基于统计线性化的随机非线性微分对策逼近最优策略

张 平 [1,2] 方洋旺 [2] 惠晓滨 [2] 刘新爱 [1] 李 亮 [1]

摘 要 针对二人零和随机非线性微分对策问题, 利用统计线性化技术并提出一种新的逼近策略控制方法. 通过求解具有统计线性化参数的 Riccati 微分方程得到逼近控制策略, 该 Riccati 微分方程与一般线性系统的 Riccati 微分方程具有明显的区别; 同时对控制量受约束情形的控制策略也进行了求解; 最后通过仿真验证了所得结论的正确性.

关键词 微分对策, 统计线性化, 随机非线性系统, 逼近最优策略

引用格式 张平, 方洋旺, 惠晓滨, 刘新爱, 李亮. 基于统计线性化的随机非线性微分对策逼近最优策略. 自动化学报, 2013, **39**(4): 390−399

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00390

Near Optimal Strategy for Nonlinear Stochastic Differential Games Based on the Technique of Statistical Linearization

ZHANG Ping[1,2] FANG Yang-Wang[2] HUI Xiao-Bin[2] LIU Xin-Ai[1] LI Liang[1]

Abstract A novel solution for a class of nonlinear zero-sum stochastic differential games is given based on the technique of statistical linearization. The near optimal feedback strategies are derived by solving the statistical state dependent Riccati equation, which is significantly different from the Riccati equation of linear systems. The case of strategy with bound limitation is also investigated. An example is given to illustrate the application of the theory.

Key words Differential games, statistical linearization, nonlinear stochastic system, near optimal strategy

Citation Ping Zhang, Yang-Wang Fang, Xiao-Bin Hui, Xin-Ai Liu, Liang Li. Near optimal strategy for nonlinear stochastic differential games based on the technique of statistical linearization. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 390−399

二人零和微分对策起源于上世纪 60 年代, 以美国的 R. Isaacs 和前苏联 L. S. Pontryagin 及其团队的研究最为重要[1]. 具有线性二次型指标函数的线性微分对策问题可以通过求解 Riccati 微分方程进行求解[2], 但现实中的大多数系统均为非线性系统, 与线性微分对策相比, 非线性微分对策问题极其具有挑战性, 通常要求解非线性 Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) 微分方程, 而该非线性偏微分方程一般很难求解.

自上世纪 80 年代以来, 一些理论和方法逐步被提出并用于非线性微分对策的数值解法. 其中两个最具有重要突破, 它们分别为由 Crandall 和 Lions[3] 提出的黏性解理论和由 Subbotin[4] 提出的极大极小理论; 在解决维数较高的非线性微分对策问题时, Sinar 等[5] 引入强迫奇异摄动方法求解降阶问题的协态变量, 然后对其进行边界层校正, 逐步迭代求出所有协态变量, 最后得到零阶复合反馈最优控制策略. 在上世纪 90 年代, 集值分析和生存理论[6] 均被用于解微分对策问题, 引入生存核的数值逼近算法可以对具有低半连续价值函数的控制系统进行数值求解; 而后伴随神经网络技术[7], 将微分对策的两点边值求解问题转化为两个神经网络的学习问题, 训练后的两个神经网络分别作为对策双方的最优控制器在线使用. 上述理论和技术均为非线性微分对策的求解提供了可行的方法, 也使得逼近算法研究取得了长足的发展[8−9].

实际中线性化是处理非线性系统的一种最强有力的工具[10]. 针对随机系统统计线性化把非线性函数按概率统计的方法进行线性化, 将随机线性系统的研究成果拓展到随机非线性系统中, 目前已经取得了一系列研究成果[11−13]. 本文将统计线性化方法引入到随机非线性微分对策中, 针对控制量无约束和受约束两种情形, 研究了一类随机非线性系统的微分对策控制问题.

收稿日期 2012-03-07 录用日期 2012-11-06
Received March 7, 2012; accepted November 6, 2012
国家自然科学基金 (60874040) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60874040)
1. 中国人民解放军第 95889 部队 酒泉 735018 2. 空军工程大学航空航天工程学院 西安 710038
1. Unit 95889, PLA, Jiuquan 735018 2. College of Aeronautics and Astronautics Engineering, Air Force Engineering University, Xi′an 710038
该文的英文版同时发表在*Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 4, pp. 390−399, 2013.

1　问题描述

考虑如下连续时间二人零和随机非线性微分对策:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)+B_1(t)\boldsymbol{u}+B_2(t)\boldsymbol{v}+g\boldsymbol{\xi} \tag{1}$$

其中, 假设双方均具有完全状态信息, 控制量 $\boldsymbol{u}$ 为其中一方的控制量, $\boldsymbol{v}$ 为另一方的控制量, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ 为非线性映射函数, $B_1(t)$, $B_2(t)$ 和 g 分别为具有适当维数的时变矩阵, 初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$, 且服从高斯分布 $\mathrm{N}(\boldsymbol{m}_0,R_0)$. $\boldsymbol{\xi}$ 为高斯白噪声向量, 其均值为 0, 方差为 Q, 且与初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 无关.

考虑二次型性能指标函数

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\mathrm{E}\Big\{&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_f)Q_T\boldsymbol{x}(t_f)+\\&\int_{t_0}^{t_f}\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}S\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}\tau\Big\}\end{aligned} \tag{2}$$

实际中我们往往采用条件数学期望去实现无条件数学期望, 即 $\mathrm{E}[\cdot\,|X]$, 其中 X 为信息集 $X=\{\boldsymbol{x}(\tau)|0\le\tau\le t\}$; 同时 Q_T 和 L 为正定对称矩阵; R, S 为半正定对称矩阵; t_0 和 t_f 分别为起始时间和结束时间.

对于随机非线性微分对策问题 (1), 如果存在反馈控制策略

$$\boldsymbol{u}^*=K_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{v}^*=K_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}_2 \tag{3}$$

使得性能指标 (2) 关于 $\boldsymbol{u}$ 取极小值, 而关于 $\boldsymbol{v}$ 取极大值, 满足如下不等式:

$$J(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v})\le J(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)\le J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^*) \tag{4}$$

则称 $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)$ 为鞍点, $\boldsymbol{u}^*$ 和 $\boldsymbol{v}^*$ 分别为双方的最优策略, $J(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v})$ 为对策值. 值得注意的是本章采用统计线性化方法, 由于高斯概率逼近总是存在一定的误差, 因而基于线性化方法求得的最优控制策略为逼近最优策略.

2　统计线性化与非线性微分对策

2.1　统计线性化原理

设函数 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^p\to\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^q$, 在均值 $\hat{\boldsymbol{f}}$ 附近线性化 $\boldsymbol{f}$, 得到如下形式:

$$\boldsymbol{f}=\hat{\boldsymbol{f}}+N\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e} \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}$, N 为使得线性化误差 $\boldsymbol{e}$ 最小的系数, $\hat{\boldsymbol{f}}$ 和 N 应满足的关系式为

$$\hat{\boldsymbol{f}}=\mathrm{E}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\,p(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$N=\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{f}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{m}} \tag{7}$$

关于详细的推导过程详见文献 [14−15].

