多智能体最优持久编队动态生成与控制

罗小元 [1] 邵士凯 [1] 关新平 [1, 2] 赵渊洁 [3]

摘 要 研究了多智能体系统中最优持久编队生成算法, 并根据对应的通信拓扑设计了最优持久编队的运动控制算法. 首先, 提出了基础圈概念, 通过有向增加顶点操作, 研究了基础圈为三角形或包含部分四边形的最优持久编队的分布式生成算法; 在此基础上, 考虑到持久编队中单向通信邻居的状态信息, 设计了基于距离的最优持久编队运动控制算法. 最后, 仿真研究验证了所提算法的有效性.

关键词 多智能体, 编队, 最优持久编队, 分布式控制

引用格式 罗小元, 邵士凯, 关新平, 赵渊洁. 多智能体最优持久编队动态生成与控制. 自动化学报, 2013, **39**(9): 1431−1438

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.01431

Dynamic Generation and Control of Optimally Persistent Formation for Multi-agent Systems

LUO Xiao-Yuan[1] SHAO Shi-Kai[1] GUAN Xin-Ping[1, 2] ZHAO Yuan-Jie[3]

Abstract This paper presents an algorithm for the generation of optimally persistent formation in multi-agent systems (MASs), and designs control laws for the formation according to its communication topology. Firstly, the notion of basic circle is put forward. By the operation of directed vertex addition, a decentralized algorithm for the generation of optimally persistent formation is presented, whose basic circles are triangles or quadrangles. Then, considering the state information of neighbors in unilateral communication, control laws for the motion of optimally persistent formation are designed. Finally, simulation results are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithms.

Key words Multi-agent, formation, optimally persistent formation, decentralized control

Citation Luo Xiao-Yuan, Shao Shi-Kai, Guan Xin-Ping, Zhao Yuan-Jie. Dynamic generation and control of optimally persistent formation for multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(9): 1431−1438

近十年来, 多智能体协调控制已成为国内外控制与通讯领域研究者的关注热点之一. 多智能体协调控制问题有着广泛的研究方向, 如多机器人编队控制[1−2]、多智能体群集运动[3−4]、一致性[5−6] 等. 这些应用有着共同的特点: 单个智能体缺乏对整个智能体系统全局信息的了解, 但能通过与邻居交换信息来完成一定的全局行为. 作为多智能体协调控制的主要研究方向之一, 智能体编队控制是指多个智能体相互交流信息、协调控制, 用以完成单个智能体难以完成的特定任务. 多智能体编队控制可以分为通信拓扑的控制以及对应于此通信拓扑的运动控制. 在编队拓扑控制研究中, 图论已经被广泛应用[7−8], 在文献 [9] 中, Olfati-Saber 基于 $\alpha-$网络栅格结构, 提出了一种分布式的编队控制策略, 在其研究中, 每个智能体与对应邻居进行双向通信, 当智能体数目较多时, 将导致编队内部通信复杂度很高. 为了降低通信复杂度, 同时减少通信能量消耗, 许多学者对刚性图和持久图进行了研究[10−12]. 在文献 [13] 中, Hendrickx 等研究了改变有向边方向的操作, 使具有不同方向的持久图能相互转化, 但没有给出持久图生成算法. 在文献 [14] 中, Smith 等研究了有向图中增加顶点的操作, 并提出了基于此操作的最小边数的持久图生成算法, 但在算法生成持久图过程中需不断变化各边方向, 难以应用于持久编队中. 文献 [15] 提出了符合特定特征的一类最小加权持久图的生成方法, 但其生成是集中式的. 为应用分布式的生成方法, 文献 [16] 进一步提出了分布式的最优刚性图的生成算法.

除了对刚性图和持久图的生成控制研究以外, 许多学者还将刚性图和持久图应用于编队控制中, 研究具有刚性通信拓扑或持久通信拓扑的运动编队

收稿日期 2012-04-09 录用日期 2012-07-25
Manuscript received April 9, 2012; accepted July 25, 2012
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2010CB731800), 国家自然科学基金 (61074065), 河北省自然科学基金 (F2012203119) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB731800), National Natural Science Foundation of China (61074065), and Natural Science Foundation of Hebei Province (F2012203119)
本文责任编委 王飞跃
Recommended by Associate Editor WANG Fei-Yue
1. 燕山大学电气工程学院 秦皇岛 066004 2. 上海交通大学电子信息与电气工程学院 上海 200240 3. 天津理工大学计算机与通信工程学院 天津 300384
1. Department of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004 2. School of Electronic Information and Electrical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240 3. School of Computer and Communication Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384

控制. 在对刚性拓扑编队和持久拓扑编队研究中, 采用基于领航–跟随的势函数控制输入. 在文献 [17] 中, Anderson 等研究了通信拓扑图为有向循环图且包含三个智能体的编队收敛性. 与之相对, 在文献 [18] 中, Cao 等则研究了拓扑图为非循环图的三智能体编队的收敛性. 在文献 [19] 中, 为了进一步考虑速度跟随问题, 作者采用自适应方法分析了最小持久编队的运动控制. 在文献 [20] 中, 作者将最优刚性图应用于群集运动中, 利用最优刚性拓扑减少了系统中的通信能量消耗. 虽然有关刚性图的研究取得较好进展, 但目前仍没有一种统一的持久图生成规则, 有关最小刚性图的持久化仍是一个未解决的问题.

本文提出基础圈概念, 根据刚性图的结构对其分类, 并提出了基础圈为三角形或包含四边形的刚性图的有向化规则, 设计了与之对应的最优持久编队的分布式生成算法. 同时, 采用领航–跟随控制策略和基于邻居距离的势函数控制, 研究了最优持久编队运动控制算法, 分析了编队的收敛性, 并将最优持久编队生成算法应用于动态编队中, 使编队在完成任务过程中有效地减少了系统内部的通信距离和, 从而降低了运动过程的通信复杂度, 减少通信能量消耗. 最后通过仿真研究, 验证了最优持久编队的生成算法及其在运动编队中减少能耗的有效性.

