# 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战

陈关荣 [1]

**摘 要** 以漫谈的方式讨论复杂动态网络环境下传统控制理论所遇到的一些新问题与新挑战. 具体地, 本文首先介绍现代网络科学与工程的背景, 然后讨论复杂动态网络的牵制控制、有向复杂网络的能控性以及 "网络的网络" 的建模与控制等三个方面的相关科学研究问题.

**关键词** 复杂动态网络, 有向网络, 牵制控制, 能控性, 同步

**引用格式** 陈关荣. 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战. 自动化学报, 2013, **39**(4): 312−321

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00312

## Problems and Challenges in Control Theory under Complex Dynamical Network Environments

CHEN Guan-Rong[1]

**Abstract** This article addresses some new problems and challenges faced by the conventional control theory under complex dynamical network environments. After introducing the network science and engineering background, it discusses some research issues regarding pinning control of complex dynamical networks, controllability of directed networks, as well as "network of networks" and its modeling and control.

**Key words** Complex network, directed network, pinning control, controllability, synchronization

**Citation** Guan-Rong Chen. Problems and challenges in control theory under complex dynamical network environments. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 312−321

应该说, 探讨动态网络环境下的控制理论并不是一个新问题; 经典的反馈控制框图 (图 1) 所代表的一般系统结构本身就是一个动态网络. 这里 "动态" 一词主要指其节点由动力系统构成, 因而自始至终处于某种动态过程之中. 本文的着眼点是 "复杂动态网络" 环境下的控制理论, 即着重讨论比图 1 的结构更复杂的动态网络的一些控制理论相关问题. 这里, "复杂" 一词没有明确的数学定义, 也不打算给出具体定义, 或许根本就不能严格定义. 粗略地说, 一个动态网络可以被认为是复杂的, 如果它是大规模的 (有许多节点和许多连边)、高维的 (节点是高维动力系统、连边含有多个状态分量)、以非确定或非规则的方式连接在一起的 (例如形成随机结构、小世界结构、无标度结构), 特别是带有非线性 (对节点动力系统和耦合方式而言)、时变发展形式 (例如增长、演化、脉冲、时滞)、甚至带有不同时间或空间尺度等等. 这种描述说不上是严格定义, 例如规模多大算是大规模、维数多高算是高维都没有也不可能事先严格地界定, 只能视具体问题相对而言. 不过, 对于通常的工程科学研究来说, 这个 "复杂动态网络" 的概念应该是可以接受也是可以操作的.

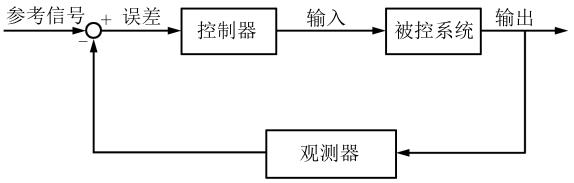



图 1 反馈控制框图

Fig. 1 Block diagram for feedback control

网络与控制在发展过程中逐渐互相交错融合. 今天, 控制理论越来越多地关注和研究如何去控制网络 (如电力网、交通网) 以及研究如何利用网络来做控制 (如网络化控制). 越来越多的大型控制系统中嵌入各种子网络 (如通信网、以太网、传感网); 另一方面, 许多大规模的网络中都嵌入有各种各样的控制器. 不过, 传统的控制理论过分侧重于单个高维系统的控制问题和方法, 对复杂动态网络特别是多节点不规则连接的有向网络没有给予足够的注意, 相关的研究和结果非常罕见. 这当然有它的历史和技术原因, 那时候没有像今天无处不在的互联网、无

收稿日期 2011-10-31 录用日期 2012-11-08
Manuscript received October 31, 2011; accepted November 8, 2012
本文为黄琳院士约稿
Recommended by Academician HUANG Lin
1. 香港城市大学电子工程系 香港 220
1. Department of Electronic Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong 220
该文的英文版同时发表在 *Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 4, pp. 312−321, 2013.

线通信网、综合电力网、全球一体化交通网、生物神经网络和基因调控网等等这些复杂动态网络的背景和需求, 也没有像今天廉价普及的大型高速计算机、巨型数据库以及 GPS 和云计算手段等设备与资源.

值得指出的是, 一般来说, 一个复杂动态网络并不能简单地通过提高维数而转化为单个超高维的巨系统而加以控制和处理, 尤其是有向网络和演化网络、以不同时空尺度耦合在一起的以及对其内部结构需要作精细分析和计算的各种不规则网络. 事实上, 复杂动态网络本身已经形成了一个专门的科学与工程领域或分支, 需要独立地进行研究. 下面进一步展开的讨论将会提供更具体的材料来支撑这个说法, 因为将要讨论的几乎所有的问题都不是在传统巨型系统的框架下能够加以描述和探讨的 (图 2).

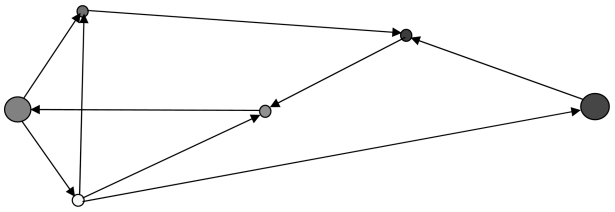


图 2　有向动态网络

Fig. 2　An illustrative directed dynamical network

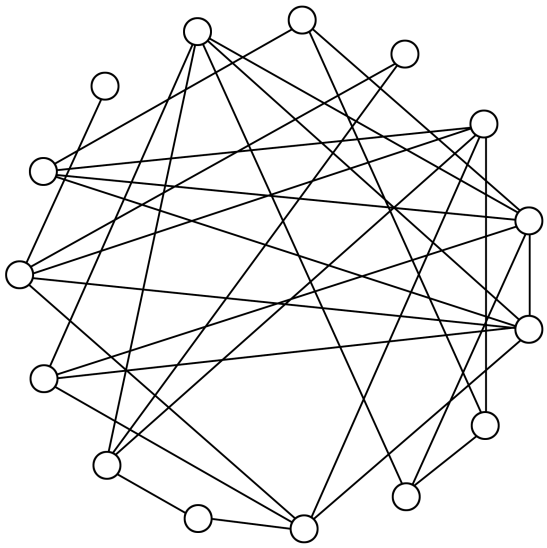
今天, 复杂网络科学与工程蓬勃发展, 给传统的控制理论带来了新的机遇, 但也带来了新的问题和挑战. 本文针对这种现状, 漫谈如下的几个方面: 复杂动态网络的牵制控制、有向复杂动态网络的能控性理论以及 "网络的网络" 的建模与控制. 鉴于篇幅所限, 不能面面俱到, 但希望能够抛砖引玉, 为读者提供一些参考并引起进一步的思考和讨论.

