# 一类双线性随机系统 M 量测不定 LQ 控制

邢国靖 [1] 张承慧 [1] 崔 鹏 [1]

**摘 要** 研究了带有乘性噪声和受扰动观测的离散时间随机系统不定线性二次 (Linear quadratic, LQ) 最优输出反馈控制问题. 对此类问题而言, 二次成本函数的加权矩阵不定号, 并且最优控制具有对偶效果. 为在最优性和计算复杂度间进行折衷, 本文采用了一种 M 量测反馈控制设计方法. 基于动态规划方法, 将未来的测量结合到当前控制计算当中的 M 量测反馈控制可以通过倒向求解一类与原系统维数相同的广义差分 Riccati 方程 (Generalized difference Riccati equation, GDRE) 得到. 仿真结果表明本文提出的算法与目前普遍采用的确定等价性方法相比具有优越性.

**关键词** 双线性随机系统, 不定 LQ 控制, M 量测反馈, 乘性噪声

**引用格式** 邢国靖, 张承慧, 崔鹏. 一类双线性随机系统 M 量测不定 LQ 控制. 自动化学报, 2013, **39**(2): 159−161

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00159

## M-measurements Indefinite Linear Quadratic Optimal Control for Bilinear Stochastic Systems with Multiplicative Noises

XING Guo-Jing[1] ZHANG Cheng-Hui[1] CUI Peng[1]

**Abstract** The finite horizon indefinite linear quadratic (LQ) optimal output feedback control problem for discrete time stochastic systems with multiplicative noises and disturbed measurements is considered. In this problem, the weighting matrices of the quadratic cost functional are indefinite, and the optimal control does have the so-called dual effect. In order to make a compromise between the optimality and the computation complexity, a kind of M-measurements feedback control design approach is adopted. Based on the dynamic programming, the M-measurements feedback control for the bilinear stochastic systems (BLSS), which incorporates future measurements into the current control computation, can be solved in backward time, and the optimal solution is given in terms of a kind of generalized difference Riccati equation of the same dimensions as that of the plant. Simulation results show the superiority of the proposed algorithm over other widely used methods based on the certainty equivalence.

**Key words** Bilinear stochastic system, indefinite linear quadratic (LQ) control, M-measurements feedback, multiplicative noise

**Citation** Guo-Jing Xing, Cheng-Hui Zhang, Peng Cui. M-measurements indefinite linear quadratic optimal control for bilinear stochastic systems with multiplicative noises. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(2): 159−161

实际中普遍存在与系统状态和控制相关的乘性噪声. 带有乘性噪声的线性随机系统也被称作双线性随机系统 (Bilinear stochastic system, BLSS), 它是描述自然界中各类随机扰动的最好工具之一. 金融经济、航天工程、通信和化学中很多扩散模型均可由 BLSS 描述. 例如, 股票市场中大投资者的交易将会影响股价的波动. 上面的例子是控制相关乘性噪声的实例. 换句话说, 系统噪声会随着控制信号幅值的增加而增大. 更多控制或状态相关乘性噪声的实例可以参考文献 [1]. 而 BLSS 线性二次最优控制问题的研究最早出现于 20 世纪 60 年代. 考虑乘性噪声的一个重要好处就是所设计的控制器具有较强的鲁棒性.

乘性噪声所导致的问题求解复杂性主要可概括为两方面. 一方面, 成本函数中状态和控制加权矩阵可以不定号, 而在经典的线性二次优化问题中, 状态权阵正定和控制权阵正定则分别是使问题有意义的必要条件. 这揭示了随机线性二次 (Linear quadratic, LQ) 问题和确定 LQ 问题之间的本质区别, 并且引发了一类不定 LQ 最优控制新问题的研究. 早期研究仍然假设控制权阵严格正定的条件, 从而得到了许多与确定问题完全平行的结果. 文献 [2] 的作者研究了存在控制相关噪声时的稳态最优控制问题, 并利用矩阵极大值原理得到了与确定最优控制类似的线性最优控制律. 值得一提的是, 该文作者已经注意到了控制权阵不定号的特性, 并首次提出了有效控制权阵的概念. 在文献 [3] 中, 作者通过一种有效的迭代收敛算法得到了一类 BLSS 最优 $H_2$ 反馈控制. 文献 [4] 利用线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 研究了 BLSS 的 $H_\infty$ 控制问题. 尽管如此, 上述研究均保留了控制加权矩阵正定的假设.

当二次型成本函数中状态或 (和) 控制加权矩

收稿日期 2011-04-01 录用日期 2012-06-07
Manuscript received April 1, 2011; accepted June 7, 2012
国家自然科学基金 (51277116, 61034007, 60774004) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (51277116, 61034007, 60774004)
本文责任编委 方海涛
Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao
1. 山东大学控制科学与工程学院 济南 250061
1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061
该文的英文版同时发表在 *Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 2, pp. 159−167, 2013.

阵不定号时, LQ 问题可称作不定 LQ 问题. 该问题的价值在于它涵盖了 $H_2$、$H_\infty$、对策论及风险敏感控制[5]. 时至今日, 不定随机 LQ 问题已经受到众多研究者关注, 不定 LQ 理论也得到了极大的发展[6−9], 其中, 特别值得注意的是 Chen 等最近的工作[10−12]. 彭实戈院士提出的随机极大值原理也被认为是迄今为止针对该类问题最好的研究结果[13]. 文献 [10] 详细深入地讨论了随机不定 LQ 问题的本质. 文献 [11] 中引入了一类 LMI 条件, 并且证明 LMI 的可行性、相关广义差分 Riccati 方程 (Generalized difference Riccati equation, GDRE) 的可解性和不定 LQ 问题的适定性均是等价的[12]. 上述结果大多是完全信息情况下的状态反馈形式, 然而, 实际中系统状态往往是部分可观测的. 即使我们可以令观测等同于状态, 但由于控制信号往往是在当前状态测量之前生成, 所以我们需要处理的实质上仍然是部分可观测系统. 因此, 寻找此类问题的输出反馈控制律意义更大.