2.2　非线性微分对策的统计线性化

应用统计线性化方法得到

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\hat{\boldsymbol{f}}+N\boldsymbol{r} \tag{8}$$

将式 (8) 代入原系统 (1), 得到:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=N\boldsymbol{x}(t)+B_1(t)\boldsymbol{u}+B_2(t)\boldsymbol{v}+\\&g\boldsymbol{\xi}+\left(\hat{\boldsymbol{f}}-N\boldsymbol{m}\right)=\\&N\boldsymbol{x}(t)+B_1(t)\boldsymbol{u}+B_2(t)\boldsymbol{v}+g\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{f}_0\end{aligned} \tag{9}$$

式中, $\boldsymbol{f}_0=\hat{\boldsymbol{f}}-N\boldsymbol{m}$, 因为 $\hat{\boldsymbol{f}}$ 和 N 均不含有随机变量, 所以方程 (9) 是线性微分方程.

设状态反馈控制量

$$\boldsymbol{u}=K_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{v}=K_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}_2$$

其中, K_1, K_2, $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{C}_2$ 分别为待定系数. 将方程 (3) 代入方程 (9), 根据随机线性系统的方差分析, 得到向量均值 $\boldsymbol{m}(t)$ 和方差矩阵 $P(t)$ 分别为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{m}}(t)=\mathrm{E}\big[&N\boldsymbol{x}(t)+B_1(t)\boldsymbol{u}+B_2(t)\boldsymbol{v}+\\&g\boldsymbol{\xi}+\left(\hat{\boldsymbol{f}}-N\boldsymbol{m}\right)\big]=\\&\hat{\boldsymbol{f}}+(B_1K_1+B_2K_2)\boldsymbol{m}+\\&B_1\boldsymbol{C}_1+B_2\boldsymbol{C}_2\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\dot{P}=&(N+B_1K_1+B_2K_2)^{\mathrm{T}}P+\\&P(N+B_1K_1+B_2K_2)+gQg^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{11}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{f}}$ 和 N 通常含有均值 $\boldsymbol{m}(t)$ 和方差 $P(t)$[16], 所以方差 (10) 和 (11) 是非线性的.

3　随机非线性微分对策的逼近策略

3.1　控制量无约束情形

定理 1. 对于给定性能指标函数 (2), 使得性能指标值满足式 (4) 的非线性系统 (1) 的双方逼近最优策略和相应的对策逼近值分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=-R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}(\Gamma\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Gamma}_1)\\\boldsymbol{v}&=S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}(\Gamma\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Gamma}_1)\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=&\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\Gamma(0)\boldsymbol{m}+\mathrm{tr}\{\Gamma(0)R\}+\\&2\boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{m}+\Gamma_0(0)\end{aligned} \tag{13}$$

正定对称矩阵 Γ, 满足 Riccati 微分方程

$$\begin{cases}\dot{\Gamma}+\Gamma N+N^{\mathrm{T}}\Gamma-\Gamma B_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\Gamma+\\ \quad\Gamma B_2S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\Gamma+L=0\\ \Gamma\left(t_f\right)=Q_T\end{cases}\tag{14}$$

向量 $\boldsymbol{\Gamma}_1$ 和标量 Γ_0 满足微分方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_1+\boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}}N+\Gamma\boldsymbol{f}_0-\ \Gamma B_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1+\\ \quad\Gamma B_2S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1=0\\ \boldsymbol{\Gamma}_1\left(t_f\right)=0\end{cases}\tag{15}$$

$$\begin{cases}\dot{\Gamma}_0+2\boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_0-\boldsymbol{\Gamma}_1B_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1+\\ \quad\boldsymbol{\Gamma}_1B_2S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1+\mathrm{tr}\left\{\Gamma gQ\left(t\right)g^{\mathrm{T}}\right\}=0\\ \Gamma_0\left(t_f\right)=0\end{cases}\tag{16}$$

式中, N 和 $\boldsymbol{f}_0$ 满足统计线性化方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}\left(t\right)=N\boldsymbol{x}\left(t\right)+B_1K_1\boldsymbol{x}+B_2K_2\boldsymbol{x}+\\ \qquad g\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{f}_0+B_1\boldsymbol{C}_1+B_2\boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{x}\left(t_0\right)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{17}$$

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{m}}\left(t\right)=\hat{\boldsymbol{f}}\ +(B_1K_1+B_2K_2)\boldsymbol{m}+\\ \qquad B_1\boldsymbol{C}_1+B_2\boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{m}\left(t_0\right)=\boldsymbol{m}_0\end{cases}\tag{18}$$

$$\begin{cases}\dot{P}=\left(N+B_1K_1+B_2K_2\right)^{\mathrm{T}}P+\\ \quad P\left(N+B_1K_1+B_2K_2\right)+gQg^{\mathrm{T}}\\ P\left(t_0\right)=R_0\end{cases}\tag{19}$$

其中参数 K_1, K_2, $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{C}_2$ 分别为

$$\begin{cases}K_1=-R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\Gamma,\quad \boldsymbol{C}_1=-R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1\\ K_2=S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\Gamma,\quad \boldsymbol{C}_2=S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1\end{cases}\tag{20}$$

证明. 利用随机动态规划法分两步进行证明

1) 构造 Hamilton-Jacobi-Isaacs 泛函方程. 设 t 时刻的风险函数 F_t 为

$$\begin{aligned}F_t\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(t_f\right)Q_T\boldsymbol{x}\left(t_f\right)+\\ &\int_t^{t_f}\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}S\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{21}$$

在假设条件下此泛函具有马尔科夫性, 即仅依赖于时刻 t 及之后的控制向量 $\boldsymbol{u}\left(\tau\right)$ 和 $\boldsymbol{v}\left(\tau\right)$, $(t\le\tau<t_f)$, 而与 t 时刻之前的控制向量无关.

定义函数 M 对 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 分别取极小、大值

$$M\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\min_u\max_v\mathrm{E}\left[F_t\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)|X\right]\tag{22}$$

式中, X 为全状态信息集 $X=\{\boldsymbol{x}(\tau)|0\le\tau\le t\}$ 由 *Itô* 微分规则, 得到随机 Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程形式

$$\begin{aligned}&M_t+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[M_{\boldsymbol{xx}}gQ\left(t\right)g^{\mathrm{T}}\right]+\\ &\quad\min\boldsymbol{u}\max_{\boldsymbol{v}}\left\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}S\boldsymbol{v}+\right.\\ &\quad\left.\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{f}+B_1\boldsymbol{u}+B_2\boldsymbol{v}\right)\right\}=0\end{aligned}\tag{23}$$

其中, M_t、$\boldsymbol{M_x}$ 和 $M_{\boldsymbol{xx}}$ 分别为函数 M 关于时间、状态的一阶偏导数和关于状态的二阶偏导数.