## 1　现代网络科学与工程

网络科学可以认为是从 1736 年 Euler 解决了著名的 Königsberg 七桥问题从而建立了数学图论[1] 开始, 以 Erdös 在 1960 年前后建立起严格的数学随机图论[2] 为第二个里程碑. 1998 年, Watts 等在 *Nature* 上发表了小世界网络模型[3] 以及 1999 年 Barabási 等在 *Science* 发表了无标度网络模型[4], 成为网络科学研究历史上的新里程碑, 掀起了网络科学与工程研究的新热潮. 时至今日, 网络科学与工程已经自成一体, 形成了一个相对独立的学科, 目前尚有方兴未艾之发展趋势.

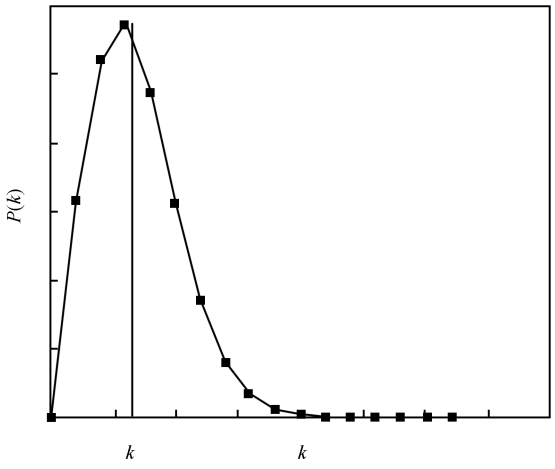
作为背景, 本文首先简单地介绍上面所提到的三个最有代表性的复杂网络模型, 即随机图网络、小世界网络和无标度网络模型.

随机图网络模型描述如下: 作为初始条件, 给定 $N$ 个离散的节点. 对所有存在的节点对, 以概率 $p \in [0,1]$ 用连线把它们连接起来. 这个过程中, 不重复也不遗漏所有可能的节点对. 完成后所得到的网络就是一个随机图. 显然, 每次这种操作结束时所产生的随机图网络是不完全一样的. 但是, 从统计意义上来说, 所有这些结果网络都具有很多共性, 而且对大量这种重复操作的结果进行平均的话, 则平均结果非常具代表性. 这种类型的网络其规模是固定的 (节点个数为 $N$, 连边条数的期望值为 $pN(N-1)/2$), 各个节点具有连边的条数 (称为该节点的度) 大体上也是差不多的, 因而这类网络整体结构都比较均匀, 而且节点度的分布可以证明是服从泊松分布的 (图 3).



(a) 例子

(a) An example




(b) 节点度 $k$ 的泊松分布

(a) Poisson distribution of node degree $k$

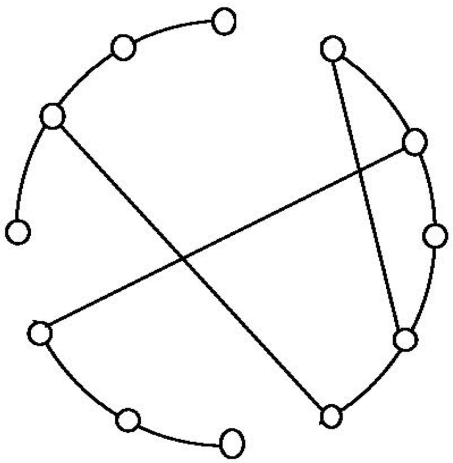
图 3　随机图网络

Fig. 3　Random-graph network

小世界网络模型描述如下: 作为初始条件, 给定 $N$ 个节点的一个环形网络. 对环上所有两两相连的节点对, 依次随机地选取连线的一端, 以概率 $p \in [0,1]$ 把它们之间原有的连线的另一端断开, 然后把连线的断端连接到从环中随机选取的第三点上去. 这个 "重新布线" 的过程中, 不重复也不遗漏原来环上所有相连的节点对, 另外在与第三点相连时丢弃所有因此而产生的重边和自环. 完成后所得到的网络是一个 Watts-Strogatz 小世界网络[3]. 这种网络的规模也是固定的 (节点个数为 $N$, 开始时环形网络上原有的连边条数保持不变), 各个节点的度大体上是也差不多的, 其节点度分布也是服从泊松分布的. 但是, 这种网络有两个显著的特点: 它的平均节点距离很短, 平均聚类系数 (每个节点的所有邻居节点之间互相连接的稠密程度) 很大. 特别是, 后者是随机图网络所没有的. 这两个特性一起就定义了所谓的小世界特性, 即不管网络的规模有多大, 其节点彼此之间是 "很靠近" 的. 另一种小世界网络模型, 称为 Newman-Watts 小世界网络[5], 是在给定 $N$ 个节点的环形网络上直接作随机图生成的处理, 即对所有环上原来存在但不相连的节点对, 以概率 $p \in [0,1]$ 用连线把它们连接起来. 在这个过程中, 不重复也不遗漏所有可能的这种节点对, 并且丢弃因此而产生的重边和自环 (图 4).

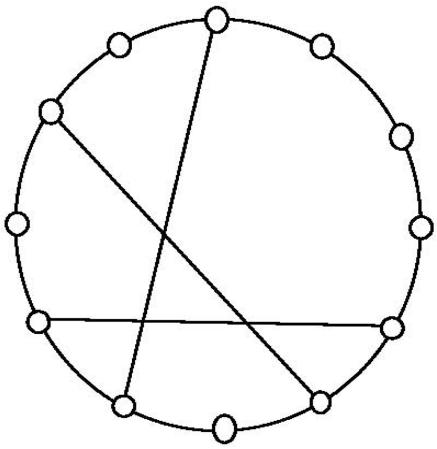
无标度网络模型描述如下: 作为初始条件, 给定含有 $m_0$ 个节点的一个全连接网络. 每一步, 增加一个新节点, 并且新节点带进 $m$ ($m \le m_0$) 条新连边. 每一条新连边与所有已经存在的老节点同时地以概率 $p$ 相连接, 其中 $p$ 正比于该老节点的度数 (因此, 度数较大的节点有较高的可能性与新节点建立新的连接, 于是在网络增长的过程中其度数会变得愈来愈大; 这一过程刻画了 "富者愈富" 的现象). 同样, 排除所有可能产生的重边. 这种网络的规模是增长的, 而且少量的节点有很高的度数但大量的节点的度数都很低, 从而结果网络的整体结构极不均匀. 同时, 网络节点度的分布可以证明是服从幂律分布的, 而且这个幂律公式与网络的规模 (尺度) 无关, 即在网络增长的过程中任何时刻去计算它的节点度分布其结果的幂律基本上都是不变的. 因此, 这种网络称为是无标度网络 (图 5).