双线性随机系统 LQ 问题研究的另一个难度源于此类问题的控制具有通常所说的对偶效果. 对偶效果意味着控制不仅会直接影响状态, 而且还会影响状态的不确定性范围. 例如, 石油开发项目中环境污染的风险会随着投资的增长而增加, 因而会导致额外的风险调节成本. 因此, 在优化问题中对偶控制需要实现两个相互冲突的目标: 一个目标是令状态达到期望值, 另一个目标则是降低系统不确定性. 据我们所知, Feldbaum 最先提出了对偶控制的概念[14], 并在 2000 年被列为深刻影响了上世纪控制理论发展的 25 个最主要研究方向之一. Alspach 通过忽略控制中的高阶项设计了一类 BLSS 最优线性对偶控制器[15]. Bar-Shalom 等在文献 [16] 中详细探讨了对偶效果、确定等价性以及二者之间的关系. 最近的文献 [17] 综述了对偶控制的发展, 文献 [18−19] 分别研究了方差最小化方法、逼近方法来求解对偶控制问题. 虽然目前已经有大量关于对偶控制的研究, 但是对于本文所研究的输出反馈问题却缺乏切实有效的对偶控制方法. 困扰对偶控制发展的最主要问题在于, 即使对于很小的问题而言, 其计算量也相当巨大.

鉴于真正最优对偶控制的计算复杂性, 许多研究人员致力于开发某些次优控制策略, 其中, 最流行的方法则是基于确定等价性原理[1, 16]. 众所周知, 确定等价性或其弱化而来的分离原理是研究随机部分可观测信息输出反馈控制问题的优秀工具. 基于确定等价性, 不完全信息随机最优控制问题可分解为两个相互独立的确定控制问题和最优估计问题, 从而降低了问题求解的难度. 然而, 当控制具有对偶效果时, 确定等价性原理并不成立, 必须同时求解控制和估计问题. 尽管如此, 对于非线性或非高斯随机系统控制合成问题而言, 目前还少有比 "假设确定等价性仍然成立" 更好的处理办法. 因此, 许多研究者直观上认为确定等价性原理仍然适用于对问题进行近似求解. 例如, 文献 [20] 中针对带有信号相关噪声的随机部分可观测信息系统提出了一种能够保证收敛的坐标下降算法. 但是该文中仍假设状态加权矩阵正半定、控制加权矩阵正定. 文献 [21] 针对同时存在状态和控制相关噪声的连续时间部分信息随机系统构建了一种次优意义下的分离原理. 基于确定等价性的方法最主要的缺点是完全忽略了控制的对偶效果, 所设计的控制器极易导致系统不稳定. 此外, 此类控制在最小化成本函数的同时, 往往会大大增加系统不确定性.

本文的目的是针对一类离散时间部分信息 BLSS 设计 M 量测次优输出反馈控制器. 与广泛采用的确定等价性方法不同, 本文所设计的控制保留了一部分对偶效果. 据我们所知, M 量测反馈控制最先由 Curry 提出[22]. 此类控制更接近 Feldbaum 所提出的对偶控制, 因为该控制部分保留了对偶控制的主动学习能力. 基于动态规划方法, 将未来的测量结合到当前控制计算当中的 M 量测反馈控制, 可以通过反向求解一类与原系统维数相同的 GDRE 得到.

本文剩余部分组织如下. 第 1 节给出了问题描述; 第 2 节得到了开环反馈控制器; 第 3 节给出了一步量测反馈控制问题解; 最后, 通过数值算例验证了本文提出算法的有效性.

## 1 问题描述和预备知识

对系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A(k)\boldsymbol{x}(k)+B(k)\boldsymbol{u}(k)+\sum_{i=1}^{q}A_i(k)\times \boldsymbol{x}(k)\boldsymbol{\xi}^i(k)+\sum_{i=1}^{d}B_i(k)\boldsymbol{u}(k)\boldsymbol{\beta}^i(k),\ \ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=C(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{v}(k),\quad \boldsymbol{y}(0)=0 \tag{2}$$

考虑带有状态和控制相关乘性噪声的线性离散随机系统最优控制问题, 成本函数为

$$J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_{i=0}^{N-1})= \mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{N-1}(\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}Q_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}R_k\boldsymbol{u}_k)+\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}Q_N\boldsymbol{x}_N\right] \tag{3}$$

其中, $Q_0,\cdots,Q_N$ 和 $R_0,\cdots,R_{N-1}$ 分别为具有合适维数的对称阵. $\boldsymbol{x}(k)\in\mathbf{R}^n$、$\boldsymbol{u}(k)\in\mathbf{R}^r$ 和 $\boldsymbol{y}(k)\in\mathbf{R}^p$ 分别为状态、输入和输出向量, $A(k)$、$B(k)$、$A_i(k)$、$B_i(k)$ 和 $C(k)$ 是恰当维数的系数矩阵. 不失一般性, 分别假设 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 为 $q$、$d$ 和 $p$ 维零均值平稳过程. 此外, 假设 $\boldsymbol{\xi}$、$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 互不相关. $\boldsymbol{v}$ 的方差 $\Omega^v>0$. 令 $\boldsymbol{\xi}^i(k)$、$\boldsymbol{\beta}^i(k)$ 分别表示 $\boldsymbol{\xi}(k)$ 和 $\boldsymbol{\beta}(k)$ 的第 $i$ 个元素, 并且满足:

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{\xi}^i(k)\boldsymbol{\xi}^j(l)]=\mathrm{E}[\boldsymbol{\beta}^i(k)\boldsymbol{\beta}^j(l)]=\delta_{ij}\delta_{kl}$$

其中, $\delta$ 为满足以下性质的 Dirac delta 函数

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$$

需要解决的优化问题就是寻找定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ 上的容许控制集合 $\mathcal{U}_{ad}$ 内的控制序列 $(\boldsymbol{u}^*(0),\cdots,\boldsymbol{u}^*(N-1))$, 以最小化二次成本函数 (3), 即:

$$J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*(0),\cdots,\boldsymbol{u}^*(N-1))=\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}}J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(0),\cdots,\boldsymbol{u}(N-1))$$

**注 1.** 标准的 LQ 最优控制问题需预先假定状态权阵正半定、控制权阵正定. 然而, 在我们要研究的问题中仅假设 $Q_0,\cdots,Q_N$ 和 $R_0,\cdots,R_{N-1}$ 为对称阵. 因此, 该优化问题可称为不定 LQ 问题, 因为 $Q_0,\cdots,Q_N,R_0,\cdots,R_{N-1}$ 不定号. 一般情况下不定 LQ 问题可能是平凡的或非适定的, 文献 [23] 中给出了一些详细的例子.

