离散自适应重复控制: 收敛性分析与实现

孙明轩 [1] 余林江 [1] 何海港 [1]

摘 要 针对周期已知情形下的离散周期时变系统, 提出一种自适应重复控制方法, 参数估计采用带死区修正的重复学习投影算法. 关键技术引理在分析离散自适应控制系统时起到了关键作用, 通过推广这一引理, 文中给出重复域关键技术引理, 用于证明离散自适应重复控制系统的稳定性和收敛性. 理论分析表明, 系统的输入和输出信号均有界; 且当周期数趋于足够大时, 跟踪误差收敛于一邻域中, 其半径为干扰的界. 在直线电机实验装置上的应用结果验证了所提出重复控制方法的有效性.

关键词 自适应重复控制, 投影算法, 死区修正, 离散周期系统

引用格式 孙明轩, 余林江, 何海港. 离散自适应重复控制: 收敛性分析与实现. 自动化学报, 2013, **39**(4): 400−406

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00400

Discrete Adaptive Repetitive Control: Convergence Analysis and Implementation

SUN Ming-Xuan[1] YU Lin-Jiang[1] HE Hai-Gang[1]

Abstract This paper presents an adaptive repetitive control method for discrete periodically time-varying systems with known periodicity. When estimating unknowns, a repetitive learning projection algorithm with dead-zone is used. The result in this paper can be considered an application of the key technique lemma in repetition domain, by which stability and convergence of the discrete adaptive repetitive control system are established. It is shown that both system input and output are bounded and the tracking error would converge to the bound on the disturbance variable. A linear motor servo system is taken as an example, and experiment results are presented for demonstrating effectiveness of the proposed method.

Key words Adaptive repetitive control, projection algorithm, deadzone modification, discrete periodic systems

Citation Ming-Xuan Sun, Lin-Jiang Yu, Hai-Gang He. Discrete adaptive repetitive control: convergence analysis and implementation. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 400−406

自适应控制技术能够有效地处理参数不确定动态系统的控制问题. 自适应控制器的参数调整机制能够在线调整控制器参数, 使得闭环系统能具有自适应能力, 以克服被控对象内部特性变化或外界干扰造成的影响. 至今, 自适应控制 (特别是离散自适应控制) 领域已取得了十分丰富的理论成果[1−4], 包括各种自适应系统的稳定性和收敛性分析, 其中, 投影算法与最小二乘算法是常用的参数估计算法. 工程场合中有许多被控对象执行周期跟踪任务, 其参考信号是周期已知的周期信号. 重复控制是适于周期参考信号跟踪的控制技术, 现已发表的重复控制系统综合方法集中于频域方法[5−6].

近年来, Lyapunov 综合方法在自适应重复控制中的应用也引起了人们的关注[7−13]. 文献 [7] 较早采用自适应控制系统综合手段处理重复控制系统问题. 为了估计动态系统中的不确定非线性函数, 文献 [8] 提出一种学习机制, 当被学习量为周期信号时, 所提出的学习机制即为重复学习算法. 文献 [9] 讨论部分限幅学习算法. 在文献 [10] 给出的渐近学习方案中, 系统当前次运行的初态允许为上次运行的终态, 这与重复控制系统是相同的. 通常的参数估计方法对一个定常参数的估计需要一个积分器, 而估计 (连续) 周期信号需要无穷多个积分器[11]. 为此, 文献 [11] 构造重复学习律用于周期参数的估计. 文献 [12] 讨论完全限幅学习算法. 文献 [13] 给出采用投影算子的重复学习方案.

对于离散时间情形, 用于离散周期参数估计的逐点积分器个数是有限的[14−18]. 从已发表文献中可以看出, 重复学习是解决周期信号估计问题的有效途径. 一个系统中的参数是可学习的条件是它是一参数不变量, 此即为学习系统中的参数不变量原理. 大多自适应系统解决定常参数的估计问题属 “点学习”, 而重复学习系统解决的是重复参数的估计是 “曲线学习”、“曲面学习”, 甚至是更为复杂的时间函数的学习. 这样看来, 重复学习系统推广适用于定常

收稿日期 2011-11-23 录用日期 2012-10-22
Manuscript received November 23, 2011; accepted October 22, 2012
国家自然科学基金 (60874041, 61174034) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60874041, 61174034)
本文责任编委 方海涛
Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao
1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023
1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023
该文的英文版同时发表在*Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 4, pp. 400−406, 2013.