近年来, 大量的实证研究发现, 现实世界中的许多网络, 包括物理、生物、计算机、通信、电网、交通、金融、社会、军事等领域中的各类网络, 从连接结构特性来看, 都是小世界或无标度网络[6−7]. 基于这个事实, 在复杂动态网络环境和条件下做控制理论与控制工程就不但十分自然, 而且十分重要了.



(a) Watts-Strogatz 小世界网络

(a) Watts-Strogatz small-world network



(b) Newman-Watts 小世界网络

(b) Newman-Watts small-world network

图 4 两种小世界网络模型

Fig. 4 Two small-world network models

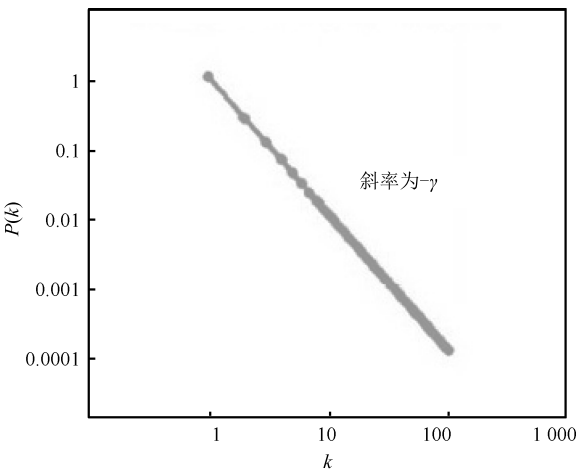



图 5 无标度网络节点度 $k^{-\gamma}$ 的幂分布 (双对数图)

Fig. 5 Scale-free network with power-law degree distribution $k^{-\gamma}$ (log-log plot)

## 2　复杂网络的牵制控制

牵制控制 (Pinning control) 是一种控制策略[1, 8−9]. 为了介绍这个概念, 我们不妨先从两个生物例子谈起.

第一个例子是线虫 (C. elegans). 这是一种寄生虫, 因为其体内的神经网络结构相当简单, 目前对它的认识比较清楚, 因而生物学研究中经常用它来做实验对象. 线虫的神经网络有大约 300 个神经元和 2 400 条神经连接线. 通过刺激 (控制) 多少个神经元就可以影响到线虫全身的整个神经网络呢? 答案是平均约 49 个[10], 约占神经元总个数的 17 %.

第二个例子是鱼群和蜂群. 它们经常因为食物来源的变化而到处迁移. 观察发现[11]: "鱼群中只有很少的个体知道目标在哪里, 但它们就能影响到整个大鱼群的觅食迁徙. $\cdots$ 类似地, 蜂群中相当少的个体 (约 5 %) 就能引导整个群体飞到新的巢穴里去".

从控制论的角度来看, 可以把这 17 % 的神经元和 5 % 的蜜蜂看作为被控的少量个体, 通过控制它们便可以达到控制整个网络或群体的目的. 这种控制策略当然是十分经济的. 问题是: 对于一个给定的群体, 要实现某个特定目标到底需要选择多少个被控对象个体? 选取哪些个体? 回答这类问题的理论和方法就是所谓的 "牵制控制", 即 "牵一发以动全身" 的控制策略.

现在更明确地来考虑如下的理论问题: 给定一个以某种 (如小世界) 方式、有方向地把多个高维非线性动力系统 (状态节点) 连接起来的网络, 给定一项控制任务 (例如: 实现网络同步), 设定一个控制目标 (例如: 时间最优、能量最优、或表现最好比如振荡最小), 并假定允许使用某类特定的控制器 (例如: 线性状态反馈控制器). 在这个网络框架上, 控制论提出的问题是: 需要设计和使用多少个指定类型的控制器? 应该把这些控制器放置在哪些节点上 (即: 对哪些节点进行牵制控制)? 另一个 (对偶的) 控制论问题是: 假定由于可放置控制器位置的经济成本或物理条件受到约束, 因而允许使用控制器的数量受到一定的限制; 那么, 设计哪种类型的控制器才能工作? 把这些控制器放置在哪些节点上最有效? 显然, 对上述问题的回答依赖于给定网络的不同结构 (规则网络、随机图网络、小世界网络、无标度网络、$\cdots$) 和节点上的不同动力系统 (非线性、脉冲、混合、$\cdots$). 容易想象, 还有一些类似的问题可以提出来, 大都是以前考虑单个高维动力系统的控制时不会提出、实际上也不存在的新问题.

上述例子以及下面将要谈到的其他例子解释了本文题目 "复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战" 的含义.

为了更具体地描述和分析我们在这里遇到的复杂动态网络控制理论新问题, 现在以网络同步 (Synchronization) 的牵制控制为例子展开讨论[12]. 为简单起见, 仅考虑一个由 $N$ 个相同的节点构成的无权无向连通网络, 其中第 $i$ 个状态节点的动力方程及其耦合形式为

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Gamma x_j,\ \ i = 1, 2, \cdots, N$$

这里, $x_i \in \mathbf{R}^n$ 为节点 $\Gamma$ 的状态变量; $f(\cdot)$ 为满足 Lipschitz 条件的连续 (非线性) 函数, 并假定具有不动点 $s : f(s) = 0$; 常数 $c > 0$ 为网络的耦合强度; $\Gamma$ 为各个节点状态变量之间的内部耦合矩阵; 外部耦合矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N\times N}$ 是对称的, 定义如下: 若节点 $i$ 和节点 $j$ $(i \neq j)$ 之间有连接, 则 $a_{ij} = a_{ji} = 1$, 否则 $a_{ij} = a_{ji} = 0$; 对角元素定义为

$$a_{ii} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} a_{ij} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} a_{ji} = -k_i,\quad i = 1, 2, \cdots, N$$

这里, $k_i$ 为节点 $i$ 的度.

矩阵 $L = -A$ 称为上述网络的 Laplace 矩阵, 它有且仅有一个重数为 1 的零特征根, 而其余的特征根均为正实数: $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$.