**定义 1.** 如果

$$V(\boldsymbol{x}_0)=\inf_{\boldsymbol{u}_0,\cdots,\boldsymbol{u}_{N-1}}J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\cdots,\boldsymbol{u}_{N-1})>-\infty$$

则称 LQ 问题 (1) ∼ (3) 适定.

更进一步说, 如果对于任意变量 $\boldsymbol{x}_0$, 存在容许控制序列 $(\boldsymbol{u}^*(0),\cdots,\boldsymbol{u}^*(N-1))$, 令 $V(\boldsymbol{x}_0)=J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*(0),\cdots,\boldsymbol{u}^*(N-1))$, 则称该 LQ 问题可达, 并且 $(\boldsymbol{u}^*(0),\cdots,\boldsymbol{u}^*(N-1))$ 为最优控制序列. 文献 [12] 中通过求解 GDRE 给出了本文所研究 LQ 问题适定的充要条件, 而 Dragan 等也在文献 [24] 中利用一类线性矩阵不等式的可行性得到了 GDRE 最大解存在的充要条件.

为方便起见, 令

$$Y_k=\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_k\}\ ,\ U_k=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_k\}$$

**定义 2.** 令 $\boldsymbol{x}_{k,i}$ 表示 $k$ 时刻状态的第 $i$ 个元素, 令 $M^r_{k|k,i}$ 表示 $\boldsymbol{x}_{k,i}$ 关于 $Y_k$ 和 $U_{k-1}$ 生成的 $\sigma$ 域的条件 $r$ 阶中心矩.

$$M^r_{k|k,i}:=\mathrm{E}\{[\boldsymbol{x}_{k,i}(\omega,U_{k-1})-\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_{k,i}|Y_k(\omega,U_{k-1}),U_{k-1})]^r|Y_k(\omega,U_{k-1}),U_{k-1}\}\tag{4}$$

如果

$$\mathrm{E}[M^r_{k|k,i}|Y_k(\omega,U_{k-1}),U_{k-1}]=\mathrm{E}[M^r_{k|k,i}|\tilde{Y}_k(\omega)]\tag{5}$$

则称控制不具有对偶效果, 其中, $\tilde{Y}_k(\omega)$ 为对应自治系统的测量. 如果式 (5) 对于某些 $r\geq 2$ 不成立, 也就是说如果控制能够以非零概率影响某阶中心矩, 那么控制具有对偶效果. Feldbaum 在文献 [14] 中也将不具有对偶效果的控制称作中性的.

已有研究表明在本文所研究的 BLSS 中, 噪声与状态和控制的相关性会导致当前状态估计误差协方差与之前的控制和测量有关[25]. 由定义 2 看来, 最优控制确实具有对偶效果. 尽管如此, 当前大多数 BLSS 反馈控制仍属于开环最优反馈 (Open loop optimal feedback, OLOF). 如果在计算控制时, 假设仅当前已有的测量数据可用, 而未来不会做任何测量, 那么该控制就属于 OLOF[16]. OLOF 算法完全忽略了对偶效果这一最优控制的特征, 因此, 并非真正意义上的最优控制.

## 2　开环最优反馈 (OLOF) 控制

在本节中首先给出一些关于式 (1) ∼ (3) 的开环最优反馈控制问题结果, 并明确指出当前时刻状态估计误差与之前控制的相关性. 在完全信息情况下, 可基于 GDRE 和完全平方法得到最优控制.

**定义 3.** 下面这种与本文所研究系统相关的受限 Riccati 方程称为广义差分 Riccati 方程.

$$\begin{aligned}&P_k=A^{\mathrm{T}}(k)P_{k+1}A(k)+Q_k+\sum_{i=1}^{q}A_i^{\mathrm{T}}(k)P_{k+1}\times\\&A_i(k)-H^{\mathrm{T}}(k)G_k^{\dagger}H(k)\ ,\quad P_N=Q_N\\&G_kG_k^{\dagger}H(k)-H_k=0,\quad G_k\geq 0\end{aligned}\tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}&G_k=R_k+B_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}B_k+\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(k)P_{k+1}B_i(k)\\&H_k=B^{\mathrm{T}}(k)P_{k+1}A(k)\end{aligned}\tag{7}$$

$G_k$ 称为有效控制权阵, $G_k^{\dagger}$ 表示 $G_k$ 的 Pseudo 广义逆.

**引理 1.** 假设 GDRE (6) 有解, 在完全信息情况下 (状态完全可观测), LQ 问题 (1) ∼ (3) 为一 Pseudo 确定问题, 其解为

$$\boldsymbol{u}_k=-K_k\boldsymbol{x}_k\tag{8}$$

$$K_k=G_k^{\dagger}H_kv\tag{9}$$

更进一步说, 如果式 (7) 中的 $G_k$ 满足 $G_k>0$ 的条件, 最优控制序列由 $K_k=G_k^{-1}H_k$ 惟一给定.