信号估计/定常干扰抑制问题的“点学习”方法, 十分丰富的现有离散自适应系统理论[1−3], 可以被推广用于重复学习系统的分析与设计.

一般来讲, 自适应系统也是学习系统, 自适应系统中的主要问题之一是参数不变量的学习问题, 这里的参数不变量是参数空间中的不变量. 常见的参数不变量有 (以参数 $p(t)$ 进行说明): 1) 定常参数, 它不随时间变化, 满足 $p(t') = p(t'-1)$, t' 为时间变量; 2) 周期参数 (周期为 N), 它按周期变化, 满足 $p(t') = p(t'-N)$; 3) 重复参数, 它是有限区间 $\{0,1,2,\cdots,N\}$ 上的时变参数, 但不随重复轴变化, 满足 $p_k(t) = p_{k-1}(t)$ ($k = 0,1,2,\cdots$) 表示重复次数. 周期参数实际上也是重复参数. 对于周期为 N 的周期参数 $p(t')$, 令 $t' = t + kN$, $t = 0,1,2,\cdots,N-1, k = 0,1,2,\cdots$, 则 $p(t') = p_k(t)$. 本文采取相同的处理方法.

现有的研究在系统不确定性满足线性增长条件的前提下进行[14−16]. 特别地, 文献 [16] 针对一类控制增益正定 (仅依赖于时间) 的离散时间非线性系统, 采用投影算子学习算法设计控制器, 并同时讨论存在确定性干扰的情形. 关键技术引理是离散自适应控制系统分析的重要工具[1]. 这一引理的重复域形式被用于证明离散自适应学习控制 (包括迭代学习控制和重复控制) 系统的稳定性与收敛性. 对于输入输出描述的线性系统需验证线性增长条件[17−18]. 文献 [17] 在分析离散自适应迭代学习控制系统时, 考查相关变量在一个周期中的和, 使得分析过程清晰、简洁, 并对关键技术引理的重复域形式进行相应修正. 文献 [18] 将这一结果推广到离散周期系统的重复控制. 类似地, 利用滑模控制中的趋近律方法, 文献 [19−20] 构造重复学习机制, 也是按照将“点学习”推广为重复学习的做法.

本文提出一种离散时间线性周期系统的自适应重复控制方法, 受控系统特性由输入输出模型描述, 采用带有死区修正的重复学习投影算法进行参数估计. 文中给出修正的重复域关键技术引理, 用于证明离散自适应重复控制系统的稳定性和收敛性. 与现有文献中假设线性增长条件的做法不同, 本文证明所讨论的周期系统在应用关键技术引理时所要求的线性增长条件, 以及带死区修正的重复学习算法的有界性和收敛性质. 从而进一步证明系统输入输出信号的有界性, 且当周期数足够大时, 跟踪误差收敛于一邻域中, 其半径为干扰的界. 应该指出的是, 本文中的干扰是迭代依赖的, 不能归结为文献 [16] 所处理的确定性情形. 本文给出的离散周期系统的表述方式, 使得我们采用文献 [17] 提出的自适应迭代学习控制系统的分析方法 (为了表述简洁起见, 文中仅讨论重复学习投影算法, 但可以将其推广到重复学习最小二乘算法). 为了验证所提控制方法的有效性, 我们将其应用于一直线电机伺服对象, 获得了支持性实验结果.

1　问题的提出

考虑下述单输入单输出离散时间线性周期系统:

$$A(q^{-1},t)y_k(t) = B(q^{-1},t)u_k(t) + w_k(t) \tag{1}$$

式中, $t \in 0,1,\cdots,N-1$, $k = 0,1,2,\cdots$; $u_k(t)$ 和 $y_k(t)$ 分别表示第 k 周期 t 时刻的系统输入和输出; $w_k(t)$ 表示有界干扰, 满足 $|w_k(t)| \le \Delta$; $A(q^{-1},t)$, $B(q^{-1},t)$ 是后移算子 q^{-1} 的时变多项式:

$$\begin{aligned}A(q^{-1},t) &= 1 + a_1(t)q^{-1} + \cdots + a_n(t)q^{-n}\\ B(q^{-1},t) &= b_1(t)q^{-1} + b_2(t)q^{-2} + \cdots + b_n(t)q^{-n}\end{aligned}$$

这里, $a_1(t),\cdots,a_n(t)$ 和 $b_1(t),\cdots,b_n(t)$ 是周期为 N 的未知时变参数, 且 $b_1(t) \ne 0, t \in 0,1,\cdots,N-1$.