各种各样的网络都可以用上面这个网络状态方程式和耦合形式准确地表示出来. 或者反过来说, 通过适当选取节点之间的连接, 即适当选取耦合矩阵 $A = [a_{ij}]$ (或等价地, 矩阵 $L$), 便可以获得各种各样的网络, 诸如规则网络、随机图网络、小世界网络、无标度网络等等. 需要注意的是, 如果网络是有向的话, 矩阵 $A$ (因而矩阵 $L$) 是非对称的, 这时它们的特征根一般都是复数.

现在考虑上面这个网络的一种典型的状态同步问题. 如果

$$\lim_{t\to\infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0,\ \ i, j = 1, 2, \cdots, N$$

就称网络达到 (完全) 同步. 其中, $\{x_1 = x_2 = \cdots = x_N\} \subset \mathbf{R}^{N\times n}$ 称为是网络的同步流形. 如果网络趋于同步的话, 所有节点的状态向量都收敛于同步流形; 如果同步流形是稳定的话, 流形周边的所有状态轨道都会收敛于它, 即整个网络趋于同步. 同步流形的局部或者全局稳定性决定了网络同步的局部或者全局特性.

现在考虑上述网络的局部同步问题. 对给定的网络方程关于 $f(\cdot)$ 的不动点 $s$ 作线性化, 可得主稳定方程 (Master stability equation) 如下:

$$\dot{y}_k = [Df(s) - \alpha_k\Gamma]y_k$$

其中, $\alpha_k = c\lambda_k$, $k = 2, \cdots, N$. 所有这些方程的最大 Lyapunov 指数 $L_{\max}$ 称为是网络的主稳定函数 (Master stability function). 判断网络同步流形稳定的一个常用指标是要求 $L_{\max}$ 为负值[13]. 通常把使 $L_{\max}$ 为负的实数 $\alpha_k$ 的最大共同取值范围 $S = S_{\max}$ 称为原网络的同步区域, 显然它是由 $f(\cdot)$ 和 $\Gamma$ 来确定的. 如果耦合强度与矩阵 $L$ 的每个非零特征根之积都属于同步区域, 即:

$$c\lambda_k \subseteq S, \ \ k = 2, \cdots, N$$

那么可以保证网络的最大 (因而所有) Lyapunov 指数取负值, $L_{\max} < 0$, 即网络同步流形稳定, 从而网络便能实现 (局部) 同步[14].

根据不同情形, 可以把同步区域 $S$ 分为以下几种类型 (图 6):

**类型 1.** 文献 [15−16] 对应的同步区域为 $S_1 = (\alpha_1, \infty)$, 其中 $0 \le \alpha_1$ 由 $L_{\max}(\alpha) = 0$ 决定. 对于具有这类同步区域的网络, 如果耦合强度 $c > 0$ 和 Laplace 矩阵的最小非零特征根 $\lambda_2$ 的乘积满足

$$\alpha_1 < c\lambda_2$$

则网络同步. 因此, 这类网络的同步能力可以用相应矩阵 $L$ 的特征值 $\lambda_2$ 来刻画: $\lambda_2$ 值越大, 所需耦合强度 $c > 0$ 可以越小, 意味着网络的同步能力越强.

**类型 2.** 文献 [17] 对应的同步区域为 $S_2 = (\alpha_2, \alpha_3)$, 其中 $0 \le \alpha_2 < \alpha_3 < \infty$ 由 $L_{\max}(\alpha) = 0$ 决定. 对于这种情形, 如果

$$\alpha_2 < c\lambda_2 \le c\lambda_N < \alpha_3$$

则网络同步. 因此, 其同步能力可以用矩阵 $L$ 的非零特征根比率 $\lambda_2/\lambda_N$ 来刻画: 由上述不等式可以看出, $\lambda_2$ 和 $\lambda_N$ 越接近, 此不等式越容易得到满足; 因此, 比值 $\lambda_2/\lambda_N > \alpha_2/\alpha_3$ 越大, 则这类网络的同步能力越强.

**类型 3.** 文献 15−17] 对应的同步区域为空集 $S_3 = \phi$. 这时, 对于任意的耦合强度 $c > 0$, 相应的网络无法自我实现同步 (除非外加控制, 这将在下面进一步讨论).

**类型 4.** 文献 [18−19] 对应的同步区域为若干个形如 $S_1 = (\alpha_1, \infty)$ 和 $S_2 = (\alpha_2, \alpha_3)$ 的并集. 这时需要所有的 $c\lambda_i$ 值都落入这些子区间里, 相应的网络才会同步. 这种情形相当复杂, 也比较罕见.

现在回到上面讨论的牵制控制以实现网络同步的问题: 对于上面给定的网络模型, 假定它属于类型 3, 即自己不可能同步, 但我们希望通过在某些节点上加入线性反馈控制器 $u_i = -Kx_i$ 来强迫它实现同步, 其中 $K$ 为待定的控制增益矩阵. 被控网络可以写为

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Gamma x_j + \delta_i u_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, N$$

其中, 如果在节点 $i$ 上加入控制器的话, 则 $\delta_i = 1$, 否则 $\delta_i = 0$. 现在的问题是: 需要使用多少个指定类型的控制器? 应该把这些控制器设定在哪些节点上 (即, 对哪些节点进行牵制控制)?

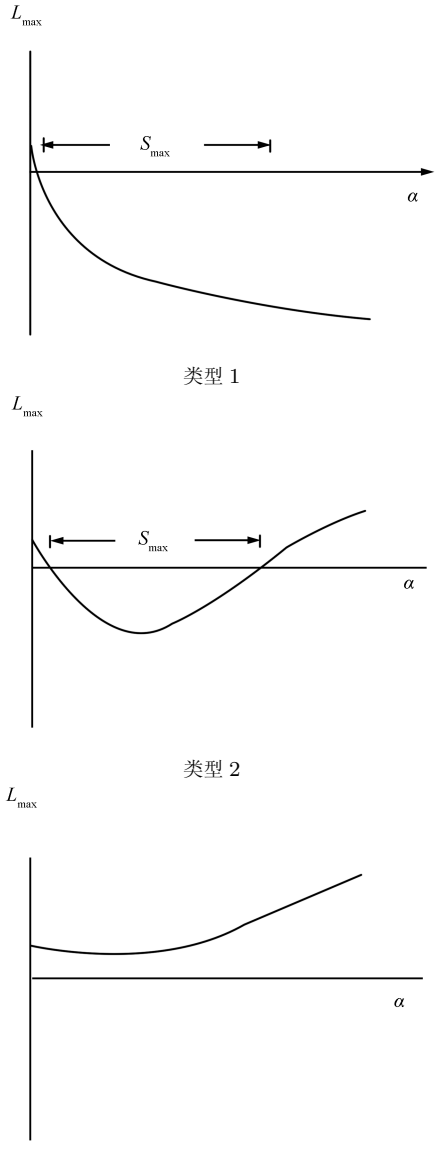



图 6 网络同步区域

Fig. 6 Network synchronized regions

特别是, 当控制器选择为特定的线性状态反馈组合形式: $u_i = c\sum_{j=1}^{N} b_{ij}\Gamma x_j$, 其中 $b_{ij}$ 为控制增益常数 (例如, 可取为 0 或 $\pm 1$), 那么, 上述被控网络可以改写为