终止条件

$$M\left(t_f\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(t_f\right)Q_T\boldsymbol{x}\left(t_f\right)\tag{24}$$

2) 求解 Hamilton-Jacobi-Isaacs 泛函方程

为了求解方程 (23), 必须先对此方程右边进行极小、极大化运算, 求出控制量 $\boldsymbol{u}\left(t\right)$ 和 $\boldsymbol{v}\left(t\right)$, 即

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{u}}\left\{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{u}+\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}B_1\boldsymbol{u}\left(t\right)\right\}=0\\ &\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\left\{-\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}S\boldsymbol{v}+\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}B_2\boldsymbol{v}\left(t\right)\right\}=0\end{aligned}\tag{25}$$

求得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=-\frac{1}{2}R^{-1}{B_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M_x}\\ &\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}S^{-1}{B_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M_x}\end{aligned}\tag{26}$$

由非线性函数 $\boldsymbol{f}$ 统计线性化的结果, 代入式 (23) 得到:

$$\begin{aligned}&M_t+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{M_{\boldsymbol{xx}}gQ\left(t\right)g^{\mathrm{T}}\right\}+\\ &\left\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x}+\frac{1}{4}\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}B_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M_x}\ -\right.\\ &\frac{1}{4}\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}B_2S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M_x}+\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{f}_0+\\ &\left.N\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}B_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M_x}+\frac{1}{2}B_2S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M_x}\Big)\right\}=0\end{aligned}\tag{27}$$

化简得到:

$$\begin{aligned}&M_t+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{M_{\boldsymbol{xx}}gQ\left(t\right)g^{\mathrm{T}}\right\}+\\ &\left\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x}-\frac{1}{4}\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}B_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M_x}\ +\right.\\ &\frac{1}{4}\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}B_2S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M_x}+\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_0+\boldsymbol{M_x}^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{x}=0\end{aligned}\tag{28}$$

终止条件

$$M\left(t_f\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(t_f\right)Q_T\boldsymbol{x}\left(t_f\right)\tag{29}$$

由线性偏微分方程的特点, 假设方程的解为

$$M = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{x} + \Gamma_0 \tag{30}$$

则函数 M 关于时间、状态的偏微分方程和关于状态的二阶偏微分方程分别为

$$\begin{aligned} &M_t = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\dot{\Gamma}\boldsymbol{x} + 2\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_1\boldsymbol{x} + \dot{\Gamma}_0 \\ &\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}} = 2\Gamma\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{\Gamma}_1 \\ &M_{\boldsymbol{xx}} = 2\Gamma \end{aligned} \tag{31}$$

将式 (31) 代入式 (28), 得到:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\dot{\Gamma}\boldsymbol{x} + 2\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_1\boldsymbol{x} + \dot{\Gamma}_0 + \mathrm{tr}\left[\Gamma g Q(t) g^{\mathrm{T}}\right] + \\ &\Big\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x} - (\Gamma\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Gamma}_1)^{\mathrm{T}} B_1 R^{-1} B_1^{\mathrm{T}} (\Gamma\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Gamma}_1) + \\ &2(\Gamma\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Gamma}_1)^{\mathrm{T}} N\boldsymbol{x} + (\Gamma\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Gamma}_1)^{\mathrm{T}} B_2 S^{-1} B_2^{\mathrm{T}} \times \\ &(\Gamma\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Gamma}_1) + 2(\Gamma\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Gamma}_1)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_0\Big\} = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

进行整理, 得到:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\dot{\Gamma} + L - \Gamma B_1 R^{-1} B_1^{\mathrm{T}}\Gamma + \\ &\Gamma B_2 S^{-1} B_2^{\mathrm{T}}\Gamma + \Gamma N + N^{\mathrm{T}}\Gamma)\boldsymbol{x} + \\ &2(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_1 - \Gamma B_1 R^{-1} B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \Gamma B_2 S^{-1} B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \\ &{\boldsymbol{\Gamma}_1}^{\mathrm{T}} N + \Gamma\boldsymbol{f}_0)\boldsymbol{x} + \dot{\Gamma}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_1 B_2 S^{-1} B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 - \\ &\boldsymbol{\Gamma}_1 B_1 R^{-1} B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \\ &\mathrm{tr}\left\{\Gamma g Q(t) g^{\mathrm{T}}\right\} = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

对上式求无条件数学期望, 并考虑 $\boldsymbol{m}$ 的任意性, 若使式 (33) 成立, 则需满足:

$$\begin{aligned} &\dot{\Gamma} + \Gamma N + N^{\mathrm{T}}\Gamma - \Gamma B_1 R^{-1} B_1^{\mathrm{T}}\Gamma + \\ &\quad \Gamma B_2 S^{-1} B_2^{\mathrm{T}}\Gamma + L = 0 \\ &\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_1 + {\boldsymbol{\Gamma}_1}^{\mathrm{T}} N + \Gamma\boldsymbol{f}_0 - \Gamma B_1 R^{-1} B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \\ &\quad \Gamma B_2 S^{-1} B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 = 0 \\ &\dot{\Gamma}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 - \boldsymbol{\Gamma}_1 B_1 R^{-1} B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \\ &\quad \boldsymbol{\Gamma}_1 B_2 S^{-1} B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 + \mathrm{tr}\left\{\Gamma g Q(t) g^{\mathrm{T}}\right\} = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

边界条件

$$\Gamma(t_f) = Q_T, \quad \boldsymbol{\Gamma}_1(t_f) = 0, \quad \Gamma_0(t_f) = 0 \tag{35}$$

将 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}} = 2\Gamma\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{\Gamma}_1$ 代入式 (26), 得到双方最优策略为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u} = -R^{-1} B_1^{\mathrm{T}} (\Gamma\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Gamma}_1) \\ &\boldsymbol{v} = S^{-1} B_2^{\mathrm{T}} (\Gamma\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Gamma}_1) \end{aligned} \tag{36}$$

根据前面控制量的假设形式参数 K_1, K_2, $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{C}_2$ 分别为

$$\begin{cases} K_1 = -R^{-1} B_1^{\mathrm{T}}\Gamma, \quad \boldsymbol{C}_1 = -R^{-1} B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 \\ K_2 = S^{-1} B_2^{\mathrm{T}}\Gamma, \quad \boldsymbol{C}_2 = S^{-1} B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1 \end{cases} \tag{37}$$

而指标函数值为

$$\begin{aligned} &J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = M(\boldsymbol{x}(0), 0) = \\ &\quad \boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\Gamma(0)\boldsymbol{m} + \mathrm{tr}\{\Gamma(0) R\} + \\ &\quad 2\boldsymbol{\Gamma}_1(0)\boldsymbol{m} + \Gamma_0(0) \end{aligned} \tag{38}$$

□

注 1. 当此处 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = A\boldsymbol{x}$, 即为随机线性系统时, 得:

$$\hat{\boldsymbol{f}} = A\boldsymbol{m}, \quad N = A, \quad \boldsymbol{f}_0 = \hat{\boldsymbol{f}} - A\boldsymbol{m} = 0 \tag{39}$$

则统计线性化方程为

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}}(t) = N\boldsymbol{x}(t) + B_1(t)\boldsymbol{u} + B_2(t)\boldsymbol{v} + g\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{f}_0 = \\ &\quad A\boldsymbol{x}(t) + B_1(t)\boldsymbol{u} + B_2(t)\boldsymbol{v} + g\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \tag{40}$$