1 编队的图论基础

多智能体编队包括移动智能体和智能体之间的通信链接. $G(V,E)$ 表示平面中多智能体编队对应的基础图, V 表示图中各个点的集合, 对应于编队中的智能体; E 表示图中各个点的连线集合, 对应于智能体之间的通信链接. 在编队中每个智能体通信能力有限, 只能在其通信范围内与其他智能体进行通信, 称能够通信的两个智能体互为邻居. 在无向基础图中, 智能体 i 的邻居集为 $N_i=\{j:(i,j)\in E\}$, 邻接矩阵 $A=[a_{ij}]$ ($a_{ii}=0$; 当 $(i,j)\in E$, $a_{ij}=a_{ji}=1$, 否则 $a_{ij}=0$), 其中 (i,j) 表示智能体 i,j 之间有通信链路. 每个无向基础图都有对应的有向图, 有向图中所有的边都为有向边, 无向图 $G(V,E)$ 对应的有向图记为 $G(V,\overrightarrow{E})$, 其中 $\overrightarrow{E}$ 表示所有的有向边的集合. 在有向图中, 边 $(\overrightarrow{i,j})$ 起始于顶点 i, 终止于顶点 j, 称起始于顶点 i 的有向边的个数为顶点 i 的出度, 记为 $d^-(i)$.

在图论研究中, 由所有不相同的顶点和边组成的闭环回路称为圈. 含有 n 个顶点的圈表示为 C_n, 其中 n 称为圈的长. 当 $n=3$ 时, 称 C_3 为三角形; 当 $n=4$ 时, 称 C_4 为四边形.

1.1 刚性图及分类

在编队基础图中, $p_1,p_2,\cdots,p_n\in\mathbf{R}^2$ 表示各个点的坐标, $p_i(t)$ $(t\geq 0)$ 表示第 i 个点的运动轨迹. 边长恒定轨迹 (Edge-consistent trajectory) 定义为 $\|p_i(t)-p_j(t)\|=a$ (a 为常量且 $(i,j)\in E$). 刚性轨迹 (Rigid trajectory) 指编队在运动过程中所有对应点 $p_i(t)$ 和 $p_j(t)$ 的距离保持恒定. 一个编队对应的基础图是刚性图 (Rigid graph), 当且仅当所有的边长恒定的轨迹全是刚性轨迹; 当基础图不是刚性图时, 称其为可变形图 (Flexible graph).

最小刚性图[12] 是一类特殊的刚性图, 是指能够维持刚性且具有最少边数的一类图. 在 $\mathbf{R}^2$ 中, 含有 n ($n\geq 2$) 个顶点的刚性图是最小刚性图, 当且仅当其边数为 $e=2n-3$, e 为边数. 对最小刚性图中每条边加权, 可以得到最优刚性图, 定义如下:

定义 1[16]**.** 一个无向图是最优刚性图, 如果满足以下条件:

1) 对应的图是最小刚性图;

2) 在所有相同顶点数的刚性图中, 其各边边长加权和最小.

同时, 在刚性图中包含有许多圈, 为了后文分析方便, 这里给出基础圈的概念.

定义 2. 在圈内部不包含其他顶点和边的圈称为基础圈.

根据基础圈的定义可知, 基础圈是包含圈上所有顶点的最简单的圈, 在其内部既不包含其他圈, 也不包含其他顶点和边. 图 1 给出了包含两种不同基础圈的刚性图. 在图 1 (a) 中, 基础圈是三角形 (如点 1, 2, 3 和 1, 3, 7 分别组成的三角形); 在图 1 (b) 中包含两类基础圈, 分别是三角形 (如点 1, 2, 3 和 1, 5, 6 组成的三角形) 和四边形 (点 1, 3, 4, 5 组成的四边形). 本文研究的刚性图是基础圈为三角形或包含四边形的最优刚性图.

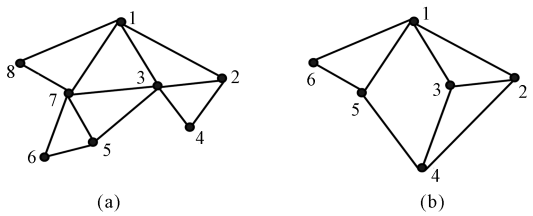


图 1 基础圈为三角形和四边形的刚性图

Fig. 1 Rigid graphs with basic circles being triangles and quadrangles

1.2 持久图

持久图是有向图, 其各边皆为有向边. 有向边 $(\overrightarrow{i,j})$ 表示在运动过程中, 顶点 i 要保持与顶点 j 的距离约束.

定义 3[12]**.** 在 $\mathbf{R}^2$ 中, 如果一个有向图中每个顶点的出度 $d^-(i)\leq 2$, 且其对应的无向图是刚性图,

则这个有向图是持久图.

在 $\mathbf{R}^2$ 中, 一个有向图是最小持久图[12], 当且仅当其各个顶点出度 $d^-(i) \leq 2$ 且其对应的无向图是最小刚性图.

最优刚性图是一类特殊最小刚性图, 在 $\mathbf{R}^2$ 中, 一个有向图是最优持久图, 当且仅当其各个顶点出度 $d^-(i) \leq 2$ 且其对应的无向图是最优刚性图.