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c\sum_{j=1}^{N}(a_{ij} + \delta_i b_{ij})\Gamma x_j,$$
$$i = 1, 2, \cdots, N$$

通过适当地设计和选用控制器 $u_i$ (即适当地选择 $\delta_i$ 和 $b_{ij}$), 可以让系数 $(a_{ij} + \delta_i b_{ij}) = 1$ 或 0. 这表明, 增加或者删除连接边的操作也可以被看成是一种特殊的牵制控制策略.

研究表明, 对这个牵制控制网络同步问题的答案依赖于所给定的无权无向连通网络的结构类型. 对无标度网络来说[15], 如果控制器是按节点度数的递减顺序而放置的话 (即先对度最大的节点放置一个控制器, 然后对下一个度最大的节点再行放置, 如此类推), 所需控制器的个数比随机放置控制器的做法可以少得多, 便可以达到同样的控制效果. 当然, 前者成本较高, 需要关于网络的全局信息 (所有节点的度数), 而后者则成本相当低 (不要求关于节点度的任何信息). 对小世界网络来说[16], 如果控制器是随机放置的话, 随着小世界网络模型中连接概率的增加 (即随着置乱或添加的连边数目的增加), 所需控制器的个数随之减少.

在较强的条件下, 这个牵制控制网络局部同步问题是有一个简单答案的: 例如对类型 1 网络, 当耦合强度 $c > 0$ 足够大时, 使用一个控制器就够了, 而且可以把它放置在任何一个节点上[20]. 对其他类型的一些网络, 在文献 [21] 中, 对于自适应同步取 $l = 1$ 的话, 亦有类似的结果; 在文献 [22] 中, 对于由 Hindmarsh-Rose 振子组成的小世界神经网络, 通过脉冲控制其中一个神经元也能让整个网络同步到均衡状态. 从物理直观上来看, 如果耦合强度 $c > 0$ 足够大的话, 那么整个网络可以理解为相当于一个刚性结构的框架, 因此上述答案的合理性是显而易见的. 但是, 如果耦合强度 $c > 0$ 限制得相对小, 特别是如果控制目标不同步, 类似的 (特别是有向的) 网络牵制控制问题尚有很多, 目前大都没有研究清楚[23].

顺便提及, 图论特别是有向图论是传统控制理论不太利用的数学工具. 在复杂动态网络环境下去做控制理论, 例如研究同步和稳定性问题, 这些工具显得特别重要和有用 — 它们常常能够给出常规控制理论得不到的结果和判据[24].

## 3　有向复杂动态网络的能控性

系统的 (完全) 能控性 (Controllability) 是控制理论中的一个核心概念, 也是研究得比较多和结论比较完整的基本理论问题之一. 在经典的系统科学研究中, 一个动力系统可以是很复杂的 (高维、随机、非线性), 但一般不把它放在网络的框架下加以研究, 主要是不去特别强调系统内部连接的形式和方向性. 对于一个线性系统, 能控性判别有一个简单漂亮的充分必要条件, 就是系统的能控性矩阵满秩. 对于非线性系统, 问题就不是那么简单了, 通常都要分类讨论, 而且一般只能得到充分或者必要条件.

从图论的观点来研究有向网络上的线性时不变动力系统的能控性, 其实在上世纪 70 年代开始就已经有了一些工作, 那时称之为 "结构能控性" (Structural controllability)[25−26]. 但是, 一般性的结果很少, 也没有引起控制界足够的注意. 今天, 由于网络科学与工程的需求和激励, 当我们把同样的问题放到复杂动态网络的框架上来讨论时, 问题与挑战就更多了. 首先, 要研究的网络是有方向的; 我们不能简单地把一个以高维动力系统为状态节点的网络归结成一个单一的更高维的巨系统然后套用经典大系统理论及其解耦技术进行研究. 其次, 复杂网络有许多不同的形式和模型, 如随机网络、小世界网络、无标度网络、加权网络、演化网络、脉冲混合网络等, 显然对不同类型的有向网络而言其能控性的描述与条件都是不一样的, 甚至可能还会存在某些相悖的情形和结论, 因此许多现成的传统控制理论的结果和工具都不能直接利用.

在一个有向网络中, 带有控制输入的节点称为控制节点, 而一个状态节点, 如果至少存在一条从某个控制节点指向它的连接边, 则称其为被控节点. 显然, 如果不存在这种有向连边的话, 那么显然控制节点的变化不能影响被控节点的行为. 由此可见, 研究把控制器放置在哪里, 这在有向网络上至关重要.

通常把只具有单一输入的控制节点称为 (独立) 驱动节点. 如果每一个状态节点都是驱动节点的话, 那么网络显然是能控的. 现在的问题是: 是否存在最少的驱动节点数 $N_D$, 使得整个网络是能控的? 并且, 选取哪 $N_D$ 个节点作为驱动节点, 某种期望的控制效果能够达到最好?

下面考虑一个网络, 其中每个状态节点都是一个线性动力系统, 具有 $\dot{x} = Ax + Bu$ 的形式. 一个系统 $(A, B)$ 称为是结构能控的 (Structurally controllable), 如果存在矩阵 $A$ 和 $B$ 中非零元素的一组取值, 使得该系统是能控的. 如果对于任意非零的参数取值, 系统 $(A, B)$ 都是能控的, 那么就称该系统是强结构能控的 (Strongly structurally controllable)[25−26].

作为例子[1], 图 7 表示 4 个以 $X_1$, $X_2$, $X_3$ 为状态分量的 3 维系统, 它们的能控性矩阵分别是

$$b_1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & a_{32}a_{21} \end{bmatrix},\quad b_1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1\begin{bmatrix}1&0&0\\0&a_{21}&0\\0&a_{31}&a_{33}a_{31}\end{bmatrix},\quad b_1\begin{bmatrix}1&0&0\\0&a_{21}&a_{23}a_{31}\\0&a_{31}&a_{32}a_{21}\end{bmatrix}$$

图 7 中系统 (a) 和 (c) 是强结构能控的, 因为对于任意的非零参数, 它们对应的能控性矩阵都是满秩的. 系统 (d) 是结构能控的, 但不是强能控的, 因为对于满足 $a_{32}a_{21}^2 = a_{23}a_{31}^2$ 的参数, 其能控性矩阵是不满秩的; 否则都是满秩的. 系统 (b) 是不可控的, 因为无论如何选取参数, 其能控性矩阵都是不满秩的. 注意到系统 (c) 只是比系统 (b) 在状态节点 $X_3$ 处多了一个自环, 但这一结构上的微小变化导致了整个系统能控性本质上的改变, 从一个侧面也反映了有向网络的复杂性.