记 $\boldsymbol{\varphi}_k(t) = [-y_k(t-1), -y_k(t-2),\cdots,-y_k(t-n), u_k(t-1), u_k(t-2),\cdots,u_k(t-n)]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\theta}(t) = [a_1(t),\cdots,a_n(t), b_1(t),\cdots,b_n(t)]^{\mathrm{T}}$. 可将系统 (1) 表达为如下自回归形式:

$$y_k(t) = \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta}(t) + w_k(t) \tag{2}$$

本文的目标是在干扰有界 ($|w_k(t)| \le \Delta$) 的前提下, 寻找合适的控制序列 $u_k(t)$, 使得实际轨迹 $y_k(t)$ 尽可能地跟踪上参考信号 $y_k^*(t)$, 即对于 $t = 0,1,\cdots,N-1$, $y_k(t)$ 收敛于 $y_k^*(t)$ 的邻域中, 邻域半径为 Δ. 为了实现这个控制目标, 采用一步超前控制策略. 使得

$$\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta}_k(t) = y_k^*(t) \tag{3}$$

这里, $\boldsymbol{\theta}_k(t)$ 是 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 的估计.

2　重复学习投影算法及系统性能分析

为了推导出周期时变参数的估计算法, 考虑下述关于 $\boldsymbol{\theta}_k(t)$ 连续可微的目标函数:

$$J(\boldsymbol{\theta}_k(t)) = [y_k(t) - \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta}_k(t)]^2 \tag{4}$$

通过最小化目标函数来获得 $\boldsymbol{\theta}_k(t)$.

定义误差 $e_k(t) = y_k(t) - \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta}_k(t)$. $J(\boldsymbol{\theta}_k(t))$ 关于 $\boldsymbol{\theta}_k(t)$ 的梯度为

$$\nabla J(\boldsymbol{\theta}_k(t)) = -2\boldsymbol{\varphi}_k(t)e_k(t)$$

由此可构造学习算法

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}(t) = \boldsymbol{\theta}_k(t) + 2L_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)e_k(t) \tag{5}$$

其中, $L_k(t)$ 是学习增益. 将式 (5) 代入式 (4), 可得

$$J(L_k(t)) = [1 - 2L_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)]e_k^2(t) \tag{6}$$

显然,

$$L_k(t)=\frac{1}{2\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)} \tag{7}$$

可使式 (6) 关于 $L_k(t)$ 取值最小. 考虑到一旦 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)=0$, $L_k(t)$ 会产生奇异, 我们对其做修正, 使得 $L_k(t)=\frac{1}{2}\frac{1}{c+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)}$, 其中 c 为大于零的常数. 为了表达简洁, 置 $c=1$. 由于系统存在干扰 $w_k(t)$, 为了提高系统鲁棒性, 我们需对学习算法进行鲁棒处理. 典型的处理方法是死区修正. 下面给出的是带死区修正的重复学习投影算法

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}(t)=\boldsymbol{\theta}_k(t)+\frac{a_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)}{1+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)}e_k(t) \tag{8}$$

其中, $a_k(t)$ 为死区函数, 定义如下:

$$a_k(t)=\begin{cases}0, & |e_k(t)|<\Delta\\ 1-\frac{\Delta}{|e_k(t)|}, & |e_k(t)|\geq\Delta\end{cases} \tag{9}$$

定理 1. 对于系统 (2), 采用一步超前控制 (3) 及参数更新律 (8), 以下性质成立: 对于 $t\in\{0,1,\cdots N-1\}$,

1) $\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\|\leq\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\|$, 其中, 估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)=\boldsymbol{\theta}(t)-\boldsymbol{\theta}_k(t)$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\frac{|a_k(j)e_k(j)|}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{\varphi}_k(j)}}=0$.

证明. 1) 由式 (8) 知, 对于 $t\in\{0,1,\cdots,N-1\}$,

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\|^2\leq\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\|^2-\frac{2a_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)}{1+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)}\times e_k(t)+\frac{a_k^2(t)\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)}{[1+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)]^2}e_k^2(t) \tag{10}$$

注意到

$$e_k(t)=y_k(t)-\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta}_k(t)=\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)+w_k(t)$$

可得:

$$\begin{aligned}&-2a_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)e_k(t)=\\&2a_k(t)[w_k(t)-e_k(t)]e_k(t)\leq\\&2a_k(t)\Delta|e_k(t)|-2a_k(t)e_k^2(t)=\\&-2a_k(t)|e_k(t)|[|e_k(t)|-\Delta]\end{aligned}$$