2　持久编队生成理论

2.1　持久图的扩展

为得到持久图, 本节介绍有向增加顶点操作[14]. 如图 2 所示, j,k 是已知的两个顶点, 有向增加顶点操作是新增加顶点 i 同时增加有向边 $(\overrightarrow{i,j})$ 和 $(\overrightarrow{i,k})$, 新增加的顶点 i 出度 $d^-(i)=2$. 若 j,k 是已知持久图中的两个顶点, 原持久图含顶点 n 个, 则易知新得到的含有 $n+1$ 个顶点的图也是持久图, 依此类推, 执行 m 次有向增加顶点操作, 则能获得包含 $(n+m)$ 个顶点的持久图. 对于基础圈为三角形或包含四边形的最小刚性图, 可采用有向增加顶点操作, 将其对应的无向边进行有向化.

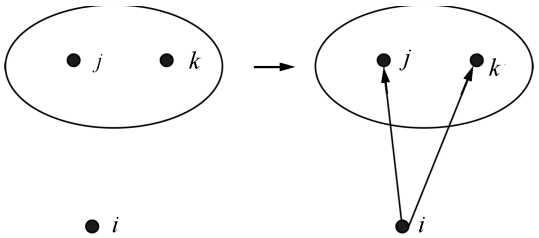


图 2　有向增加顶点操作

Fig. 2　Directed vertex addition

定理 1. 对基础圈为三角形的最小刚性图, 采用有向增加顶点操作, 将无向边有向化, 能够得到其对应的最小持久图.

证明. 首先, 随机选取其中一条无向边进行有向化, 如得到有向边 $(\overrightarrow{j,k})$. 由于基础圈为三角形, 则刚性图中必有一点与初始有向边的两顶点 (j,k) 相连, 如顶点 i, 对顶点 i 进行有向增加顶点操作, 即增加有向边 $(\overrightarrow{i,k})$ 和 $(\overrightarrow{i,j})$. 分析可知, 得到的三角形中三个顶点出度不大于 2, 且三角形为刚性图, 即经过初始有向边和一次有向增加顶点操作, 可得到含有三个顶点的最小持久图. 由于最小刚性图的基础圈为三角形, 在基础圈中若两个顶点为已有持久图中顶点, 则剩余顶点可进行有向增加顶点操作, 每个顶点执行有向增加顶点操作后, 能不断扩大持久图范围. 依次将刚性图中剩余顶点进行有向增加顶点操作, 当所有剩余顶点进行了有向增加顶点操作, 所有无向边实现了有向化.

在生成的有向图中, 初始有向边的两个顶点 j,k 的出度为 $d^-(j)=1$, $d^-(k)=1$, 其余顶点都执行了有向增加顶点操作, 对应的顶点出度皆为 2, 所以有向图中每个顶点出度小于等于 2, 又由于无向基础图为最小刚性图, 所以生成的有向图为最小持久图. □

定理 1 证明了通过进行有向增加顶点操作获得基础圈为三角形的最小持久图的可行性. 后文的最优持久图生成算法正是基于此分析而设计. 基于定理 1, 当最优刚性图基础圈中还包含四边形时, 可获得如下推论.

推论 1. 若最小刚性图的基础圈为三角形或四边形, 则可以通过有向增加顶点操作, 将无向边有向化, 获得对应的最小持久图.

证明. 首先, 选择四边形基础圈以外的其余边为初始边, 并对其进行有向化. 再进行第一次有向增加顶点操作, 由于初始边在四边形基础圈以外, 故进行一次有向增加顶点操作后, 可获得一个含有三个顶点的最小持久图. 由于刚性图中还包含四边形基础圈, 分析可知第一个进行有向化的四边形中至少有两条相邻边分别在两个三角形基础圈中, 如图 1 (b) 所示. 进行有向增加顶点操作, 分别使包含这两条边的三角形成为持久图一部分, 此时两条相邻边的相对顶点 (点 1, 4) 出度皆为 2, 再对四边形的剩余顶点 (点 5) 进行有向增加顶点操作, 使得四边形的四个顶点皆为持久图中顶点. 再依此类推, 对没有实现有向化的三角形和四边形执行有向增加顶点操作, 直到所有的顶点都进行了有向增加顶点操作.

生成的有向图中, 初始有向边的两个顶点出度小于等于 2, 其余顶点都进行了有向增加顶点操作, 出度为 2, 有向图中所有顶点出度不大于 2, 且无向图为最小刚性图, 故生成的有向图为最小持久图. □

2.2　基于邻居的最优持久编队扩展

上文分析了无向图中基础圈全为三角形或包含四边形的最小持久图的生成. 将此分析应用于智能体编队中, 并考虑智能体的通信范围, 即可实现最优刚性编队中基础圈为三角形或包含四边形的最优持久编队生成, 其策略如下:

最优持久编队生成扩展策略为基于邻居的扩展策略, 指在已知的最优刚性编队基础上, 先将各智能体出度置零. 考虑到智能体通信能力有限, 先指定其中领航智能体, 并指定与其相关的且包含于一个三角形基础圈中的一条边为有向边, 将此边的两顶点出度置 2. 再考虑其余智能体, 若在此智能体通信范围内的最优刚性编队部分有两个智能体出度为 2, 则进行有向增加顶点操作, 并将此智能体出度置 2. 依次进行此种操作, 使编队中有向边逐步覆盖无向边, 直至获得全局最优持久编队.

2.3　最优持久编队的生成算法

根据前述定理推论, 给出基础圈为三角形或四

边形的最优持久编队的生成算法, 如图 3 所示.