由于 $\boldsymbol{f}_0 = 0$ 并考虑伴随变量 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}$ 和状态变量 $\boldsymbol{x}$ 的线性关系, 则

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}} = 2\Gamma\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_1 = 0 \tag{41}$$

代入定理 1, 可得到:

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}_0 + \mathrm{tr}\left\{\Gamma g Q(t) g^{\mathrm{T}}\right\} = 0 \\ \Gamma_0(t_f) = 0 \end{cases} \tag{42}$$

通过积分

$$\Gamma_0(0) = \int_0^{t_f} \mathrm{tr}\left\{\Gamma g Q g^{\mathrm{T}}\right\} \mathrm{d}\tau$$

最后性能指标值为

$$\begin{aligned} &J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\Gamma(0)\boldsymbol{m} + \mathrm{tr}\{\Gamma(0) R\} + \\ &\quad \int_0^{t_f} \mathrm{tr}\left\{\Gamma g Q g^{\mathrm{T}}\right\} \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{43}$$

上述结果与随机线性系统的结果是完全一致的, 验证定理 1 是正确的.

3.2 控制量受约束情形

当控制量受约束时, 对饱和函数同样需要进行统计线性化. 定义两个紧集 (Compact set) U 和 V, 双方的控制量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别属于此集合, 即

$$\mathrm{Sat}(\boldsymbol{u}|U_0) = \begin{cases} \boldsymbol{u}, & \boldsymbol{u} \in U_0 \\ |U_0|\,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{u}), & \boldsymbol{u} \notin U_0 \end{cases} \tag{44}$$

$$\mathrm{Sat}\left(\boldsymbol{v}|V_0\right)=\begin{cases}\boldsymbol{v}, & \boldsymbol{v}\in V_0\\ |V_0|\,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{v}), & \boldsymbol{v}\notin V_0\end{cases}\tag{45}$$

其物理含义为: 当控制量 $\boldsymbol{u}$ (或 $\boldsymbol{v}$) 在集合 U (或 V) 内, 则控制为其本身; 当控制量 $\boldsymbol{u}$ (或 $\boldsymbol{v}$) 超越集合 U(或 V), 则取相应的边界值. 利用统计线性化原理对饱和函数 Sat 进行统计线性化, 得到:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{\boldsymbol{u}}=&U_0\left\{\Phi\left(\frac{U_0+m_{\boldsymbol{u}}}{\sigma_{\boldsymbol{u}}}\right)-\Phi\left(\frac{U_0-m_{\boldsymbol{u}}}{\sigma_{\boldsymbol{u}}}\right)\right\}+\\&m_{\boldsymbol{u}}\left\{\Phi\left(\frac{U_0+m_{\boldsymbol{u}}}{\sigma_{\boldsymbol{u}}}\right)+\Phi\left(\frac{U_0-m_{\boldsymbol{u}}}{\sigma_{\boldsymbol{u}}}\right)-1\right\}+\\&\frac{\sigma_{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left(-\frac{\left(U_0+m_{\boldsymbol{u}}\right)^2}{2\sigma_{\boldsymbol{u}}^2}\right)-\right.\\&\left.\exp\left(-\frac{\left(U_0-m_{\boldsymbol{v}}\right)^2}{2\sigma_{\boldsymbol{u}}^2}\right)\right\}\end{aligned}\tag{46}$$

$$N_{\boldsymbol{u}}=\Phi\left(\frac{U_0+m_{\boldsymbol{u}}}{\sigma_{\boldsymbol{u}}}\right)+\Phi\left(\frac{U_0-m_{\boldsymbol{u}}}{\sigma_{\boldsymbol{u}}}\right)-1\tag{47}$$

$$N_{\boldsymbol{v}}=\Phi\left(\frac{V_0+m_{\boldsymbol{v}}}{\sigma_{\boldsymbol{v}}}\right)+\Phi\left(\frac{V_0-m_{\boldsymbol{v}}}{\sigma_{\boldsymbol{v}}}\right)-1\tag{48}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{\boldsymbol{v}}=&V_0\left\{\Phi\left(\frac{V_0+m_{\boldsymbol{v}}}{\sigma_{\boldsymbol{v}}}\right)-\Phi\left(\frac{V_0-m_{\boldsymbol{v}}}{\sigma_{\boldsymbol{v}}}\right)\right\}+\\&m_{\boldsymbol{v}}\left\{\Phi\left(\frac{V_0+m_{\boldsymbol{v}}}{\sigma_{\boldsymbol{v}}}\right)+\Phi\left(\frac{V_0-m_{\boldsymbol{v}}}{\sigma_{\boldsymbol{v}}}\right)-1\right\}+\\&\frac{\sigma_{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left(-\frac{\left(V_0+m_{\boldsymbol{v}}\right)^2}{2\sigma_{\boldsymbol{v}}^2}\right)-\right.\\&\left.\exp\left(-\frac{\left(V_0-m_{\boldsymbol{v}}\right)^2}{2\sigma_{\boldsymbol{v}}^2}\right)\right\}\end{aligned}\tag{49}$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 为正态分布函数. 对局双方非线性饱和控制量通过统计线性化之后变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_s&=\hat{f}_{\boldsymbol{u}}+N_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}-m_{\boldsymbol{u}})=f_0^{\boldsymbol{u}}+N_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}_s&=\hat{f}_{\boldsymbol{v}}+N_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}-m_{\boldsymbol{v}})=f_0^{\boldsymbol{v}}+N_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}\end{aligned}\tag{50}$$

于是经过推导可以得到定理 2.

定理 2. 假设性能指标函数为 (2), 且双方的控制量满足约束条件 (44), 则非线性系统 (45) 的双方逼近最优策略和相应的对策逼近值分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=-\mathrm{sgn}\left\{R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\left(\Gamma\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Gamma}_1\right)\right\}\\\boldsymbol{v}&=\mathrm{sgn}\left\{S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\left(\Gamma\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Gamma}_1\right)\right\}\end{aligned}\tag{51}$$

$$\begin{aligned}J\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=&\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\Gamma\left(0\right)\boldsymbol{m}+\mathrm{tr}\left\{\Gamma\left(0\right)R\right\}+\\&2\boldsymbol{\Gamma}_1\left(0\right)\boldsymbol{m}+\Gamma_0\left(0\right)\end{aligned}\tag{52}$$

式中, 正定对称矩阵 Γ , 满足 Riccati 微分方程

$$\begin{cases}\dot{\Gamma}+N^{\mathrm{T}}\Gamma+\Gamma N+L+\\\quad\Gamma B_1^{\mathrm{T}}N_u^{\mathrm{T}}R^{-1}(N_u-2I)B_1\Gamma+\\\quad\Gamma B_2^{\mathrm{T}}N_v^{\mathrm{T}}S^{-1}(2I-N_v)B_2\Gamma=0\\\Gamma\left(t_f\right)=Q_T\end{cases}\tag{53}$$