结合式 (9),

$$-2a_k(t)\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)e_k(t)\leq-2a_k^2(t)e_k^2(t) \tag{11}$$

将式 (11) 代入式 (10) 得

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\|^2\leq\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\|^2-\frac{2a_k^2(t)e_k^2(t)}{1+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)}+\frac{a_k^2(t)e_k^2(t)}{1+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)}=\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\|^2-\frac{a_k^2(t)e_k^2(t)}{1+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)} \tag{12}$$

因此,

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\|^2\leq\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\|^2$$

2) 由式 (12) 知, 对于 $t\in\{0,1,\cdots,N-1\}$,

$$\frac{a_k^2(t)e_k^2(t)}{1+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)}\leq\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\|^2-\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\|^2$$

故

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i^2(t)e_i^2(t)}{1+\boldsymbol{\varphi}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_i(t)}\leq\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0(t)\|^2-\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\|^2\leq\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0(t)\|^2$$

因为 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0(t)$ 有界, 所以

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k(t)e_k(t)|}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)}}=0 \tag{13}$$

□

关键技术引理在证明离散自适应控制的稳定性和收敛性时起着重要作用[1], 它是在时域中给出的, 称其为时域关键技术引理 (Time-domain key technical lemma, TDKTL). 为了分析离散自适应重复控制系统的跟踪性能, 我们给出重复域的关键技术引理 (Repetition-domain key technical lemma, RDKTL), 它是 TDKTL 的一个推广形式.

引理 1 (RDKTL). 对于实数序列 $\{\mu_k(t)\}$ 及向量序列 $\{\boldsymbol{\xi}_k(t)\}$, $(t=0,1,\cdots,N-1), k=1,2,\cdots$, 如果

C1. $\|\boldsymbol{\xi}_k(t)\|\leq A'+A''\sum_{j=0}^{N-1}|\mu_k(j)|$, 其中, $0\leq A'<\infty, 0<A''<\infty$;

C2. $\lim\limits_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{|\mu_k(j)|}{\sqrt{b_k'(j)+b_k''(j)\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{\xi}_k(j)}}=0$, 其中, $0\leq b_k'(j)<B'<\infty, 0<b_k''(j)<B''<\infty$,

那么,

1) $\{\boldsymbol{\xi}_k(t)\}$ 在所有周期中关于每个时刻 t 有界,

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k(t)=0$.

证明. 对于固定时刻 $t\in\{0,1,\cdots,N-1\}$, 假如 $\mu_k(t)$ 无界. 那么, 存在子序列 k_n 使得

$$\lim_{k_n\to\infty}\mu_{k_n}(t)=\infty$$

故

$$\lim_{k_n\to\infty}\sum_{j=0}^{N-1}|\mu_{k_n}(j)|=\infty$$

利用条件 C1 和 C2,

$$\frac{|\mu_{k_n}(t)|}{\sqrt{b'_{k_n}(t)+b''_{k_n}(t)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}_{k_n}(t)\boldsymbol{\xi}_{k_n}(t)}}\geq \frac{|\mu_{k_n}(t)|}{\sqrt{B'}+\sqrt{B''}[A'+A''\sum\limits_{j=0}^{N-1}|\mu_{k_n}(j)|]}$$

因此,

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{|\mu_{k_n}(j)|}{\sqrt{b'_{k_n}(j)+b''_{k_n}(j)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}_{k_n}(j)\boldsymbol{\xi}_{k_n}(j)}}\geq \frac{\sum\limits_{j=0}^{N-1}|\mu_{k_n}(j)|}{\sqrt{B'}+\sqrt{B''}[A'+A''\sum\limits_{j=0}^{N-1}|\mu_{k_n}(j)|]}$$

由此得到:

$$\lim_{k_n\to\infty}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{|\mu_{k_n}(j)|}{\sqrt{b'_{k_n}(j)+b''_{k_n}(j)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}_{k_n}(j)\boldsymbol{\xi}_{k_n}(j)}}\geq \frac{1}{\sqrt{B''}A''}>0$$

这与条件 C2 相矛盾, 故 $\{\mu_k(t)\}$ 有界. 根据条件 C1 知, $\{\boldsymbol{\xi}_k(t)\}$ 有界, 即结论 1) 成立; 由 C2 并结合结论 1) 可得结论 2). □

我们还需要下述关于线性离散时变系统一致渐近稳定的定义[21].