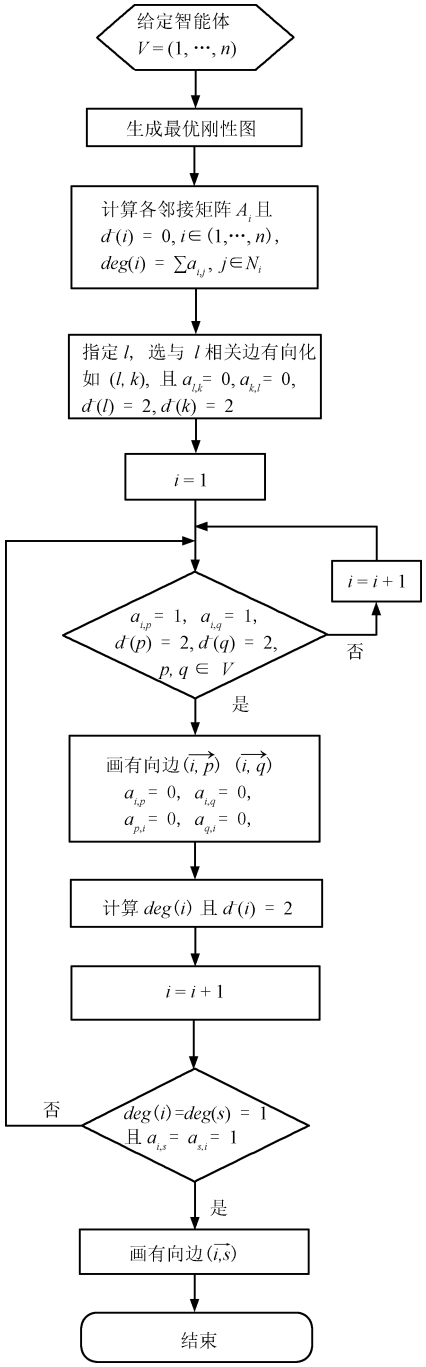


图 3 最优持久编队生成算法

Fig. 3 Algorithm for generation of optimally persistent formation

图 3 中, N_i 表示智能体 i 邻居, A_i 表示智能体 i 和 N_i 构成的邻接矩阵, $d^-(i)$ 表示智能体 i 的出度, $deg(i)$ 表示智能体 i 的连通度. 算法中首先指定有向边 $(\overrightarrow{l,k})$, 选此边为四边形基础圈以外的边.

定理 2. 对给定的最优刚性编队, 图 3 所示算法可以产生其对应的最优持久编队.

证明. 由算法给定初始有向边, 在此基础上进行有向增加顶点操作, 依据前述定理 1 和推论 1, 易知算法能够生成对应的最优持久编队. □

上述算法是基础圈为三角形或四边形的最优持久编队生成算法. 虽然此算法针对的是基础圈为三角形或四边形的刚性编队, 但当刚性编队的基础圈边数大于 4 时, 仍有可能通过所给算法实现对应的最优持久编队生成. 如图 4 (a) 和图 4 (b) 中基础圈都包含五边形, 图 4 (a) 中刚性图可通过上述算法实现其持久图, 而图 4 (b) 中刚性图不能通过算法实现其持久图.

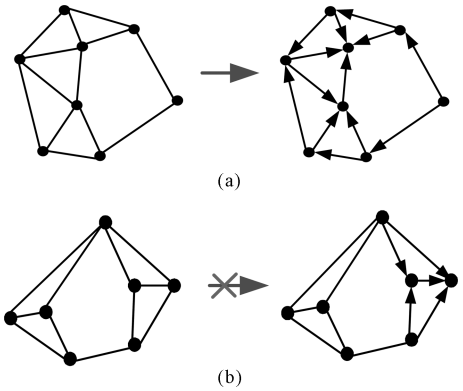


图 4 基础圈包含五边形的算法应用实例

Fig. 4 Examples of applying the algorithm to rigid graph with five-edge basic circle

3 最优持久编队动态生成控制

3.1 持久编队运动控制

最优持久编队中智能体之间的运动控制采用类似势函数的领航–跟随控制. 在 n 个智能体中, 领航者标号为 $i=1$; 出度为 1 的智能体标号为 $i=2$; 其余智能体标号为 $i=3,4,\cdots,n$. 为方便分析, 考虑一阶控制输入模型 $\dot{\boldsymbol{p}}_i(t)=\boldsymbol{u}_i(t)$ (其中 $\boldsymbol{p}_i(t)$ 为智能体 i 在 t 时刻的位置向量, $\boldsymbol{u}_i(t)$ 为智能体 i 在 t 时刻的速度输入). 最优持久编队中领航者出度为 0, 设其控制输入为 0, 各智能体控制输入如下:

$$\boldsymbol{u}_1(t)=0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}_2(t)=k_1(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)(\|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\|-d) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_i(t)=&\,k_2(\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}_i)(\|\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}_i\|-d)+\\&k_2(\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{p}_i)(\|\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{p}_i\|-d),\\&i\in\{3,\cdots,n\},\ (j,k)\in N_i\end{aligned} \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{u}_1(t)$, $\boldsymbol{u}_2(t)$, $\boldsymbol{u}_i(t)$ 分别表示领航者、出度为 1 的智能体和出度为 2 的智能体的控制输入, $k_1>0$,

$k_2 > 0$ 为控制系数, $\boldsymbol{p}_1$ 表示领航者位置信息, d 为通信智能体间的期望距离, $d_{i,j}$ 表示式 (3) 中智能体 j, k 之间的距离. 假设 $d_{i,j} < 2d$, 以保证期望距离的可实现性.

定理 3. 在控制输入 (2) 作用下, 出度为 1 智能体最终与领航者之间保持距离 d.