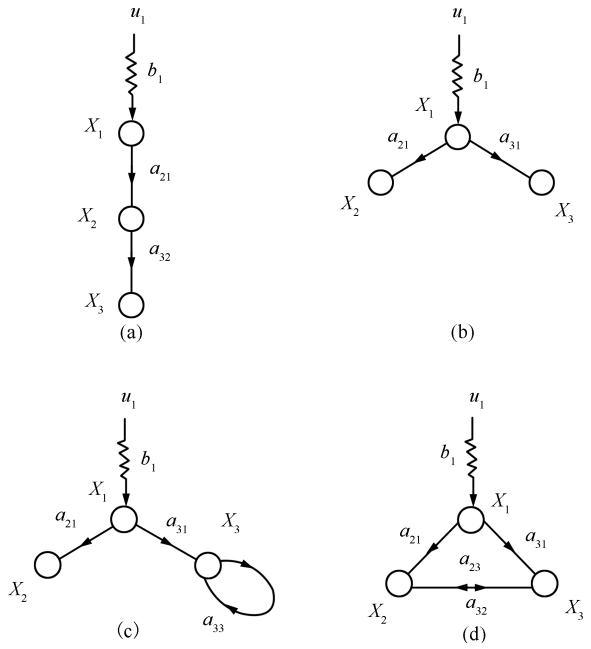



图 7 判断结构能控性的例子[1]

Fig. 7 Example for determining structural controllability[1]

完全控制一个有向网络所需要的最少控制节点数目是由该网络的最大匹配集来决定的. 一个有向网络的边的子集 $E*$ 称为是一个匹配 (Matching) 集, 如果 $E*$ 中的任意两条边都没有公共的始点、也没有公共的终点. 如果一个节点是 $E*$ 中某一条边的一个终点, 那么该节点就称为是匹配节点 (Matched node); 否则就称为是未匹配节点 (Unmatched node). 一个有向网络中匹配节点数目最多的匹配集称为最大匹配 (Maximum matching) 集. 一个网络中的匹配集称为是完全的 (Perfect), 如果网络中所有的节点都是匹配节点. 因此, 可能的完全最大匹配集是网络本身.

对于有向网络的能控性研究, 最近有一个颇为引人注意的新尝试[27]. 其补充材料中的最少输入定理 (Minimum input theorem) 指出, 一个 (完全) 能控的有向网络所需的最小驱动节点数为 $N_D = \max\{N - |E*|, 1\}$, 其中 $|E*|$ 表示集合 $E*$ 中元素的个数. 特别地, 如果网络存在完全匹配, 那么 $N_D = 1$, 这时可选取任一状态节点为驱动节点 (这一结论和前面关于无向网络牵制控制同步的相应结果是一致的). 如果网络不存在完全匹配, 那么 $N_D = N - |E*|$, 也就是说, $N_D$ 为网络的任一最大匹配集所对应的未匹配节点的数目. 此时, 应选取未匹配节点作为驱动节点对网络实行牵制控制. 当然, 这一结论也是很直观的 (否则未匹配节点就不可能被控). 当给定的网络不存在完全匹配时, 也可以通过某些简单适当的控制手段让它变成 (或等价于) 具有完全匹配, 从而只需使用一个驱动节点实现对网络的控制[28].

文献 [27] 指出: "在这里我们发展了一种解析性的工具, 用以研究任意有向网络的能控性, 办法就是通过识别一组依赖于时间的驱动节点来引导整个系统的动态行为. 我们把这些工具应用到了许多真实网络, 发现所需驱动节点的数目主要决定于网络的节点度分布. 我们将向大家展示, 从许多真实复杂系统中涌现出来的稀疏的非均匀网络是最难控制的, 反而稠密的均匀网络可以通过驱动其中少数的节点来加以控制. 与直观相反, 我们还发现不管是对数学模型还是真实网络来说, 驱动节点通常都不是那些高度数的节点".

这里, "通过驱动其中少数的节点" 就是牵制控制策略. 当然, 接下来就需要去研究 "驱动多少个节点" 和 "驱动哪些节点" 等问题.

在 *Nature* 正式刊登上述文献之前, *Science* 的一位科学评论员给我寄来了清样, 然后打电话来让我谈谈对该文的看法. 这位评论员后来说[8]: "香港城市大学电子工程系的陈关荣教授指出: 和已往的网络控制理论研究相比, 他们的新工作具有广泛性也更为实用, $\cdots$ 他们的工作针对更一般的有向网络. $\cdots$ 陈教授还指出, 他们发展出来的寻找控制节点的程序很重要, 因为它将很有用".

应该说, 文献 [27] 的发表对推动有向网络能控性的研究有很好的启发和激励作用, 其中对 12 个不同领域的 37 个实际网络例子的验证和所观察到的一些特殊现象 (例如上面引文中所说的 "驱动节点通常都不是那些高度数的节点"), 值得控制理论研究人员注意和参考. 文献 [29] 从控制代价的角度来考虑也发现类似的结果: 较好的驱动节点往往不是度大的节点. 另一方面, 新近的一项研究报告指出, 无标度有向网络比节点度相关性低的有向网络更容易控制[30]. 此外, 与同步相近的一致性 (Consensus)

问题的能控性最近也有一些相当有意义的研究进展[31].

最后指出, 系统的 (完全) 能观性 (Observability) 是和能控性对偶的一个基本概念. 类似地, 对线性时不变系统来说, 存在一个简单漂亮的充分必要条件, 就是系统的能观性矩阵满秩. 同样地, 对非线性系统来说, 通常只能分类讨论并且一般只有充分或者必要条件. 此外, 其他的一些相关的重要概念如镇定性 (Stabilizability), 都可以类似地在有向动态网络的框架下加以描述和进行研究. 由此可见, 在有向复杂动态网络的框架下, 控制科学尚有许多基本理论工作等待着我们去进一步探讨.