**证明.** 首先, 令 $P_1,\cdots,P_N$ 为 GDRE (6) 的一族解, 那么可以得到下式:

$$\mathrm{E}\sum_{k=0}^{N-1}(\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}P_k\boldsymbol{x}_k)=\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}P_N\boldsymbol{x}_N-\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P_0\boldsymbol{x}_0]\tag{10}$$

将式 (10) 代入成本函数 (3), 并利用系统方程 (1) 和 (2) 可得:

$$J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\cdots,\boldsymbol{u}_{N-1})=\mathrm{E}\sum_{k=0}^{N-1}(\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}Q_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}R_k\times\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}P_k\boldsymbol{x}_k)+\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}(Q_N-P_N)\boldsymbol{x}_N+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P_0\boldsymbol{x}_0]=\mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}(Q_k-P_k+A_k^{\mathrm{T}}\times\right.$$

$$P_{k+1}A_k+\sum_{i=1}^{q}A_i^{\mathrm{T}}(k)P_{k+1}A_i(k))\boldsymbol{x}_k+2\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}A_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}\times B_k\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}}(R_k+B_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}B_k+\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(k)P_{k+1}\times B_i(k))\boldsymbol{u}_k\Bigg]+\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P_0\boldsymbol{x}_0] \tag{11}$$

通过完全平方可得:

$$J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\cdots,\boldsymbol{u}_{N-1})=\mathrm{E}\sum_{k=0}^{N-1}[(\boldsymbol{u}_k+G_k^{\dagger}H_k\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\times G_k(\boldsymbol{u}_k+G_k^{\dagger}H_k\boldsymbol{x}_k)]+\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P_0\boldsymbol{x}_0]=\mathrm{E}\sum_{k=0}^{N-1}[(\boldsymbol{u}_k+K_k\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}G_k(\boldsymbol{u}_k+K_k\boldsymbol{x}_k)]+\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P_0\boldsymbol{x}_0] \tag{12}$$

由 $G_k$ 的表达式可知, 由于其中存在额外的两项 $B_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}B_k$ 和 $\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(k)P_{k+1}B_i(k)$, 因此, 即使控制加权矩阵 $R(k)$ 负定, 该不定 LQ 问题也可能适定. 如果 $G_k$ 为奇异阵, 我们可以对其求 Pseudo 广义逆, 而且所有满足式 (6) 和式 (7) 的容许控制都将最小化成本函数. 若 $G_k>0$, $G_k$ 的逆矩阵存在且惟一, 那么最优控制也是惟一的. □

但在不完全信息情况下, 我们仅能通过受扰动的测量得到当前状态的估计值. 接下来我们将利用动态规划设计 OLOF 以表明状态估计误差与之前控制的相关性. 由于在设计 OLOF 时假定将来并不做任何测量, 那么 $k$ 时刻的最优成本由下式给定:

$$J_{OL,k}=\mathrm{E}\left[\sum_{i=k}^{N-1}(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}Q_i\boldsymbol{x}_i+u_i^{\mathrm{T}}R_iu_i)+\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}Q_N\boldsymbol{x}_N\right] \tag{13}$$

**引理 2.** 若 GDRE (6) 在任意时刻 $k$ 有解, 且 $G_k>0$, 问题 (1) 及式 (2) 和式 (13) 的开环最优反馈控制由下式给定:

$$\boldsymbol{u}_k=-G_k^{-1}H_k\hat{\boldsymbol{x}}_k=-K_k\hat{\boldsymbol{x}}_k \tag{14}$$

**证明.** 首先考虑一步优化问题, 由于 $\mathrm{E}(x)=E_y[\mathrm{E}(x|y)]$,

$$V_1=\min_{\boldsymbol{u}(N-1)}E_{Y_{N-1},U_{N-2}}\{\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}Q_N\boldsymbol{x}_N+\boldsymbol{x}_{N-1}^{\mathrm{T}}\times Q_{N-1}\boldsymbol{x}_{N-1}+\boldsymbol{u}_{N-1}^{\mathrm{T}}R_{N-1}\boldsymbol{u}_{N-1}|Y_{N-1},U_{N-2}]\} \tag{15}$$

将系统 (1) 的 $\boldsymbol{x}_N$ 代入上式:

$$V_1=\min_{\boldsymbol{u}(N-1)}E_{Y_{N-1},U_{N-2}}\{\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-1}^{\mathrm{T}}(A_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_NA_{N-1}+\sum_{i=1}^{q}A_i^{\mathrm{T}}(N-1)Q_NA_i(N-1)+Q_{N-1})\boldsymbol{x}_{N-1}+2\boldsymbol{x}_{N-1}^{\mathrm{T}}A_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_NB_{N-1}\boldsymbol{u}_{N-1}+\boldsymbol{u}_{N-1}^{\mathrm{T}}(R_{N-1}+B_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_NB_{N-1}+\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(N-1)Q_N\times B_i(N-1))\boldsymbol{u}_{N-1}]|Y_{N-1},U_{N-2}\} \tag{16}$$

令式 (16) 中内期望关于 $\boldsymbol{u}_{N-1}$ 的导数等于零,

$$\boldsymbol{u}_{N-1}=-K_{N-1}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-1}|Y_{N-1},U_{N-2}]=-K_{N-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{N-1} \tag{17}$$

其中, $K_{N-1}$ 与式 (9) 相同. 将式 (17) 代入式 (16) 可得:

$$V_1=\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-1}^{\mathrm{T}}(A_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_NA_{N-1}+\sum_{i=1}^{q}A_i^{\mathrm{T}}(N-1)\times Q_NA_i(N-1)+Q_{N-1})\boldsymbol{x}_{N-1}-2\boldsymbol{x}_{N-1}^{\mathrm{T}}A_{N-1}^{\mathrm{T}}\times Q_NB_{N-1}K_{N-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{N-1}+\hat{\boldsymbol{x}}_{N-1}^{\mathrm{T}}K_{N-1}^{\mathrm{T}}(R_{N-1}+B_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_NB_{N-1}+\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(N-1)Q_N\times B_i(N-1))K_{N-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{N-1}] \tag{18}$$