证明. 考虑系统误差方程, 可得:

$$e_2(t) = \|\boldsymbol{p}_1(t) - \boldsymbol{p}_2(t)\| - d \tag{4}$$

将误差方程求导可得:

$$\dot{e}_2(t) = \frac{(\boldsymbol{p}_1(t) - \boldsymbol{p}_2(t))^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{p}_2(t) - \boldsymbol{p}_1(t)\|}(\dot{\boldsymbol{p}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{p}}_2(t)) = $$

$$- k_1\|\boldsymbol{p}_1(t) - \boldsymbol{p}_2(t)\| \cdot e_2(t) \tag{5}$$

由上式可得:

$$e_2(t) = \frac{C\mathrm{e}^{-k_1 dt} \cdot d}{1 - C\mathrm{e}^{-k_1 dt}},\ \ k_1 > 0 \tag{6}$$

其中, C 为任意常数. 容易得出, 当 $t \to \infty$ 时, $e_2(t) \to 0$, 即在控制输入 (2) 作用下, 出度为 1 智能体最终与领航者之间保持距离 d. □

定理 3 证明了控制输入 (2) 能保证智能体与单个邻居之间的距离约束, 由定理 3 得到如下推论.

推论 2. 在控制输入 (3) 作用下, 智能体 i ($d^-(i) = 2$) 最终与其跟随的两个邻居 j, k 分别保持距离 d.

证明. 由输入控制 (3) 可知, 其输入可以分为两部分:

$$\boldsymbol{u}_{ij} = k_2(\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_i)(\|\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_i\| - d) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u}_{ik} = k_2(\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_i)(\|\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_i\| - d) \tag{8}$$

根据定理 3 可知, $\boldsymbol{u}_{ij}$, $\boldsymbol{u}_{ik}$ 分别保证了智能体 i 能与其邻居 j, k 保持距离 d. 由于 $d_{i,j} < 2d$, 保证了智能体 i 与其邻居 j, k 实现期望距离约束的可能性. 故在控制输入 (3) 作用下, 智能体 i 最终与智能体 j, k 保持距离 d. □

由定理 3 和推论 2 可知, 在动态控制输入 (1) ~ (3) 作用下, 最优持久编队的每条通信链路长度最终收敛为距离 d, 最优持久编队的通信智能体之间实现距离一致.

3.2　最优持久编队动态生成算法

在多智能体系统运动中, 将最优持久编队生成算法应用于运动编队中, 可以大大降低运动编队间的通信复杂度, 减少运动中的通信能量消耗. 假设 T 表示编队运动时间, Δt 表示运动中时间间隔, 每经过 Δt 时间, 系统根据图 3 所示算法, 重新生成最优持久编队, 则可以保证在运动过程中, 系统始终为最优持久编队.

在系统运动中, 当重新生成新的最优持久编队后, 编队间通信拓扑有可能发生切换. 拓扑切换后, 智能体的邻接关系发生改变, 系统速度输入有可能发生突变, 为了减小拓扑改变对速度输入的影响, 故设计缓冲控制输入使拓扑改变后速度的变化更加平缓. 缓冲控制输入设计如下所示.

首先, 设计缓冲函数, 其应满足如下性质:

1) 当 $t = T_0$ 时, $f(t) = 0$, 其中 T_0 表示通信拓扑发生改变的时刻; 当 $t \to \infty$ 时, $f(t) \to 1$.

2) 缓冲函数在作用时间区间内单调递增.

由以上性质, 设计如下的缓冲函数:

$$f(t) = \frac{t - T_0}{t - T_0 + \Delta T},\ \ T_0 < t < T_0 + \Delta T \tag{9}$$

其中, ΔT 为缓冲控制函数作用时间.

再设计如下缓冲控制输入:

$$\boldsymbol{u}_i^*(t) = \boldsymbol{u}_0 + f(t) \cdot (\boldsymbol{u}_i(t) - \boldsymbol{u}_0),$$
$$T_0 < t < T_0 + \Delta T \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{u}_0$ 表示拓扑改变的上一时刻智能体的速度输入, $\boldsymbol{u}_i(t)$ 表示按照式 (2) 或式 (3) 计算的拓扑改变后的智能体输入, $\boldsymbol{u}_i^*(t)$ 表示智能体的实际速度输入.

考虑缓冲控制输入, 则发生拓扑切换的智能体在整个运动过程中的控制输入为

$$\boldsymbol{u}_i^*(t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_0 + f(t)(\boldsymbol{u}_i(t) - \boldsymbol{u}_0), & t \in (T_0, T_0 + \Delta T) \\ \boldsymbol{u}_i(t), & \text{其他} \end{cases} \tag{11}$$

推论 3. 在控制输入 (11) 作用下, 发生拓扑切换的智能体最终与拓扑切换后其跟随的智能体保持期望距离 d.

证明. 当控制输入为 $\boldsymbol{u}_i(t)$ 且为有限值时, 由定理 3 和推论 2 可知, 智能体最终能实现期望距离 d, 故只需证明在缓冲控制输入结束后 $\boldsymbol{u}_i(t)$ 为有限值, 即在缓冲控制作用时间内智能体运动的距离有限. 当 $t \in (T_0, T_0 + \Delta T)$ 时, 有:

$$\boldsymbol{u}_i^*(t) = \boldsymbol{u}_0 + f(t)(\boldsymbol{u}_i(t) - \boldsymbol{u}_0) = $$
$$\boldsymbol{u}_0 + \frac{t - T_0}{t - T_0 + \Delta T}(\boldsymbol{u}_i(t) - \boldsymbol{u}_0) = $$
$$\frac{t - T_0}{t - T_0 + \Delta T}\boldsymbol{u}_i(t) + \frac{\Delta T}{t - T_0 + \Delta T}\boldsymbol{u}_0 \tag{12}$$

若 $\|\boldsymbol{u}_i(t)\| > \|\boldsymbol{u}_0\|$, 由式 (12) 可得: $\|\boldsymbol{u}_i^*(t)\| < \|\boldsymbol{u}_i(t)\|$, 则

$$\int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \|\boldsymbol{u}_i^*(t)\|\mathrm{d}t < \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \|\boldsymbol{u}_i(t)\|\mathrm{d}t$$

由于 $\|\boldsymbol{u}_i(t)\|$ 为有限输入, 故在控制输入 $\boldsymbol{u}_i^*(t)$ 作用下, 智能体在时间区间 $(T_0, T_0+\Delta T)$ 内运动距离有限; 同理, 当 $\|\boldsymbol{u}_i(t)\| < \|\boldsymbol{u}_0\|$ 时, 可得:

$$\int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \|\boldsymbol{u}_i^*(t)\|\mathrm{d}t < \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \|\boldsymbol{u}_0(t)\|\mathrm{d}t$$

在控制输入 $\boldsymbol{u}_i^*(t)$ 作用下, 智能体在时间区间 $(T_0, T_0+\Delta T)$ 内运动距离有限.