向量 $\boldsymbol{\Gamma}_1$ 和标量 Γ_0 满足微分方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_1+\boldsymbol{\Gamma}_1N+\Gamma\boldsymbol{f}_0+\\\quad\boldsymbol{\Gamma}_1B_1N_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}R^{-1}(N_{\boldsymbol{u}}-2I)B_1^{\mathrm{T}}\Gamma+\\\quad\boldsymbol{\Gamma}_1B_2N_{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}S^{-1}(2I-N_{\boldsymbol{v}})B_2^{\mathrm{T}}\Gamma+\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}\right)^{\mathrm{T}}B_1\times\\\quad(I-N_{\boldsymbol{u}})\Gamma+\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}\right)^{\mathrm{T}}B_2(I-N_{\boldsymbol{v}})\Gamma=0\\\boldsymbol{\Gamma}_1\left(t_f\right)=0\end{cases}\tag{54}$$

$$\begin{cases}\dot{\Gamma}_0+\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}\right)^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}-\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}\right)^{\mathrm{T}}S\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+\\\quad2\boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{f}_0+\mathrm{tr}\left\{\Gamma gQ\left(t\right)g^{\mathrm{T}}\right\}+\boldsymbol{\Gamma}_1B_1^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{u}}{}^{\mathrm{T}}\times\\\quad R^{-1}(N_{\boldsymbol{u}}-2I)B_1\boldsymbol{\Gamma}_1+\ \boldsymbol{\Gamma}_1B_2^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{v}}{}^{\mathrm{T}}S^{-1}\times\\\quad(2I-N_{\boldsymbol{v}})B_2\boldsymbol{\Gamma}_1+2\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}\right)^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}(I-N_{\boldsymbol{u}})\times\\\quad\boldsymbol{\Gamma}_1+2\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}\right)^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}(I-N_{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{\Gamma}_1\ =0\\\Gamma_0\left(t_f\right)=0\end{cases}\tag{55}$$

式中, N 和 $\boldsymbol{f}_0$ 满足统计线性化方程

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}\left(t\right)=&N\boldsymbol{x}\left(t\right)+B_1K_1\boldsymbol{x}+B_2K_2\boldsymbol{x}+g\boldsymbol{\xi}+\\&\left(\hat{\boldsymbol{f}}-N\boldsymbol{m}\right)+B_1\boldsymbol{C}_1+B_2\boldsymbol{C}_2\end{aligned}\tag{56}$$

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{m}}\left(t\right)=\hat{\boldsymbol{f}}+(B_1K_1+B_2K_2)\boldsymbol{m}+\\\qquad B_1\boldsymbol{C}_1+B_2\boldsymbol{C}_2\\\boldsymbol{m}\left(t_0\right)=\boldsymbol{m}_0\end{cases}\tag{57}$$

$$\begin{cases}\dot{P}=\left(N+B_1K_1+B_2K_2\right)^{\mathrm{T}}P+\\\quad P\left(N+B_1K_1+B_2K_2\right)+gQg^{\mathrm{T}}\\P\left(t_0\right)=R_0\end{cases}\tag{58}$$

式中,

$$\begin{aligned}K_1&=-N_{\boldsymbol{u}}R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\Gamma\\\boldsymbol{C}_1&=\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}-N_{\boldsymbol{u}}R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1\\K_2&=N_{\boldsymbol{v}}S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\Gamma\\\boldsymbol{C}_2&=\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+N_{\boldsymbol{v}}S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1\end{aligned}\tag{59}$$

受约束控制量的统计线性化系数 $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{u}}$, $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{v}}$, $N_{\boldsymbol{u}}$ 和 $N_{\boldsymbol{v}}$ 满足式 (46) ∼ (50), 而 $m_{\boldsymbol{u}}$, $m_{\boldsymbol{v}}$, $\sigma_{\boldsymbol{u}}$ 和 $\sigma_{\boldsymbol{v}}$ 分别为

$$\begin{cases} m_{\boldsymbol{u}} = -R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\left(\Gamma\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\Gamma}_1\right) \\ \sigma_{\boldsymbol{u}} = R^{-1}B_1\Gamma P\Gamma B_1^{\mathrm{T}}R^{-\mathrm{T}} \end{cases} \tag{60}$$

$$\begin{cases} m_{\boldsymbol{v}} = S^{-1}{B_2}^{\mathrm{T}}\left(\Gamma\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\Gamma}_1\right) \\ \sigma_{\boldsymbol{v}} = S^{-1}B_2\Gamma P\Gamma {B_2}^{\mathrm{T}}S^{-\mathrm{T}} \end{cases} \tag{61}$$

证明. 同样利用随机动态规划法分两步进行证明

1) 构造 Hamilton-Jacobi-Isaacs 泛函方程 (此步骤与定理 1 证明相同)

2) 求解 Hamilton-Jacobi-Isaacs 泛函方程

先对此方程右边进行极小、极大化运算, 分情况进行讨论分析:

当极大值在区域 U 内达到, 则有:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{u}}\left\{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{u}+{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}}^{\mathrm{T}}B_1\boldsymbol{u}\left(t\right)\right\}=0 \tag{62}$$

从而, 得:

$$\boldsymbol{u}=U_0\mathrm{sgn}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{R}^{-1}{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right)$$

当极大值在区域 U 边界上达到, 则有:

$$\boldsymbol{u}=U_0\mathrm{sgn}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{R}^{-1}{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right)$$

综上两种情形, 可得:

$$\boldsymbol{u}=-\mathrm{Sat}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right\} \tag{63}$$

同理, 可得:

$$\boldsymbol{v}=\mathrm{Sat}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{S}^{-1}{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right\} \tag{64}$$

根据饱和函数的统计线性化, 得到:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}+N_u\left(-\frac{1}{2}R^{-1}{B_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right) \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+N_v\left(\frac{1}{2}S^{-1}{B_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right) \end{aligned} \tag{65}$$

由非线性函数 $\boldsymbol{f}$ 统计线性化的结果

$$\boldsymbol{f}=\hat{\boldsymbol{f}}-N\boldsymbol{m}+N\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}_0+N\boldsymbol{x} \tag{66}$$

将式 (65) 和 (66) 代入方程 (23), 得:

$$\begin{aligned} & M_t+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{M_{\boldsymbol{xx}}gQ\left(t\right)g^{\mathrm{T}}\right\}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x}+ \\ & \left[\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}+N_{\boldsymbol{u}}\left(-\frac{1}{2}R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right)\right]^{\mathrm{T}}R \\ & \left[\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}+N_{\boldsymbol{u}}\left(-\frac{1}{2}R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right)\right]- \\ & \left[\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+N_{\boldsymbol{v}}\left(\frac{1}{2}S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right)\right]^{\mathrm{T}}S \\ & \left[\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+N_{\boldsymbol{v}}\left(\frac{1}{2}S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right)\right]+ \\ & {\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}}^{\mathrm{T}}\Bigg\{\boldsymbol{f}_0+N\boldsymbol{x}+B_1\times \\ & \left[\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}+N_{\boldsymbol{u}}\left(-\frac{1}{2}R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right)\right]+ \\ & B_2\left[\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+N_{\boldsymbol{v}}\left(\frac{1}{2}S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}\right)\right]\Bigg\}=0 \end{aligned} \tag{67}$$

$$M\left(t_f\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(t_f\right)Q_T\boldsymbol{x}\left(t_f\right) \tag{68}$$