利用下面的事实:

$$A_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_NB_{N-1}K_{N-1}=K_{N-1}^{\mathrm{T}}(R_{N-1}+B_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_N\times B_{N-1}+\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(N-1)Q_NB_i(N-1))K_{N-1} \tag{19}$$

$$\hat{x}^{\mathrm{T}}Z\hat{x}-2x^{\mathrm{T}}Z\hat{x}=\tilde{x}^{\mathrm{T}}Z\tilde{x}-x^{\mathrm{T}}Zx,\ \ \tilde{x}=x-\hat{x} \tag{20}$$

可以证明:

$$V_1=\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-1}^{\mathrm{T}}P_{N-1}\boldsymbol{x}_{N-1}+\tilde{\boldsymbol{x}}_{N-1}^{\mathrm{T}}M_{N-1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{N-1}] \tag{21}$$

$$M_{N-1}=A_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_NB_{N-1}\Big[\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(N-1)Q_N\times B_i(N-1)+R_{N-1}+B_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_NB_{N-1}\Big]^{-1}\times B_{N-1}^{\mathrm{T}}Q_NA_{N-1} \tag{22}$$

考虑两步优化问题并采用类似的处理手段,

$$V_2=\min_{\boldsymbol{u}_{N-2}}E_{Y_{N-2},U_{N-3}}\{\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-2}^{\mathrm{T}}Q_{N-2}\boldsymbol{x}_{N-2}+\boldsymbol{u}_{N-2}^{\mathrm{T}}\times R_{N-2}\boldsymbol{u}_{N-2}+V_1|Y_{N-2},U_{N-3}]\}= \tag{23}$$

$$\min_{\boldsymbol{u}_{N-2}}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-2}^{\mathrm{T}}Q_{N-2}\boldsymbol{x}_{N-2}+\boldsymbol{u}_{N-2}^{\mathrm{T}}R_{N-2}\boldsymbol{u}_{N-2}+\boldsymbol{x}_{N-1}^{\mathrm{T}}P_{N-1}\boldsymbol{x}_{N-1}]+\min_{u(N-2)}\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{N-1}^{\mathrm{T}}M_{N-1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{N-1}] \tag{24}$$

我们注意到 $V_2$ 可分为两部分, 一部分与估计误差无关, 另一部分仅与估计误差有关. 最小化 $V_2$ 的解不像 $V_1$ 那么直观, 但直觉上看, 估计误差与之前的控制有关, 也就是说最优控制具有对偶效果.

由于我们在设计 OLOF 时, 假定未来不做任何测量, 那么实际计算时, 可完全忽略未来估计误差与当前控制之间的关系. 因此, 式 (24) 中的第二项完全不受 $\boldsymbol{u}_{N-2}$ 选择的影响. 所以:

$$V_2 = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-2}^{\mathrm{T}} P_{N-2} \boldsymbol{x}_{N-2} + \tilde{\boldsymbol{x}}_{N-2}^{\mathrm{T}} M_{N-2} \tilde{\boldsymbol{x}}_{N-2}] + \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{N-1}^{\mathrm{T}} M_{N-1} \tilde{\boldsymbol{x}}_{N-1}] \tag{25}$$

$$\boldsymbol{u}_{N-2} = -K_{N-2} \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-2} | Y_{N-2}, U_{N-3}] \tag{26}$$

$$M_{N-2} = A_{N-2}^{\mathrm{T}} P_{N-1} B_{N-2} \Big[ \sum_{i=1}^{d} B_i^{\mathrm{T}}(N-2) P_{N-1} \times B_i(N-2) + R_{N-2} + B_{N-2}^{\mathrm{T}} P_{N-1} B_{N-2} \Big]^{-1} B_{N-2}^{\mathrm{T}} \times P_{N-1} A_{N-2} \tag{27}$$

利用归纳法, 若假设 $k$ 步优化时, $V_k$ 有如下形式:

$$V_k = \min_{\boldsymbol{u}_{N-k}} \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-k}^{\mathrm{T}} P_{N-k} \boldsymbol{x}_{N-k} + \tilde{\boldsymbol{x}}_{N-k}^{\mathrm{T}} \times M_{N-k} \tilde{\boldsymbol{x}}_{N-k}] + \sum_{i=N-k+1}^{N-1} \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} M_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i] \tag{28}$$

根据最优性原理

$$V_{k+1} = \min_{\boldsymbol{u}_{N-k-1}} \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-k-1}^{\mathrm{T}} P_{N-k-1} \boldsymbol{x}_{N-k-1} + \boldsymbol{u}_{N-k-1}^{\mathrm{T}} R_{N-k-1} \boldsymbol{u}_{N-k-1} + V_k] \tag{29}$$

应用系统 (1) 和 GDRE (6) 可得:

$$V_{k+1} = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{N-k-1}^{\mathrm{T}} P_{N-k-1} \boldsymbol{x}_{N-k-1} + \tilde{\boldsymbol{x}}_{N-k-1}^{\mathrm{T}} \times M_{N-k-1} \tilde{\boldsymbol{x}}_{N-k-1}] + \sum_{i=N-k}^{N-1} \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} M_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i] \tag{30}$$

$$M_{N-k-1} = A_{N-k-1}^{\mathrm{T}} P_{N-k} B_{N-k-1} [B_{N-k-1}^{\mathrm{T}} P_{N-k} \times B_{N-k-1} + R_{N-1} + \sum_{i=1}^{d} B_i^{\mathrm{T}}(N-k-1) P_{N-k} \times B_i(N-k-1)]^{-1} B_{N-k-1}^{\mathrm{T}} P_{N-k} A_{N-k-1} \tag{31}$$

