CBMeMBer 滤波器跟踪多机动目标. 雷达学报, 2012, **1**(3): 238−245)

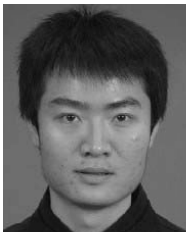
12 Li Hui-Ping, Xu De-Min, Zhang Fu-Bin, Yao Rao. Consistency analysis of EKF-based SLAM by measurement noise and observation times. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(9): 1177−1184
(李慧平, 徐德民, 张福斌, 姚尧. 基于量测噪声和观测次数的 EKF-SLAM 一致性分析. 自动化学报, 2009, **35**(9): 1177−1184)

13 Pasha S A, Vo B N, Tuan H D, Ma W K. A Gaussian mixture PHD filter for jump Markov system models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, **45**(3): 919−936

14 Georgescu R A, Willett P K. The multiple model CPHD tracker. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(4): 1741−1751

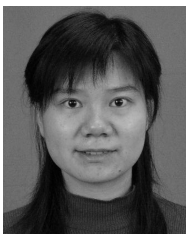
15 Panta K R, Vo B N, Clark D E. An efficient track management scheme for the Gaussian-mixture probability hypothesis density tracker. In: Proceedings of the 4th International Conference on Intelligent Sensing and Information. Bangalore: IEEE, 2006. 230−235

16 Zhang Heng, Fan Xiao-Ping, Qu Zhi-Hua. Mobile robot adaptive Monte Carlo localization based on multiple hypothesis tracking. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(9): 941−946
(张恒, 樊晓平, 瞿志华. 基于多假设跟踪的移动机器人自适应蒙特卡罗定位研究. 自动化学报, 2007, **33**(9): 941−946)



连 峰 西安交通大学综合自动化研究所副教授. 主要研究方向为目标跟踪.
E-mail: lianfeng1981@gmail.com
(**LIAN Feng** Associate professor at the Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi′an Jiaotong University. His main research interest is target tracking.)

韩崇昭 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系教授. 主要研究方向为信息融合与自适应控制.
E-mail: czhan@mail.xjtu.edu.cn
(**HAN Chong-Zhao** Professor in the Department of Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi′an Jiaotong University. His research interest covers information fusion and adaptive control.)



李 晨 西安交通大学软件学院讲师. 主要研究方向为目标跟踪. 本文通信作者.
E-mail: lylnnc@126.com
(**LI Chen** Lecturer at the School of Software Engineering, Xi′an Jiaotong University. Her main research interest is target tracking. Corresponding author of this paper.)