由线性偏微分方程的特点, 假设方程的解为

$$M=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Gamma\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{x}+\Gamma_0 \tag{69}$$

则有

$$\begin{aligned} & M_t=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\dot{\Gamma}\boldsymbol{x}+2\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_1\boldsymbol{x}+\dot{\Gamma}_0 \\ & \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}=2\Gamma\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{\Gamma}_1 \\ & M_{\boldsymbol{xx}}=2\Gamma \end{aligned} \tag{70}$$

将式 (70) 代入式 (67), 得:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\dot{\Gamma}+L+\Gamma N+N^{\mathrm{T}}\Gamma+ \\ & \Gamma B_1^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}R^{-1}(N_{\boldsymbol{u}}-2I)B_1\Gamma+ \\ & \Gamma B_2^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}S^{-1}(2I-N_{\boldsymbol{v}})B_2\Gamma)\boldsymbol{x}+ \\ & 2\boldsymbol{x}\Big\{\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_1+\boldsymbol{\Gamma}_1N+\boldsymbol{\Gamma}_1B_1^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{u}}^{T}R^{-1}\times \\ & (N_{\boldsymbol{u}}-2I)B_1\Gamma+\boldsymbol{\Gamma}_1B_2^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}S^{-1}\times \\ & (2I-N_{\boldsymbol{v}})B_2\Gamma+\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}\right)^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}\times \\ & (I-N_{\boldsymbol{u}})\Gamma+\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}\right)^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}(I-N_{\boldsymbol{v}})\Gamma+ \\ & 2\Gamma\boldsymbol{f}_0\Big\}+\dot{\Gamma}_0+\mathrm{tr}\left\{\Gamma gQ\left(t\right)g^{\mathrm{T}}\right\}+ \\ & \left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}\right)^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}-\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}\right)^{\mathrm{T}}S\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+2\boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{f}_0+ \\ & \boldsymbol{\Gamma}_1B_1^{\mathrm{T}}N_u^{\mathrm{T}}R^{-1}(N_{\boldsymbol{u}}-2I)B_1\boldsymbol{\Gamma}_1+ \\ & \boldsymbol{\Gamma}_1B_2^{\mathrm{T}}N_v^{\mathrm{T}}S^{-1}(2I-N_{\boldsymbol{v}})B_2\boldsymbol{\Gamma}_1+ \\ & 2\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}\right)^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}(I-N_{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{\Gamma}_1+ \\ & 2\left(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}\right)^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}(I-N_{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{\Gamma}_1\quad=0 \end{aligned} \tag{71}$$

对上式求无条件数学期望, 并考虑 $\boldsymbol{m}$ 的任意性, 得:

$$\begin{aligned}&\dot{\Gamma}+L+\Gamma N+N^{\mathrm{T}}\Gamma+\\&\Gamma B_1^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}R^{-1}(N_{\boldsymbol{u}}-2I)B_1\Gamma+\\&\Gamma B_2^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}S^{-1}(2I-N_{\boldsymbol{v}})B_2\Gamma=0\end{aligned}\tag{72}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_1+\boldsymbol{\Gamma}_1N+\boldsymbol{\Gamma}_1B_1^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}R^{-1}(N_{\boldsymbol{u}}-2I)B_1\Gamma+\\&\boldsymbol{\Gamma}_1B_2^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}S^{-1}(2I-N_{\boldsymbol{v}})B_2\Gamma+2\Gamma\boldsymbol{f}_0+\\&(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}B_1{}^{\mathrm{T}}(I-N_{\boldsymbol{u}})\Gamma+\\&(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}})^{\mathrm{T}}B_2{}^{\mathrm{T}}(I-N_{\boldsymbol{v}})\Gamma=0\end{aligned}\tag{73}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\Gamma}_0+\mathrm{tr}\left\{\Gamma gQ\left(t\right)g^{\mathrm{T}}\right\}+(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}-\\&(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}})^{\mathrm{T}}S\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+2\boldsymbol{\Gamma}_1\boldsymbol{f}_0+\\&\boldsymbol{\Gamma}_1B_1^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}R^{-1}(N_{\boldsymbol{u}}-2I)B_1\boldsymbol{\Gamma}_1+\\&\boldsymbol{\Gamma}_1B_2^{\mathrm{T}}N_{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}S^{-1}(2I-N_{\boldsymbol{v}})B_2\boldsymbol{\Gamma}_1+\\&2(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}B_1{}^{\mathrm{T}}(I-N_{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{\Gamma}_1+\\&2(\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}})^{\mathrm{T}}B_2{}^{\mathrm{T}}(I-N_{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{\Gamma}_1\ =0\end{aligned}\tag{74}$$

边界条件

$$\Gamma\left(t_f\right)=Q_T,\boldsymbol{\Gamma_1}\left(t_f\right)=0,\Gamma_0\left(t_f\right)=0\tag{75}$$

得到双方最优策略为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=-\mathrm{Sat}\left\{\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}_1^{\mathrm{T}}\left(\Gamma\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Gamma}_1\right)\right\}\\\boldsymbol{v}&=\mathrm{Sat}\left\{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{B}_2^{\mathrm{T}}\left(\Gamma\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Gamma}_1\right)\right\}\end{aligned}\tag{76}$$

对式 (75) 进行统计线性化, 得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}+N_{\boldsymbol{u}}\left(-R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\left(\Gamma\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Gamma}_1\right)\right)\\\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+N_{\boldsymbol{v}}\left(S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\left(\Gamma\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Gamma}_1\right)\right)\end{aligned}\tag{77}$$

根据前面控制量的假设形式, 得到系数:

$$\begin{aligned}K_1&=-N_{\boldsymbol{u}}R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\Gamma\\\boldsymbol{C}_1&=\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}-N_{\boldsymbol{u}}R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1\\K_2&=N_{\boldsymbol{v}}S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\Gamma\\\boldsymbol{C}_2&=\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}+N_{\boldsymbol{v}}S^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_1\end{aligned}\tag{78}$$

而指标函数值为

$$\begin{aligned}J\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=&\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\Gamma\left(0\right)\boldsymbol{m}+\mathrm{tr}\left\{\Gamma\left(0\right)R\right\}+\\&2\boldsymbol{\Gamma}_1\left(0\right)\boldsymbol{m}+\Gamma_0\left(0\right)\end{aligned}\tag{79}$$

□

注 2. 当控制量无约束时, 根据式 (76) 可得:

$$\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{v}}=0,\quad N_{\boldsymbol{u}}=N_{\boldsymbol{v}}=I\tag{80}$$

将式 (76) 代入定理 2, 则得到定理 2 等同于定理 1.