施加 OLOF 控制时, $k$ 时刻的最优成本为

$$V_k = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} P_k \boldsymbol{x}_k + \tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}} M_k \tilde{\boldsymbol{x}}_k] + \sum_{i=k+1}^{N-1} \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} M_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i] \tag{32}$$

$$M_k = H_k^{\mathrm{T}} G_k^{-1} H_k$$

$$\boldsymbol{u}_k = -K_k \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k | Y_k, U_{k-1}] = -K_k \hat{\boldsymbol{x}}_k \tag{33}$$

此时, 利用 Kalman-Bucy 策略设计线性最优滤波器

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = A_k \hat{\boldsymbol{x}}_k - B_k K_k \hat{\boldsymbol{x}}_k + F_k \{ y_{k+1} - C_{k+1} \times [A_k \hat{\boldsymbol{x}}_k - B_k K_k \hat{\boldsymbol{x}}_k] \} \tag{34}$$

$$F_k = \mathcal{P}_{k+1|k} C_{k+1}^{\mathrm{T}} [C_{k+1} \mathcal{P}_{k+1|k} C_{k+1}^{\mathrm{T}} + \Omega^v]^{-1} \tag{35}$$

估计误差 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ 条件协方差为

$$\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} | \boldsymbol{x}_k, \hat{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{u}_k] = \mathrm{E}\{[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} - \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} | \boldsymbol{x}_k, \hat{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{u}_k]][\cdot]^{\mathrm{T}}\} = (I - F_k C_{k+1}) \mathrm{E} \Big[ \sum_{i=1}^{q} A_i(k) \boldsymbol{x}_k \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \times A_i^{\mathrm{T}}(k) + \sum_{i=1}^{d} B_i(k) K_k \hat{\boldsymbol{x}}_k \hat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}} K_k^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}}(k) \Big] (I - F_k \times C_{k+1})^{\mathrm{T}} + F_k \Omega^v F_k^{\mathrm{T}} \tag{36}$$

□

其中, $[\cdot]$ 为外侧中括号里内容的缩略表示, 引理 2 中的控制律与确定等价控制类似. 尽管此处已假设未来不做任何测量, 但滤波器的增益仍与 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 和 $\boldsymbol{u}_k$ 有关, 也就是说该滤波器是自适应的. 但实际上已经完全忽略了控制的对偶效果, 因此, 可能会导致 OLOF 不可用. 这也是 OLOF 控制最主要的缺点之一. 此外, 若要实现 OLOF 的最优先必须设计非线性自适应滤波器. 此类滤波器一般是非线性且无穷维的, 其设计本身就极为困难. 实际中一般用线性最小方差估计器替代, 但这样来闭环控制通常会以增加系统不确定性为代价来最小化成本函数, 甚至导致系统不稳定.

## 3　M 量测最优反馈控制

为了在控制成本和估计质量之间进行折衷, 本节提出一种 M 量测最优反馈控制. 在计算当前控制时假设未来还要进行 M 次测量, 并将当前控制对未来 M 次估计误差的影响考虑进来. 为简化起见, 假设在 $k$ 时刻之后还要进行一次测量, 并且该测量就发生在下一时刻. 那么, 一次量测成本函数如下:

$$J_{OM,k} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} Q_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}} R_k \boldsymbol{u}_k + \mathrm{E}[J_{OL,k+1}^o | Y_k, U_k] | Y_k, U_{k-1}\} \tag{37}$$

其中, $J_{OL,k+1}^o$ 为 $k+1$ 时刻的开环最优成本函数, 且与 $Y_{k+1}$ 和 $U_k$ 有关.

**定理 1.** 若 GDRE (6) 在任意时刻 $k$ 有解, 且 $G_k > 0$, 假设 $k+1$ 时刻将要进行一次测量, 问题 (1) ∼ (3) 的一步量测控制可由下式给出:

$$\boldsymbol{u}_k = -L_k \hat{\boldsymbol{x}}_k \tag{38}$$

$$\begin{cases} L_k = [R_k + B_k^{\mathrm{T}} P_{k+1} B_k + \sum\limits_{i=1}^{d} B_i^{\mathrm{T}}(k)(P_{k+1}+ \\ \quad (I - F_k' C_{k+1})^{\mathrm{T}} M_{k+1}[I - F_k' C_{k+1}])B_i(k)]^{-1} B_k^{\mathrm{T}} \\ P_{k+1} A_k M_{k+1} = H_k^{\mathrm{T}} G_k^{-1} H_k \end{cases}$$

$k$ 的最优成本函数为

$$\bar{V}_k(\boldsymbol{x}_k, \hat{\boldsymbol{x}}_k) = \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} S_k^x \boldsymbol{x}_k + \tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}} S_k^e \tilde{\boldsymbol{x}}_k + s_k \tag{39}$$

$$\begin{aligned} S_k^x =& Q_k + A_k^{\mathrm{T}} P_{k+1}(A_k - B_k L_k) + \sum_{i=1}^{q} A_i^{\mathrm{T}}(k)\times \\ & (P_{k+1} + [I - F_k C_{k+1}]^{\mathrm{T}} M_{k+1}[I - F_k C_{k+1}])\times \\ & A_i(k) \\ S_k^e =& A_k^{\mathrm{T}} P_{k+1} B_k L_k + A_k^{\mathrm{T}}[I - F_k C_{k+1}]^{\mathrm{T}} M_{k+1}\times \\ & [I - F_k C_{k+1}] A_k \\ s_k =& \mathrm{tr}[M_{k+1} F_k \Omega^v F_k^{\mathrm{T}}] + \sum_{i=k+2}^{N-1} \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} M_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i \end{aligned}$$

**证明.** 值得注意的是, 当前可用的信息仅仅是受到扰动的状态测量值. 因此, 最优控制 $\boldsymbol{u}_k$ 只能是 $k$ 时刻状态的估计值 $\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$ 的函数. 当 $k+1, \cdots, N$ 时刻控制为最优时, 令 $\bar{V}_k(\boldsymbol{x}_k, \hat{\boldsymbol{x}}_k)$ 为 $k$ 时刻的最优成本函数, 且仅能由控制 $\boldsymbol{u}_k = \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$ 得到. 由一步量测成本函数 (37) 可知:

$$\bar{V}_k(\boldsymbol{x}_k, \hat{\boldsymbol{x}}_k) = \min_{\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)} J_{OM,k}$$