定义 1. 对于线性离散时变系统

$$x(t+1)=G(t)x(t) \tag{14}$$

其中, $x(0)=x_0$ 为系统的初始状态. 若存在 $M>0$, $\lambda\in(0,1)$, 使得

$$\|x(t)\|\leq M\lambda^{-t}\|x_0\| \tag{15}$$

则称系统 (14) 是一致渐近稳定的.

由上述定义容易推得, 线性离散时变系统渐近稳定的充分必要条件是: 存在 $M_1>0$, $\lambda_1\in(0,1)$, 使得

$$\|\Phi(t)\|\leq M_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \tag{16}$$

其中, $\Phi(t)=G(t-1)G(t-2)\cdots G(0)$, $\Phi(0)=I$.

在本文中, 我们假设系统

$$B(q^{-1},t)u_k(t)=y_k(t) \tag{17}$$

是一致渐近稳定的, 这里, 以 $y_k(t)$ 为输入, 以 $u_k(t)$ 为输出.

定理 2. 采用一步超前控制器 (3) 及参数更新律 (8), 离散控制系统 (2) 具有以下跟踪性能:

1) 控制输入 $u_k(t)$ 和系统输出 $y_k(t)$ 均有界;

2) 对于固定 $t=0,\cdots,N-1$, 跟踪误差 $y_k(t)-y^*_k(t)$ (也就是 $e_k(t)$) 收敛于半径为 Δ 的邻域内, 即

$$\lim_{k\to\infty}\sup|e_k(t)|\leq\Delta$$

证明. 由系统 (17) 的一致渐近稳定的假设知, 存在常数 c_1、c_2 使得对于固定的 $t=0,\cdots,N-1$,

$$|u_k(t)|\leq c_1+c_2\sum_{j=0}^{N-1}|y_k(j)| \tag{18}$$

不失一般性, 假设 $y_k(0),y_k(-1),\cdots,y_k(-n+1)$ 均为零, 且 $u_k(-1),\cdots,u_k(-m+1)$ 也均为 0. 根据 $\boldsymbol{\varphi}_k(t)$ 的定义并结合式 (18), 利用不等式 $\sqrt{a^2+b^2}\leq|a|+|b|$ 可得

$$\begin{aligned}&\|\varphi_k(t)\|\leq\\&\quad|y_k(t-1)|+|y_k(t-2)|+\cdots+|y_k(t-n)|+\\&\quad|u_k(t-1)|+\cdots+|u_k(t-m)|\leq\\&\quad\sum_{j=0}^{N-1}|y_k(j)|+m\left\{c_1+c_2\sum_{j=0}^{N-1}|y_k(j)|\right\}=\\&\quad c_3+c_4\sum_{j=0}^{N-1}|y_k(j)|\end{aligned} \tag{19}$$

其中, $c_3=mc_1,c_4=1+mc_2$.

根据跟踪误差的定义, 下列不等式成立

$$|y_k(t)|\leq|e_k(t)|+|y^*_k(t)|$$

由参考信号的有界性, 可将式 (19) 写成

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_k(t)\|&\leq c_3+c_4\sum_{j=0}^{N-1}(|e_k(j)|+|y^*_k(j)|)\leq\\&c_5+c_6\sum_{j=0}^{N-1}|e_k(j)|\end{aligned} \tag{20}$$

由式 (9) 得

$$|e_k(t)|-\Delta\leq a_k(t)|e_k(t)| \tag{21}$$

将式 (21) 代入式 (20),

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_k(t)\| &\le c_5 + c_6 \sum_{j=0}^{N-1} |e_k(j) - \Delta + \Delta| \le \\ & c_5 + c_6 N\Delta + c_6 \sum_{j=0}^{N-1} |a_k(j) e_k(j)| = \\ & c_7 + c_8 \sum_{j=0}^{N-1} |a_k(j) e_k(j)| \end{aligned} \tag{22}$$

由定理 1 及式 (22), 利用 RDKTL, 可证得所有信号的有界性, 且

$$\lim_{k\to\infty} a_k(t) e_k(t) = 0, \ \ t = 0, \cdots, N-1$$

□

系统 (1) 描述一类离散周期系统, 我们采用两变量表达时间变量. 这样的描述方式使得我们可以采用文献 [17] 提出的自适应迭代学习控制系统的分析方法. 因此, 文中所述方法可以被看作解决学习控制 (包括迭代学习控制与重复控制) 问题的统一方法. 迭代学习控制是与重复控制并行发展的控制技术, 在提法上是有区别的. 前者适用于在有限作业区间上重复运行的系统, 每次重复时, 需对系统进行初始定位, 一般要求受控对象的初始位置与期望输出轨迹在起始点处重合. 虽然目前的研究结果允许存在初始定位误差, 但会影响初始点上的跟踪性能[14, 17]. 后者可用在期望轨迹为周期信号的场合, 作业区间是无限的, 系统在每个周期的初态为上个周期的终态, 因而无初始定位问题, 回避了前者存在的初始点处的跟踪性能问题.