4 数值仿真

考虑如下非线性对策系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\xi$$

其中, 初始状态 $x_0\sim\mathrm{N}\left(2,1\right)$, 系统高斯白噪声 $\xi\sim\mathrm{N}\left(0,0.01\right)$, 考虑性能指标

$$\begin{aligned}J\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\mathrm{E}\Bigg\{&4\boldsymbol{x}^2\left(t_f\right)+\\&\int_0^3\left(2\boldsymbol{x}^2+0.1\boldsymbol{u}^2-0.3\boldsymbol{v}^2\right)\mathrm{d}\tau\Bigg\}\end{aligned}$$

根据控制量是否受约束, 分两种情况进行仿真研究.

仿真 1. 控制量无约束情形将系统非线性函数进行统计线性化, 得到:

$$\hat{f}=m^2+P$$

将仿真步长设为 0.01 秒, 具有统计线性化参数的 Riccati 微分方程的数值解 Γ 如图 1 所示, $\boldsymbol{\Gamma}_1$ 的解如图 2 所示.

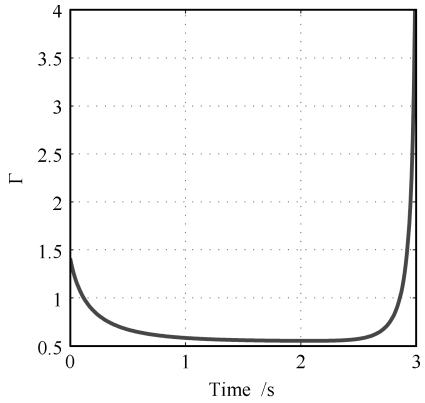


图 1 Γ 的数值解曲线

Fig. 1 The numerical value of Γ

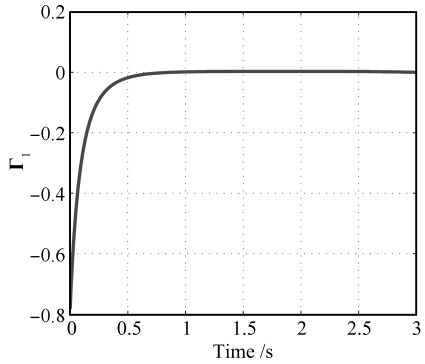


图 2 $\boldsymbol{\Gamma}_1$ 的数值解曲线

Fig. 2 The numerical value of $\boldsymbol{\Gamma}_1$

从图 1 中可以看出, 非线性系统 Riccati 微分方程的解与线性系统 Riccati 微分方程的解有本质的区别, 其曲线变化趋势不表现为某一常值状态的稳态解, 而与非线性函数的具体形式有关. 对局双方的控制量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 如图 3 所示.

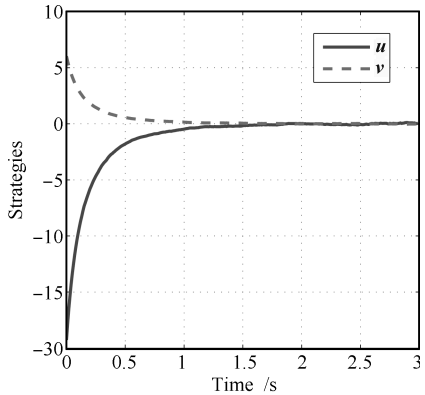


图 3　双方控制策略曲线

Fig. 3　The strategy curves of both players

系统状态曲线如图 4 所示, 统计线性化中状态均值和方差如图 5 所示.

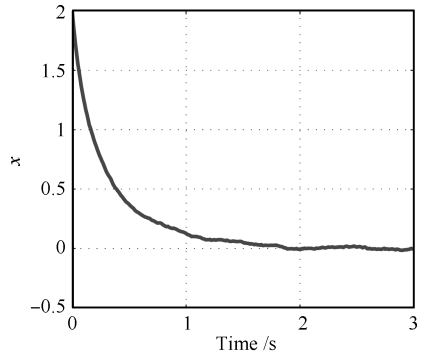


图 4　系统状态变化曲线图

Fig. 4　The system′s state

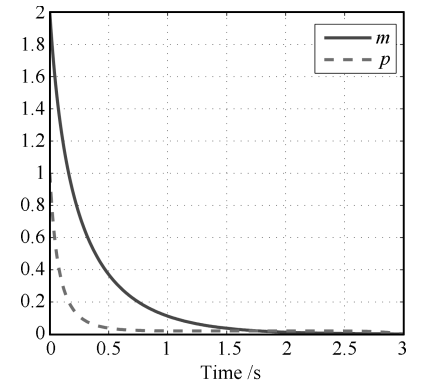


图 5　统计线性化均值和方差曲线

Fig. 5　The mean and covariance of statistical linearization

仿真 2. 控制量受约束情形

参照控制量无约束情形时双方控制量的大小, 这里假设双方控制量约束 $U_0 = 15, V_0 = 5$

由定理 2 所述的两点边值问题得到 Riccati 方程的数值解如图 6 和图 7 所示.

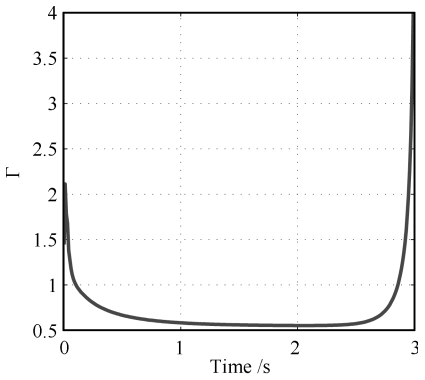


图 6　Γ 的数值解曲线

Fig. 6　The numerical value of Γ

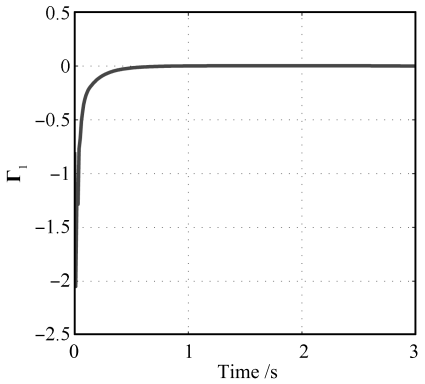


图 7　$\boldsymbol{\Gamma}_1$ 的数值解曲线

Fig. 7　The numerical value of $\boldsymbol{\Gamma}_1$

系统双方的控制量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 如图 8 所示, 饱和控制系数 $N_{\boldsymbol{u}}$ 和 $N_{\boldsymbol{v}}$ 的变化情况如图 9 所示.