由引理 2 可以看出, 式 (37) 中的 $J_{OL,k+1}^o$ 等同于式 (32) 定义的 $V_{k+1}$. 将 $J_{OL,k+1}^o$ 和 $\boldsymbol{u}_k = \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$ 代入上式:

$$\begin{aligned} & \bar{V}_k(\boldsymbol{x}_k, \hat{\boldsymbol{x}}_k) = \min_{\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)} \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} Q_k \boldsymbol{x}_k + \pi^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_k) R_k \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) + \\ & \mathrm{E}[J_{OL,k+1}^o | Y_k, U_k] | Y_k, U_{k-1}\} = \min_{\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)} \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} Q_k \boldsymbol{x}_k + \\ & \pi^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_k) R_k \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) + \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}} P_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1} + \\ & \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{\mathrm{T}} M_{k+1} \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{N-1} \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} M_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i | Y_k, U_k] | Y_k, U_{k-1}\} \end{aligned} \tag{40}$$

当施加控制 $\boldsymbol{u}_k = \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$ 后, 系统状态方程满足:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{k+1} =& A_k \boldsymbol{x}_k + B_k \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) + \sum_{i=1}^{q} A_i(k) \boldsymbol{x}_k \times \\ & W^i(k) + \sum_{i=1}^{d} B_i(k) \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) N^i(k) \end{aligned} \tag{41}$$

带控制的无偏估计器可由下式给出:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} =& A_k \hat{\boldsymbol{x}}_k + B_k \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) + F_k' \{y_{k+1} - C_{k+1}\times \\ & [A_k \hat{x}_k + B_k \pi(\hat{x}_k)]\} \end{aligned} \tag{42}$$

$$F_k' = \mathcal{P}_{k+1|k}' C_{k+1}^{\mathrm{T}} [C_{k+1} \mathcal{P}_{k+1|k}' C_{k+1}^{\mathrm{T}} + \Omega^v]^{-1} \tag{43}$$

其中, $\mathcal{P}_{k+1|k}'$ 为一步预测误差协方差. 从式 (41) 中减去式 (42) 估计误差满足下式:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} =& (I - F_k' C_{k+1}) \Big[ A_k \tilde{\boldsymbol{x}}_k + \sum_{i=1}^{q} A_i(k) \boldsymbol{x}_k W^i(k) + \\ & \sum_{i=1}^{d} B_i(k) \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) N^i(k) \Big] - F_k' v_{k+1} \end{aligned} \tag{44}$$

由状态和估计误差满足的方程可知:

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}} P_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1} | Y_k, U_k] = \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \Big[ A_k^{\mathrm{T}} P_{k+1} A_k + \\ & \sum_{i=1}^{q} A_i^{\mathrm{T}}(k) P_{k+1} A_i(k) \Big] \boldsymbol{x}_k + 2 \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} A_k^{\mathrm{T}} P_{k+1} B_k \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) + \\ & \pi^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_k) \Big[ B_k^{\mathrm{T}} P_{k+1} B_k + \sum_{i=1}^{d} B_i^{\mathrm{T}}(k) P_{k+1} B_i(k) \Big] \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{\mathrm{T}} M_{k+1} \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} | Y_k, U_k] = \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \Bigg[ \sum_{i=1}^{q} A_i^{\mathrm{T}}(k)[I - \\ & F_k' C_{k+1}]^{\mathrm{T}} M_{k+1} [I - F_k' C_{k+1}] A_i(k) \Bigg] \boldsymbol{x}_k + \pi^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_k) \times \\ & \Bigg[ \sum_{i=1}^{d} B_i^{\mathrm{T}}(k)(I - F_k' C_{k+1})^{\mathrm{T}} M_{k+1} (I - F_k' C_{k+1}) \times \\ & B_i(k) \Bigg] \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) + \tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}} A_k^{\mathrm{T}} [I - F_k' C_{k+1}]^{\mathrm{T}} M_{k+1} [I - \\ & F_k' C_{k+1}] A_k \tilde{\boldsymbol{x}}_k + \mathrm{tr}\Big[ M_{k+1} F_k' \Omega^v F_k'^{\,\mathrm{T}} \Big] \end{aligned} \tag{46}$$

将式 (45) 和式 (46) 代入式 (40), 最优成本函数为

$$\begin{aligned} & \bar{V}_k(\boldsymbol{x}_k, \hat{\boldsymbol{x}}_k) = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} [Q_k + A_k^{\mathrm{T}} P_{k+1} A_k + \\ & \sum_{i=1}^{q} A_i^{\mathrm{T}}(k)(P_{k+1} + [I - F_k' C_{k+1}]^{\mathrm{T}} M_{k+1} [I - \\ & F_k' C_{k+1}]) A_i(k)] \boldsymbol{x}_k + \mathrm{tr}[M_{k+1} F_k' \Omega^v F_k'^{\mathrm{T}}] + \\ & \tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}} A_k^{\mathrm{T}} [I - F_k' C_{k+1}]^{\mathrm{T}} M_{k+1} [I - F_k' C_{k+1}] A_k \tilde{\boldsymbol{x}}_k + \\ & 2 \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} A_k^{\mathrm{T}} P_{k+1} B_k \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) + \pi^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_k)[R_k + B_k^{\mathrm{T}} P_{k+1} B_k + \\ & \sum_{i=1}^{d} B_i^{\mathrm{T}}(k)(P_{k+1} + [I - F_k' C_{k+1}]^{\mathrm{T}} M_{k+1} [I - \\ & F_k' C_{k+1}]) B_i(k)] \pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k) + \\ & \sum_{i=k+2}^{N-1} \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} M_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i | Y_k, U_{k-1}\} \end{aligned} \tag{47}$$