为了表述简洁, 我们采用重复学习投影算法估计时变参数, 并证明相应自适应重复控制系统的稳定性与收敛性. 这些结果也可以被推广到采用重复学习最小二乘算法, 或采用其他控制策略 (如极点配置) 的情形; 参数估计也可以考虑其他修正方法, 如投影算子修正或限幅修正.

3 实验结果

本节给出实验结果以检验所提出控制方法的有效性, 实验在一永磁同步直线电机实验装置上进行, 如图 1 所示. 其中, DSP 开发板实现位置环控制算法, ELMO 驱动器除驱动功能外, 其内部还集成速度环、电流环控制模块, 能有效降低 DSP 开发板作为位置控制器的在线计算负担.

通常以定常系统作为被控对象的数学模型, 输入为期望速度、输出为位置信号. 这里, 我们取位置参考信号为周期信号. 对于重复运行下的伺服系统, 为了更好地刻划其动态行为, 本文采取周期时变系统模型 (1). 四个周期时变参数的初值取为

$$a_1 = -1.4, \, a_2 = 0.4, \, b_1 = 0.5, \, b_2 = -0.15$$

并将各种未建模特性归为干扰项.

图 1 永磁同步直线电机伺服系统

Fig. 1 Permanent magnet linear synchronous motor servo system

实验中, 采样周期 $T_s = 0.01\,\mathrm{s}$, 位置参考信号 $y_k^*(t)$ 为正弦信号, 其幅值为 20 mm, 周期为 2 s.

为了比较, 我们对下述两种情况进行了实验.

情形 1. 采用下述带有死区修正的遗忘梯度算法

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_k(t) &= \boldsymbol{\theta}_k(t-1) + \frac{a_k(t-1)\boldsymbol{\varphi}_k(t-1)}{r_k(t)} e_k(t-1) \\ r_k(t) &= \lambda r_k(t-1) + \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}(t-1)\boldsymbol{\varphi}_k(t-1) \\ a_k(t) &= \begin{cases} 0, & |e_k(t)| < \Delta \\ 1 - \frac{\Delta}{|e_k(t)|}, & |e_k(t)| \ge \Delta \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $0 \le \lambda \le 1$, $r_k(0) = 1$. 当遗忘因子 $\lambda = 1$ 时, 遗忘梯度算法就是随机梯度算法; 当遗忘因子 $\lambda = 0$ 时, 遗忘梯度算法就是投影算法.

当 $\lambda = 0.8$ 时的实验结果见图 2～4. 跟踪误差 $e_k(t)$ 收敛进入 $|e_k(t)| \le 20\,\mu\mathrm{m}$ 的邻域内 (见图 3 直方图), 但呈现明显的周期性, 周期与参考信号相同.

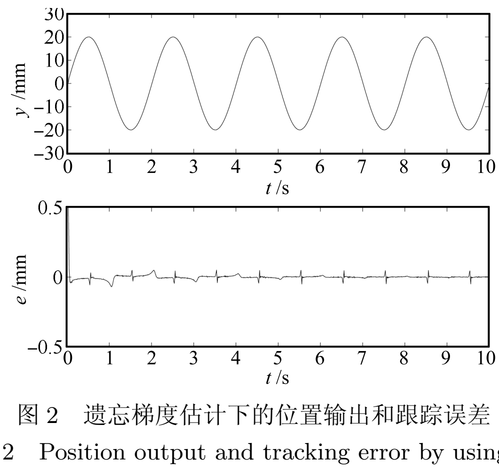


图 2 遗忘梯度估计下的位置输出和跟踪误差

Fig. 2 Position output and tracking error by using the gradient algorithm with a forgetting factor