## 4　"网络的网络" 之建模与控制

"网络的网络" 在这里指的是若干不同性质网络的耦合、或者若干相同性质但不同尺度的网络的耦合, 以及其他类似的具有层次或者社团结构的复杂网络. 下面来看三个简单例子.

第一个例子是物联网 (Internet of things). 这是一个由许多不同性质的网络以多种方式并通过不同转换而相互耦合在一起的 "网络的网络" 的最直观的例子.

第二个例子是人群移动网络 (Human mobility networks). 这类网络由若干个相同性质但尺度不同的网络以多种方式耦合而成, 其中节点可以理解为是相同的 (旅行者), 但连边则具有不同的尺度, 例如短程连接 (自行车、汽车) 和长程连接 (飞机、铁路、航船). 图 8 显示的是北美的一幅有关人群移动网络的实证图[32]: 白色表示短程连接; 灰色表示长程连接. 实际上, 不同的交通工具背后还有一个性质非常不一样的网络与它们耦合在一起, 那就是通信网络 (手机网、互联网).

图 8　北美人群移动网络实证图[32]

Fig. 8　Human mobility network example in North America[32]

新近的一项研究有一个有趣的发现[33]: 在两个分离的网络之间加入少量的连接边, 让它们成为一个包含两个相互依存 (Interdependent) 的子网的网络, 可以有效地防止大规模连锁反应或相继崩溃在各子网内分别发生. 如前所述, 这里连边的加入本质上是一种牵制控制策略. 然而, 这个报告指出, 当两个分离的子网络之间的连接边数目太多时, 这种连接反而变成有害的了. 这种情况当然也是很好理解的: 两个子网络之间的连边多了, 它们连在一起就变成了一个单一的、更大的网络, 从而两个子网之间的相互牵制和约束就减弱甚至消失了, 因此会继承原来单个子网络容易发生连锁崩溃的脆弱性. 这个例子从某一个侧面反映了相互依存网络的复杂性.

第三个例子是 2003 年意大利南部电网大崩溃[34]. 这是一个相互依存网络之间通过耦合发生的连锁崩溃的实际例子.

如图 9 所示, 图 9 (a) 有一个电站发生故障 (灰色点) 导致几个与之相连的互联网服务器停止工作 (灰色点), 从而若干其他服务器与网络断离 (黑色点); 图 9 (b) 为上述失效的互联网上的服务器 (灰色点) 及其连边不工作 (被移走) 导致它们所控制的电站停止工作 (灰色点), 进一步再导致若干其他电站与电网断离 (黑色点); 图 9 (c) 为上述不工作的电站 (灰色点) 及其相连的互联网服务器 (灰色点) 不工作 (被移走) 导致两个网络同时崩溃 (全部灰色点), 最后导致电力系统全面崩溃 (整个意大利南部大停电).

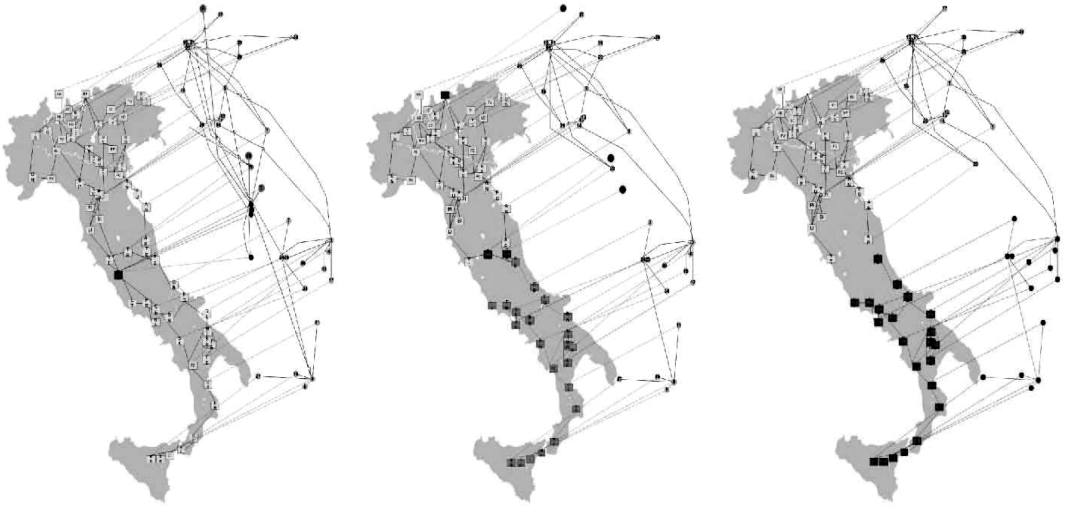
这种不同性质但又相互依存的两个或多个网络之间的耦合连锁崩溃只会在 "网络的网络" 结构下才会发生, 而在一个通常意义下的巨大系统是不会出现的, 也刻画不出来. 对于这类多种相互依存的 "网络的网络", 如何建模、如何设计多种不同的控制器 (例如一种是工业控制器, 用来调节电网; 另一种是计算机程序软件, 用来调控互联网), 以实现防止和补救多网融合系统的耦合连锁崩溃? 在建模方面, 目前有一些描述性的研究[35]. 理论上, 这种问题的能控性如何定义、如何建立、如何分析、如何应用? 在 "网络的网络" 环境下, 传统的控制理论正遇到新的机遇, 当然也面临着新的困难.

上面这几个例子显示了 "网络的网络" 中的问题、需求与挑战: 这里考虑的网络, 大体上是由不同性质、不同尺度、不同层次、不同大小、不同复杂度的许多子网络组成的, 而且各个子网分别由不同性质的节点组成, 其中一些子网络具有方向性、变尺度和动态演化特等. 在这样的 "超网络" 框架底下, 控制理论怎么做? 具体地:

1) 建模. 是否可能建立一个统一的 "超网络" 模型? 如何建立?

2) 分析. 如何基于不同性质及不同尺度的子网络来对整体网络作全局分析?

3) 计算. 不同性质及不同尺度的多个子网络如何进行协同、计算和设计?



(a) 第一阶段 (a) First stage (b) 第二阶段 (b) Second stage (c) 第三阶段 (c) Third stage

图 9 意大利南部 2003 年电网大崩溃[34]

Fig. 9 Power grid collapse in South Italy in 2003[34]

4) 控制. 如何判定 "超网络" 的能控性、能观性、能镇定性? 如何实现有效的牵制控制?

5) 稳定性. 存在不同性质及不同尺度的混合型 Lyapunov 函数吗? 如何构造?

## 5 尚未结束的结束语

现在回到本文开始提出的问题: 复杂动态网络环境下, 控制理论做什么、怎么做?