故由定理 3 及推论 2 可得, 最终智能体与拓扑切换后其跟随的邻居保持期望距离 d. □

4 仿真

本节通过 Matlab 实例仿真验证算法的有效性. 在 $\mathbf{R}^2$ 中, 给出包含 15 个智能体的系统, 智能体由黑点表示, 有向箭头表示智能体之间的单向通信, 所有智能体最大通信半径一致, 为 $r = 2.5\,\mathrm{m}$.

4.1 最优持久编队生成

仿真结果如图 5 和图 6 所示. 其中, 图 5 为初始分布的 15 个智能体, 图 6 为首先由分布式方法实现最优刚性编队[16], 并在此基础上执行持久编队生成算法. 可知图 6 中每个智能体出度不大于 2, 最终生成最优持久编队.

4.2 最优持久编队动态生成控制

考虑到智能体运动速度大小, 取系数 $k_1 = k_2 = 1$. 通信智能体之间期望距离为 $d = 1.45\,\mathrm{m}$, 最大感知半径 $r = 2.5\,\mathrm{m}$. 设定最优持久编队运动时间为 $T = 12\,\mathrm{s}$, 运动过程中每经过 $\Delta t = 0.02\,\mathrm{s}$ 重新判断生成最优持久图, $\Delta T = 30\Delta t$, 表示在 30 个时间间隔内进行缓冲控制输入.

图 7 为最优持久编队运动过程, 通过观察可知, 系统在运动过程中发生通信拓扑切换.

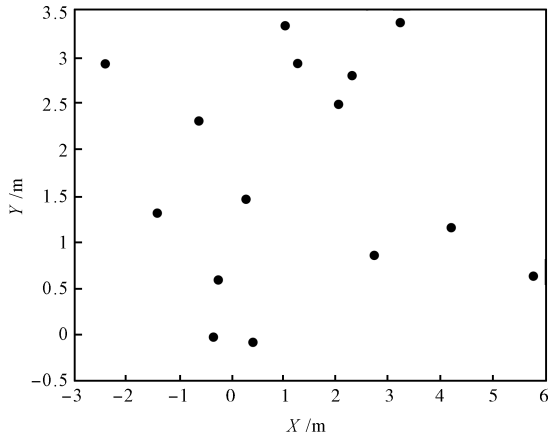


图 5 初始位置

Fig. 5 Initial positions

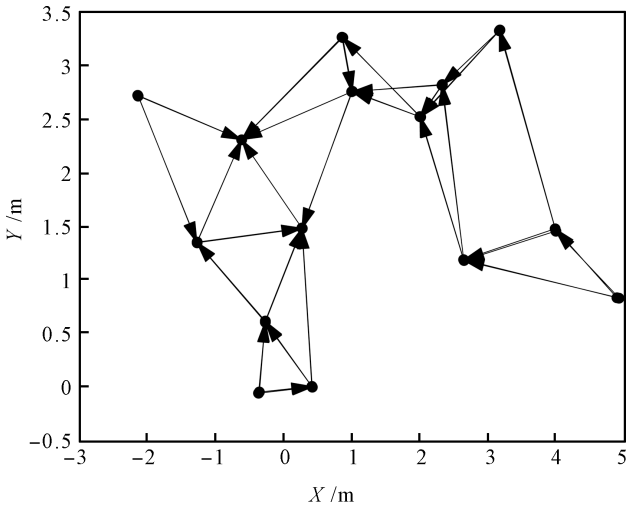
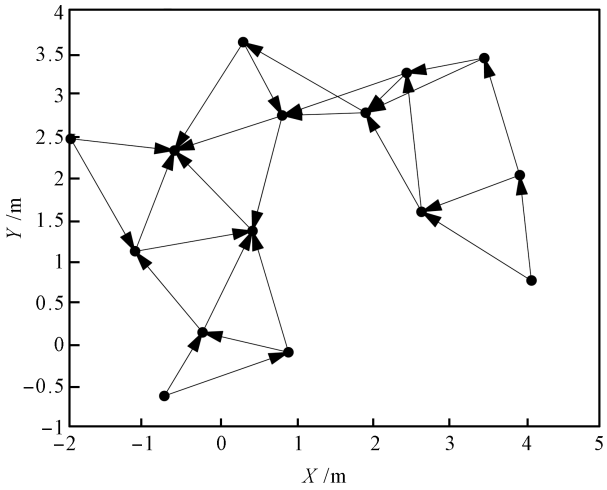