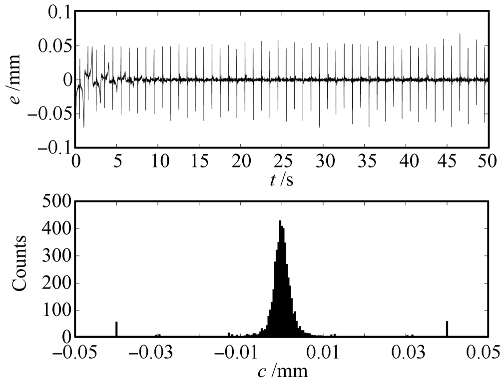


图 3　跟踪误差及统计直方图

Fig. 3　Tracking error and its count histogram

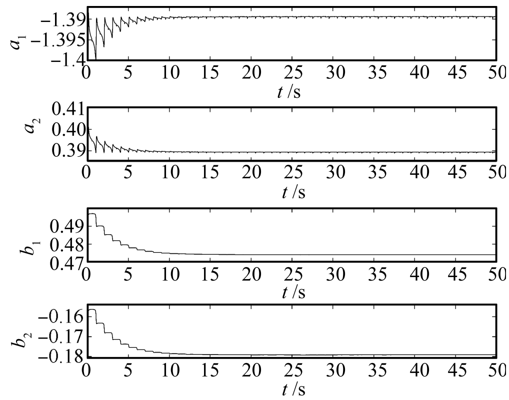


图 4　参数估计结果

Fig. 4　Parameter estimation results

情况 2. 采用自适应重复控制算法 (3) ~ (8), 实验结果见图 5 ~ 7. 跟踪误差 $e_k(t)$ 收敛进入到 $|e_k(t)| \leq 10\,\mu$m 的邻域内 (参见图 6), 且无周期特性. 实验结果表明, 自适应重复控制可实现对周期参考信号的高精度跟踪.

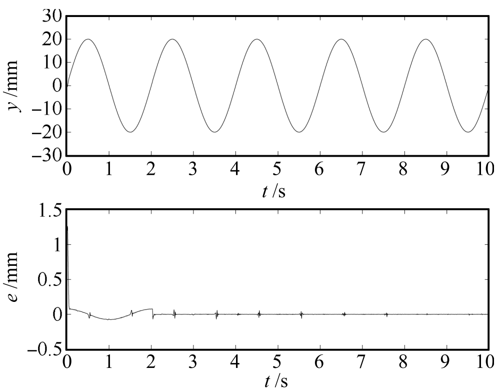


图 5　自适应重复学习下的位置输出和跟踪误差

Fig. 5　Position output and tracking error by using the proposed repetitive learning algorithm

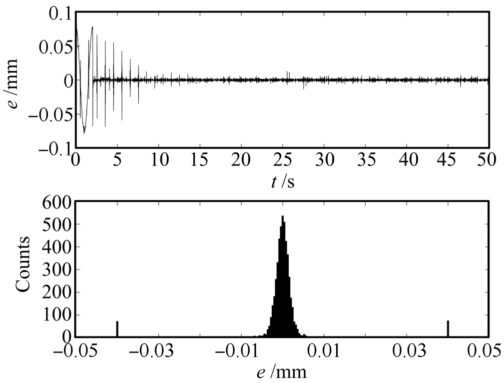


图 6　跟踪误差及统计直方图

Fig. 6　Tracking error and its count histogram

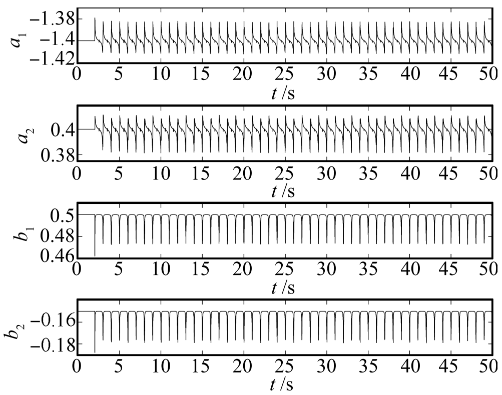


图 7　参数估计结果

Fig. 7　Parameter estimation results

4　结论

本文提出了一类输入输出描述的离散时变系统的自适应重复控制方法, 其系统参数呈周期变化且周期已知. 以带死区修正的重复学习投影算法进行参数估计, 这种学习算法用于处理存在有界干扰的情形. 建立离散自适应控制系统稳定性和收敛性的一种途径是应用著名的关键技术引理. 通过推广这一引理, 文中给出了重复域关键技术引理. 该文在逆系统一致渐近稳定以及干扰有界的假设下, 证明了离散自适应重复控制系统的稳定性和收敛性. 理论与实验结果表明, 当伺服系统执行周期位置跟踪任务时所提方法能够有效提高控制精度.

本文仅讨论了确定性系统, 进一步的工作可以借鉴现有的随机系统自适应控制理论[4], 考虑随机周期系统的自适应重复控制, 这样本文关于有界干扰的假设可以被放宽, 以适用于更广泛的实际场合.