复杂动态网络研究的对象是大规模的 (有许多节点和连边)、高维的 (状态节点是高维动力系统、连边含有多个状态分量)、以不完全确定或不完全规则的方式连接在一起的 (例如随机结构、小世界结构、无标度结构), 带有 (节点动力系统和耦合方式) 非线性、具有时变和发展形式 (例如增长、演化、脉冲、时滞)、甚至是由不同时间或空间尺度来刻画的, 等等. 在这样复杂的网络条件下, 特别是在纠缠的 "网络的网络" 的框架下, 传统的控制理论应该做些什么和如何来做? 这的确是一次很好的发展机遇但也是一项困难的战略任务.

本文限于篇幅, 仅着重漫谈了复杂动态网络的牵制控制、有向复杂网络的能控性、以及 "网络的网络" 的建模与控制等三个方面的相关科学研究问题. 容易想象, 还有许多控制相关问题可以提出来, 大都具有创新性但也极具挑战性. 常言道, 能够提出 (好的) 问题就等于解决了问题的一半. 尽管如此, 解决问题无论如何比提出问题要困难得多. 不管如何, 有了问题, 就有研究工作可做; 在解决问题的过程中, 又会提出更多新的问题. 控制科学与工程以及网络科学与工程的研究人员, 任重而道远; 特别是年轻一代, 不应坐失良机.

## References


1 Wang Xiao-Fan, Li Xiang, Chen Guan-Rong. *Network Science: An Introduction*. Beijing: High Education Press, 2012 (汪小帆, 李翔, 陈关荣. 网络科学导论. 北京: 高等教育出版社, 2012)

2 Erdös P, Rényi A. On the evolution of random graphs. *Publication of the Mathematical Institute of Hungarian Academy of Sciences*, 1960, **5**: 17−61

3 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of "small-world" networks. *Nature*, 1998, **393**(6684): 440−442

4 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, **286**(5439): 509−512

5 Newman M E J, Watts D J. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Physics Letters A*, 1999, **263**(4−6): 341−346

6 Newman M E J. *Networks: An Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2010

7 Chen G R, Wang X F, Li X. *Introduction to Complex Networks: Models, Structures and Dynamics*. Beijing: High Education Press, 2012

8 Wang X F, Chen G R. Pinning control of scale-free dynamical networks. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2002, **310**(3−4): 521−531

9 Li X, Wang X F, Chen G R. Pinning a complex dynamical network to its equilibrium. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2004, **51**(10): 2074−2086

10 Cho A. Scientific link-up yields "control panel" for networks. *Science*, 2011, **332**(6031): 777

11 Couzin I D, Krause J, Franks N R, Levin S A. Effective leadership and decision-making in animal groups on the move. *Nature*, 2005, **433**(7025): 513

12 Chen G R, Wang X F, Li X, Lv J H. Some recent advances in complex network synchronization. *Recent Advances in Nonlinear Dynamics and Synchronization Studies, in Computational Intelligence*. Berlin: Springer-Verlag, 2009, **254**: 3−16

13 Pecora L M, Carroll T L. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical Review Letters*, 1998, **80**(10): 2109−2112

14 Duan Z S, Chen G R, Huang L. Complex network synchronizability: analysis and control. *Physical Review E*, 2007, **76**(5): 056103

15 Wang X F, Chen G R. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, **49**(1): 54−62

16 Wang X F, Chen G R. Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, **12**(1): 187−192

17 Barahona M, Pecora L M. Synchronization in small-world systems. *Physical Review Letters*, 2002, **89**(5): 054101

18 Stefánski A, Perlikowski P, Kapitaniak T. Ragged synchronizability of coupled oscillators. *Physical Review E*, 2007, **75**(1): 016210

19 Duan Z S, Chen G R, Huang L. Disconnected synchronized regions of complex dynamical networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(4): 845−849

20 Chen T P, Liu X W, Lu W L. Pinning complex networks by a single controller. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2007, **54**(6): 1317−1326

21 Zhou J, Lu J A, Lv J H. Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network. *Automatica*, 2008, **44**(4): 996−1003

22 Zhou J, Wu Q J, Xiang L. Impulsive pinning complex dynamical networks and applications to firing neuronal synchronization. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **69**(3): 1393−1403

23 Chen Guan-Rong. Network synchronization (Chapter 4). *Complex Networks* (Chief Editor: Guo Lei, Xu Xiao-Ming), Shanghai: Shanghai Education Press, 2006, 67−95
(陈关荣. 网络同步 (第四章). 复杂网络 (主编: 郭雷, 许小鸣). 上海: 上海科技教育出版社, 2006. 67−95)

24 Chen G R, Duan Z S. Network synchronizability analysis: a graph-theoretic approach. *Chaos*, 2008, **18**(3): 037102

25 Lin C T. Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, **19**(3): 201−208

26 Willems J L. Structural controllability and observability. *Systems and Control Letters*, 1986, **8**(1): 5−12

27 Liu Y Y, Slotine J J, Barabási A L. Controllability of complex networks. *Nature*, 2011, **473**(7346): 167−173

28 Wang W X, Ni X, Lai Y C, Grebogi C. Optimizing controllability of complex networks by minimum structural perturbations. *Physical Review E*, 2012, **85**(2): 026115

29 Yan G, Ren J, Lai Y C, Lai C H, Li B W. Controlling complex networks: How much energy is needed? *Physical Review Letters*, 2012, **108**(21): 218703

30 Nepusz T, Vicsek T. Controlling edge dynamics in complex networks. *Nature Physics*, 2012, **8**(7): 568−573

31 Egerstedt M B, Martini S, Cao M, Çamlibel K K, Bicchi A. Interacting with networks: how does structure relate to controllability in single-leader, consensus networks? *IEEE Control Systems*, 2012, **32**(4): 66−73

32 Vespignani A. Complex networks: the fragility of interdependency. *Nature*, 2010, **464**(7291): 984−985

33 Brummitt C D, D′Souza R M, Leicht E A. Suppressing cascades of load in interdependent networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2012, **109**(12): E680−E689

34 Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, Stanley H E, Havlin S. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 2010, **464**(7291): 1025−1028

35 Gao J X, Buldyrev S V, Stanley H E, Havlin S. Networks formed from interdependent networks. *Nature Physics*, 2011, **8**(1): 40−48

**陈关荣** 香港城市大学讲座教授. 主要研究方向为非线性科学与复杂网络.
E-mail: eegchen@cityu.edu.hk
(**CHEN Guan-Rong** Chair professor at City University of Hong Kong. His research interest covers nonlinear science and complex networks.)