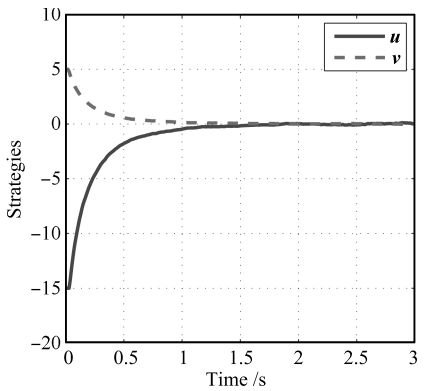


图 8　双方控制策略曲线

Fig. 8　The strategy curves of both players

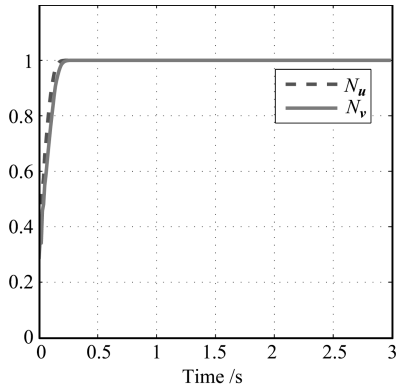


图 9 控制系数 $N_{\boldsymbol{u}}$ 和 $N_{\boldsymbol{v}}$ 变化曲线

Fig. 9 The curves of parameters $N_{\boldsymbol{u}}$ and $N_{\boldsymbol{v}}$

从图 8 中可以看出, 双方的控制量均限制在己方的允许范围内, 在初始时刻双方均达到饱和控制, 此时饱和控制系数 $N_{\boldsymbol{u}}$ 和 $N_{\boldsymbol{v}}$ 的大小如图 9 所示, 其表现为实际控制量与理想需要控制量幅值的比值, $N_{\boldsymbol{u}}$ 和 $N_{\boldsymbol{v}}$ 均小于 1.

5 结论

本文将统计线性化方法应用到随机非线性微分对策中, 利用随机动态规划法推导了随机非线性微分对策逼近最优策略的控制算法, 该算法中包含统计线性化变量在内的 Riccati 微分方程, 此微分方程的解与线性系统 Riccati 微分方程的解有本质的区别, 解的曲线变化趋势不表现为某一常值状态的稳态解, 而与非线性函数的具体形式有关; 通过对饱和函数进行统计线性化, 可获得控制量受约束情形的随机非线性微分对策逼近最优策略的解析表达式, 此表达式中含有饱和控制系数 $N_{\boldsymbol{u}}$ 和 $N_{\boldsymbol{v}}$, 其大小表现为实际控制量与理想需要控制量幅值的比值.

References

1 Bardi M, Raghavan T E S, Parthasarathy T. *Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods*. Berlin: Birkhäuser, 1999. 69−177

2 Lewis F L, Syrmos V L. *Optimal Control* (Second edition). New Jersey: Wiley, 1995. 30−52

3 Crandall M G, Lions P L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Transactions on Mathematical Software*, 1983, **277**(1): 1−42

4 Subbotin A I. Existence and uniqueness results for Hamilton-Jacobi equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1991, **16**(7−8): 683−689

5 Sinar J, Farber N. Nonlinear zero-sum differential game analysis by singular perturbation methods, Technical Memorandum 84271, NASA, USA, 1982. 1−14

6 Bardi M, Falcone M, Soravia P. Fully discrete schemes for the value function of pursuit-evasion games. *Annals of Dynamic Games*. Boston: Birkhäuser, 1993. 66−74

7 Plumer E S. Optimal control of terminal processes using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1996, **7**(2): 408−418

8 Zhou X Y. Deterministic near optimal control, part 1: necessary and sufficient conditions for near-optimality. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1995, **85**(2): 473−488

9 Huang J H, Li X, Wang G C. Near-optimal control problems for linear forward-backward stochastic systems. *Automatica*, 2010, **46**(2): 397−404

10 Cheng D Z, Hu X M, Shen T L. *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Beijing: Science Press, 2010. 1−20

11 Huber M F. Adaptive Gaussian mixture filter based on statistical linearization. In: Proceedings of the 14th International Conference on Information Fusion (FUSION). Chicago, IL: IEEE, 2011. 1−8

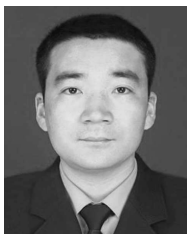
12 Geist M, Pietquin O. Statistically linearized least-squares temporal differences. In: Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT 2010). Moscow, Russia: IEEE, 2010. 450−457

13 Geist M, Pietquin O. Statistically linearized recursive least squares. In: Proceedings of the 2010 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing. Kittila, Finland: IEEE, 2010. 272−276

14 Fang Yang-Wang. *Optimal Control for Stochastic Systems*. Beijing: Tsinghua University and Springer, 2005. 27−33 (方洋旺. 随机系统最优控制. 北京: 清华大学出版社, 2005. 27−33)

15 Chemyshov K R. Statistical linearization based on the maximal correlation. In: Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Moscow, Russia: IEEE, 2007. 29−36

16 Wang X S, Xie H. Simulation of covariance analysis describing equation technique (CADET) in missile hit probability calculation. In: Proceedings of the 2010 6th International Conference on Natural Computation (ICNC 2010). Yantai, China: IEEE, 2010. 4282−4285

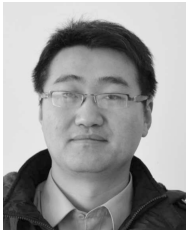


张 平 中国人民解放军 95889 部队工程师. 分别于 2006 年, 2009 年, 2012 年获得空军工程大学学士、硕士和博士学位. 主要研究方向为微分对策控制, 非线性系统控制. 本文通信作者.
E-mail: zhpbest2010@163.com
(**ZHANG Ping** Engineer at Unit 95889, PLA. He received his bachelor, master and Ph. D. degrees from Air Force Engineering University, Xi′an in 2006, 2009 and 2012, respectively. His research interest covers differential games, nonlinear system control. Corresponding author of this paper.)

方洋旺 空军工程大学教授. 1998 年获得西安交通大学控制科学与工程博士学位. 主要研究方向为非线性系统, 随机最优控制与应用和信号处理.
E-mail: ywfang2008@sohu.com
(**FANG Yang-Wang** Professor at Air Force Engineering University. He received his Ph. D. degree from Xi′an Jiaotong University in 1998. His research interest covers nonlinear systems, stochastic optimal control theory and application, and signal processing.)

惠晓滨 空军工程大学教授. 2003 年获得空军工程大学系统工程专业博士学位. 主要研究方向为非线性系统, 数据建模与分析, 体系效能仿真评估.
E-mail: blue-seaing@126.com
(**HUI Xiao-Bin** Professor at Air Force Engineering University. He received his Ph. D. degree from Air Force Engineering University in 2003. His research interest covers nonlinear systems, data modeling and analysis, system simulation and efficiency evaluation.)

刘新爱 中国人民解放军 95889 部队高级工程师. 2005 年获得空军工程大学航空推进理论与工程专业硕士学位. 主要研究方向为装备试验与鉴定.
E-mail: lxa2005@163.com
(**LIU Xin-Ai** Senior engineer at Unit 95889, PLA. She received her master degree from Air Force Engineering University in 2005. Her research interest covers equipment evaluation and test.)



李 亮 中国人民解放军 95889 部队工程师. 2004 年获得空军工程大学导弹控制与测试专业学士学位. 主要研究方向为装备试验与鉴定, 制导与控制.
E-mail: 85654809@163.com
(**LI Liang** Engineer at Unit 95889, PLA. He received his bachelor degree from Air Force Engineering University in 2004. His research interest covers equipment evaluation and test, missile guidance and control.)