References

1 Goodwin G C, Sin K S. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1984

2 Aström K J, Wittenmark B. *Adaptive Control*. Boston: Addison-Wesley, 1989

3 Chen H F, Guo L. *Identification and Stochastic Adaptive Control*. Boston: Birkhauser, 1991

4 Landau Y D, Landau I D, Lozano R, M′Saad M. *Adaptive Control*. London: Springer-Verleg, 1998

5 Hara S, Yamamoto Y, Omata T, Nakano M. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, **33**(7): 659−668

6 Tomizuka M, Tsao T C, Chew K K. Analysis and synthesis of discrete-time repetitive controllers. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1989, **111**(3): 353−358

7 Sadegh N, Horowitz R, Kao W W, Tomizuka M. A unified approach to the design of adaptive and repetitive controllers for robotic manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems Measurement Control*, 1990, **112**(4): 618−629

8 Messner W, Horowitz R, Kao W W, Boals M. A new adaptive learning rule. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(2): 188−197

9 Dixon W E, Zergeroglu E, Dawson D M, Costic B T. Repetitive learning control: a Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, **32**(4): 538−545

10 Qu Z H, Xu J X. Asymptotic learning control for a class of cascaded nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(8): 1369−1376

11 Xu J X. A new periodic adaptive control approach for time-varying parameters with known periodicity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 579−583

12 Sun M, Ge S S. Adaptive repetitive control for a class of nonlinearly parametrized systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(10): 1684−1688

13 Marino R, Tomei P. An iterative learning control for a class of partially feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(8): 1991−1996

14 Chi R H, Hou Z S, Xu J X. Adaptive ILC for a class of discrete-time systems with iteration-varying trajectory and random initial condition. *Automatica*, 2008, **44**(8): 2207−2213

15 Abidi K, Xu J X. A discrete-time periodic adaptive control approach for time-varying parameters with known periodicity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(2): 575−581

16 Li X D, Xiao T F, Zheng H X. Adaptive discrete-time iterative learning control for nonlinear multiple input multiple output systems with iteration-varying initial error and reference trajectory. *IET Control Theory and Applications*, 2011, **5**(9): 1131−1139

17 Sun M X, He X X. Iterative learning identification and control of discrete time-varying systems. In: Proceedings of the 26th Chinese Control Conference. Hunan, China: IEEE, 2007. 520−524

18 Sun M, Liu X, He H. Adaptive iterative learning control for SISO discrete time-varying systems. In: Proceedings of the 12th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Guangzhou, China, 2012

19 Hua G F, Sun M X. Learning identification and control of a class of discrete periodic systems. In: Proceedings of the 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. Xi′an, China: IEEE, 2009. 6−11

20 Chen Wei-Sheng, Wang Yuan-Liang, Li Jun-Min. Adaptive learning control for nonlinearly parameterized systems with periodically time-varying delays. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(12): 1556−1560
(陈为胜, 王元亮, 李俊民. 周期时变时滞非线性参数化系统的自适应学习控制. 自动化学报, 2008, **34**(12): 1556−1560)

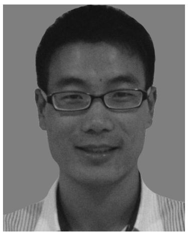
21 Chi R H, Sui S L, Hou Z S. A new discrete-time adaptive ILC for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(7): 805−808

22 Sun M X, Xie H Y, Wang H. Switching-function dynamics designs for uncertain variable structure systems with repetitive control. *International Journal of Control*, 2011, **84**(7): 1196−1208

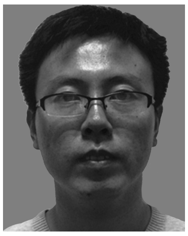
23 Sun Ming-Xuan, Fan Wei-Yun, Wang Hui. Discrete sliding mode repetitive control with novel reaching law. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(10): 1213−1221
(孙明轩, 范伟云, 王辉. 用于离散滑模重复控制的新型趋近律. 自动化学报, 2011, **37**(10): 1213−1221)

24 Lee J W, Dullerud G E. Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems. *Automatica*, 2006, **42**(2): 205−218

孙明轩 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为学习控制. 本文通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn
(**SUN Ming-Xuan** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control. Corresponding author of this paper.)



余林江 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为学习控制.
E-mail: yulj521@163.com
(**YU Lin-Jiang** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control.)



何海港 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为学习控制.
E-mail: hhgangzjut@163.com
(**HE Hai-Gang** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control.)