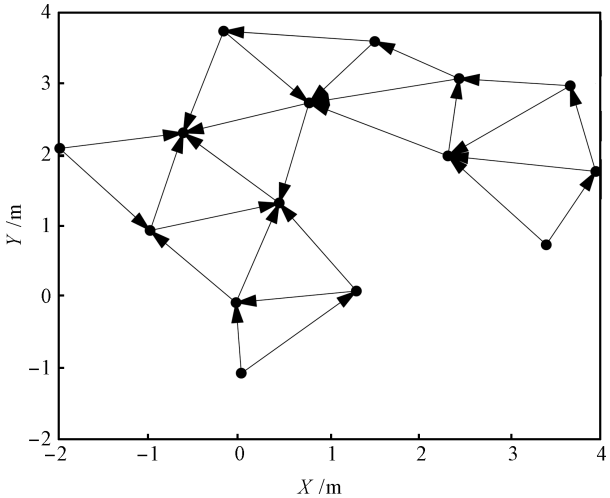
图 6 最优持久编队

Fig. 6 Optimally persistent formation



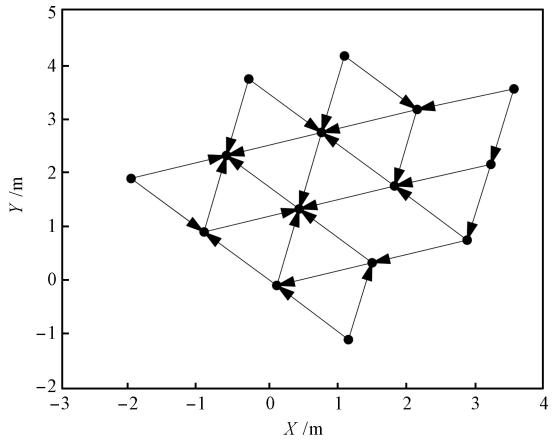
(a) 运动时间 $t = 1.34\,\mathrm{s}$

(a) Motion time $t = 1.34\,\mathrm{s}$



(b) 运动时间 $t = 3.64\,\mathrm{s}$

(b) Motion time $t = 3.64\,\mathrm{s}$



(c) 运动时间 $t = 12\,\mathrm{s}$

(c) Motion time $t = 12\,\mathrm{s}$

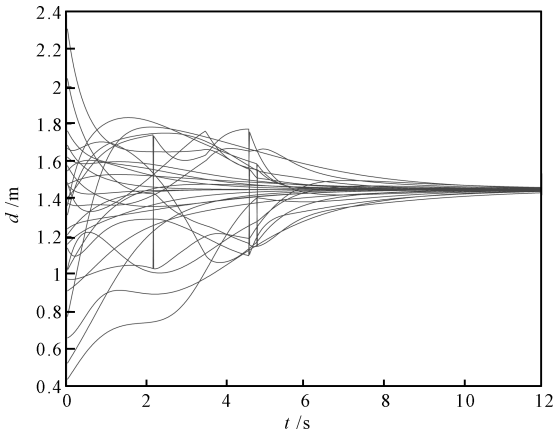
图 7　编队运动过程

Fig. 7　Motion process of the formation

图 8 所示为运动过程中各参数的变化. 其中图 8 (a) 为通信智能体之间的距离变化, 可知最终距离趋于一致; 图 8 (b) 为各智能体速度变化, 所有速度最终趋于 0. 图 8 (a) 中曲线有峰刺, 表示对应时刻系统通信拓扑发生切换, 通信智能体之间的距离发生变化; 图 8 (b) 表明在缓冲控制输入作用下, 没有出现速度峰刺现象. 图 8 (c) 为运动中编队通信距离总和的比较, 易知, 最优持久编队算法能有效减少编队中通信距离和, 即能够有效减少通信能量消耗, 降低通信复杂度.

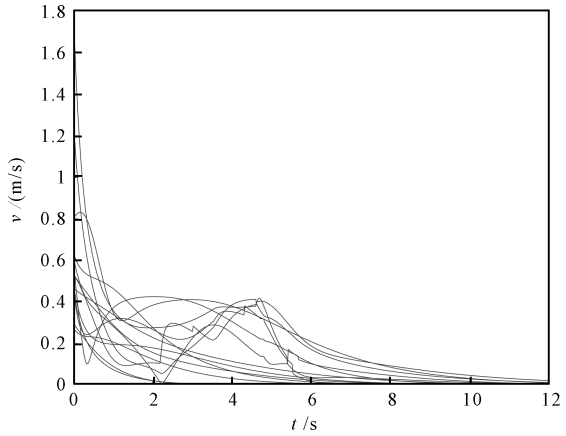
5　结论

本文研究了多智能体系统中基础圈为三角形或包含四边形的最优持久编队生成算法, 并设计了生成的最优持久编队的运动控制算法. 由于刚性图结构的多样性, 很难以统一的规则对刚性图的无向边进行有向化, 故首先提出基础圈概念, 依据基础圈将刚性图进行分类,以分别设定含有不同基础圈的刚性



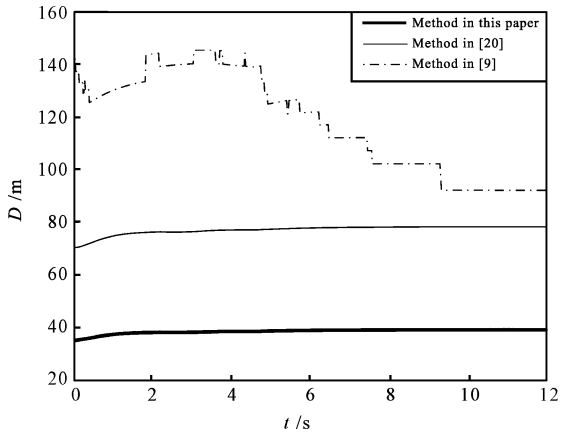
(a) 通信智能体之间的距离变化

(a) Distance changes between communicating agents



(b) 智能体的速度变化

(b) Velocity changes of agents



(c) 通信距离和的变化

(c) Changes of the distance sum

图 8　运动中参数的变化

Fig. 8　Changes of parameters during the motion

图的有向化规则. 在此基础上, 研究了二维平面中基础圈为三角形或包含四边形的最优持久图的生成算法, 再考虑到智能体的有效感知范围和邻居扩展策略, 设计了基础圈为三角形或包含四边形的最优持久编队生成算法, 同时基于领航 – 跟随控制策略和编队中邻居的相对距离信息, 设计了对应的运动控制算法, 并将最优持久编队生成算法应用于运动编队中, 有效地降低了在运动编队的通信复杂度和通信能量消耗. 最后通过仿真验证了持久编队生成算法和算法在运动编队中降低能耗的有效性.

在本文中, 只研究了基础圈为三角形或包含四边形的持久编队生成算法. 考虑到编队中的基础圈可能为其他结构, 故在将来研究中, 会考虑基础圈为其他结构的最优持久编队的自动生成算法.

References

1 Lin P, Jia Y M. Distributed rotating formation control of multi-agent systems. *Systems and Control Letters*, 2010, **59**(10): 587−595

2 Hong Y G, Hu J P, Gao L X. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology. *Automatica*, 2006, **42**(7): 1177−1182

3 Lu X Q, Austin F, Chen S H. Flocking in multi-agent systems with active virtual leader and time-varying delays coupling. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, **16**(2): 1014−1026

4 Luo X Y, Li S B, Guan X P. Flocking algorithm with multi-target tracking for multi-agent systems. *Pattern Recognition Letters*, 2010, **31**(9): 800−805

5 Yan J, Guan X P, Luo X Y, Yang X. Consensus and trajectory planning with input constraints for multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1074−1082

6 Yu Hong-Wang, Zheng Yu-Fan. Dynamic behavior of multi-agent systems with distributed sampled control. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 357−365
(余宏旺, 郑毓蕃. 多智能体系统在分布式采样控制下的动力学行为. 自动化学报, 2012, **38**(3): 357−365)

7 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520−1533

8 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5), 655−661

9 Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 401−420

10 Hendrickx J M, Anderson B D O, Blondel V D. Rigidity and persistence of directed graphs. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. Seville, Spain: IEEE, 2005. 2176−2181

11 Laman G. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *Journal of Engineering Mathematics*, 1970, **4**(4): 331−340

12 Hendrickx J M, Fidan B, Yu C, Anderson B D O, Blondel V D. Formation reorganization by primitive operations on directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(4): 968−979

13 Hendrickx J M, Fidan B, Yu C B, Anderson B D O, Blondel V D. Elementary operations for the reorganization of minimally persistent formations. In: Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. Kyoto, Japan: IEEE, 2006. 859−873

14 Smith B S, Egerstedt M, Howard A. Automatic generation of persistent formations for multi-agent networks under range constraints. *Mobile Networks and Applications*, 2009, **14**(3): 322−335

15 Luo X Y, Li S B, Guan X P. Automatic generation of min-weighted persistent formations. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(8): 3104−3114

16 Ren R, Zhang Y Y, Luo X Y, Li S B. Automatic generation of optimally rigid formations using decentralized methods. *International Journal of Automation and Computing*, 2010, **7**(4): 557−564

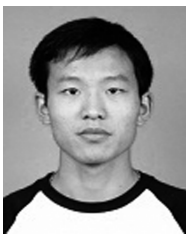
17 Anderson B D O, Yu C B, Dasgupta S, Morse A S. Control of a three-coleader formation in the plane. *Systems and Control Letters*, 2007, **56**(9−10): 573−578

18 Cao M, Anderson B D O, Morse A S, Yu C B. Control of acyclic formations of mobile autonomous agents. In: Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico: IEEE, 2008. 1187−1192

19 Guo J, Lin Z Y, Cao M, Yan G F. Adaptive leader-follower formation control for autonomous mobile robots. In: Proceedings of the 2010 American Control Conference. Baltimore, USA: AACC, 2010. 6822−6827

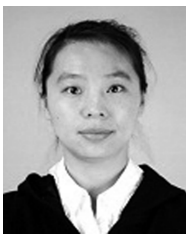
20 Luo X Y, Liu D, Guan X P, Li S B. Flocking in target pursuit for multi-agent systems with partial informed agents. *IET Control Theory and Applications*, 2012, **6**(4): 560−569

罗小元 燕山大学电气工程学院教授. 2005 年于燕山大学获得博士学位. 主要研究方向为多智能体协调控制, 网络系统预测控制. 本文通信作者.
E-mail: xyluo@ysu.edu.cn
(**LUO Xiao-Yuan** Professor in the Department of Electrical Engineering, Yanshan University. He received his Ph. D. degree from Yanshan University in 2005. His research interest covers coordinated control of multi-agent systems and predictive control of network systems. Corresponding author of this paper.)



邵士凯 燕山大学控制理论与控制工程硕士研究生. 2010 年于河北科技大学获得学士学位. 主要研究方向为多智能体刚性编队和持久编队.
E-mail: ssk@126.com
(**SHAO Shi-Kai** Master student in control theory and control engineering at Yanshan University. He received his bachelor degree from Hebei University of Technology and Science in 2010. His research interest covers rigid formation and persistent formation of multi-agent systems.)

关新平 燕山大学教授, 上海交通大学教授. 1999 年于哈尔滨工业大学获得博士学位. 主要研究方向为网络化系统控制, 多智能体协调控制.
E-mail: xpguan@ysu.edu.cn
(**GUAN Xin-Ping** Professor at Yanshan University and Shanghai Jiao Tong University. He received his Ph. D. degree from Harbin Institute of Technology in 1999. His research interest covers control of network systems and coordinated control of multi-agent systems.)



赵渊洁 天津理工大学硕士研究生. 2010 年于燕山大学获得学士学位. 主要研究方向为分布式控制和图像处理.
E-mail: zhaoyuanjie@163.com
(**ZHAO Yuan-Jie** Master student at Tianjin University of Technology. She received her bachelor degree from Yanshan University in 2010. Her research interest covers distributed control and image processing.)