其中, $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹, $F'_k$ 为无偏估计器 (42) 的滤波增益. 由式 (47) 可以看出, 期望的前两项不包含 $\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$, 第三项是当前估计误差的二次型函数. 由于我们是在当前时刻估计之后施加控制, 因此期望中的第三项也不会受 $\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$ 影响. 最后一项表示从 $k+2$ 时刻到终端时刻的估计误差之和. 因为假设当前控制仅能影响下一时刻的估计误差, 所以该项也不受 $\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$ 的影响. 因此, 我们可以总结得到, 前三项和最后一项均与当前时刻控制无关. $\bar{V}_k$ 关于 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 求条件数学期望可知:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\bar{V}_k(\boldsymbol{x}_k,\hat{\boldsymbol{x}}_k)|\hat{\boldsymbol{x}}_k]=\mathrm{const}+2\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}A_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}B_k\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)+\\&\pi^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_k)[R_k+B_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}B_k+\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(k)(P_{k+1}+[I-\\&F'_kC_{k+1}]^{\mathrm{T}}M_{k+1}[I-F'_kC_{k+1}])B_i(k)]\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)\end{aligned}\tag{48}$$

令式 (48) 关于 $\pi(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$ 的导数为零, $k$ 时刻的最优控制律为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_k=-L_k\hat{\boldsymbol{x}}_k=-[R_k+B_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}B_k+\\&\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(k)(P_{k+1}+[I-F'_kC_{k+1}]^{\mathrm{T}}M_{k+1}[I-\\&F'_kC_{k+1}])B_i(k)]^{-1}B_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}A_k\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k|Y_k,U_{k-1}]\end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{u}_k$ 用于求最优成本并结合式 (19) 和式 (20) 可得:

$$\begin{aligned}&\bar{V}_k(\boldsymbol{x}_k,\hat{\boldsymbol{x}}_k)=\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}[Q_k+A_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}(A_k-B_kL_k)+\\&\sum_{i=1}^{q}A_i^{\mathrm{T}}(k)(P_{k+1}+[I-F'_kC_{k+1}]^{\mathrm{T}}M_{k+1}[I-\\&F'_kC_{k+1}])A_i(k)]\boldsymbol{x}_k+\tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}[A_k^{\mathrm{T}}P_{k+1}B_kL_k+\\&A_k^{\mathrm{T}}[I-F'_kC_{k+1}]^{\mathrm{T}}M_{k+1}[I-F'_kC_{k+1}]A_k]\tilde{\boldsymbol{x}}_k+\\&\sum_{i=k+2}^{N-1}\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}M_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i+\mathrm{tr}[M_{k+1}F_k\Omega^vF_k'^{\,\mathrm{T}}]=\\&\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}S_k^x\boldsymbol{x}_k+\tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}S_k^e\tilde{\boldsymbol{x}}_k+s_k\end{aligned}\tag{49}$$

$k-1$ 时刻 OLOF 成本函数 $V_k$ 符合引理 2 中的形式.

$$V_k=\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}P_k\boldsymbol{x}_k+\tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}M_k\tilde{\boldsymbol{x}}_k+\sum_{i=k+1}^{N-1}\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}M_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i]$$

采用相同的设计过程可得:

$$\begin{aligned}&u_{k-1}=-L_{k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}=-\{R_{k-1}+B_{k-1}^{\mathrm{T}}P_kB_{k-1}+\\&\sum_{i=1}^{d}B_i^{\mathrm{T}}(k-1)[P_k+(I-F'_{k-1}C_k)^{\mathrm{T}}M_k(I-F'_{k-1}\times\\&C_k)]B_i(k)\}^{-1}B_{k-1}^{\mathrm{T}}P_kA_{k-1}\mathrm{E}[x_{k-1}|Y_{k-1},U_{k-2}]\end{aligned}\tag{50}$$

$$\begin{aligned}&\bar{V}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1},\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})=\boldsymbol{x}_{k-1}^{\mathrm{T}}\{Q_{k-1}+A_{k-1}^{\mathrm{T}}P_k(A_{k-1}-\\&B_{k-1}L_{k-1})+\sum_{i=1}^{q}A_i^{\mathrm{T}}(k-1)[P_k+(I-F'_{k-1}C_k)^{\mathrm{T}}\times\\&M_k(I-F'_{k-1}C_k)]A_i(k-1)\}\boldsymbol{x}_{k-1}+\tilde{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{\mathrm{T}}[A_{k-1}^{\mathrm{T}}\times\\&P_kB_{k-1}L_{k-1}+A_{k-1}^{\mathrm{T}}(I-F'_{k-1}C_k)^{\mathrm{T}}M_k(I-F'_{k-1}\times\\&C_k)A_{k-1}]\tilde{\boldsymbol{x}}_{k-1}+\sum_{i=k+1}^{N-1}\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}M_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i+\mathrm{tr}[M_kF'_{k-1}\Omega^v\times\\&F_{k-1}'^{\,\mathrm{T}}]=\boldsymbol{x}_{k-1}^{\mathrm{T}}S_{k-1}^x\boldsymbol{x}_{k-1}+\tilde{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{\mathrm{T}}S_{k-1}^e\tilde{\boldsymbol{x}}_{k-1}+s_{k-1}\end{aligned}\tag{51}$$

在终端时刻 $k=N$, 最优成本为 $\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}Q_N\boldsymbol{x}_N$, 因此 $V_N$ 也满足定理 1 给出的形式, 其中, $S_N^x=Q_N, S_N^e=0, s_N=0$. □

与一步量测最优控制相比, 若假设未来不做任何测量 ($M=0$), 定理 1 中的控制将退化为引理 2 中的 OLOF 控制; 另一种特殊情况就是当系统完全可观测时, 定理 1 的控制等同于确定等价控制, 其中, $S_k^x=P_k, S_k^e=0$. 当 $M$ 等于实际剩余的测量数时, 所得到的结果就是真正的最优控制. 然而正如文献 [14] 中所言, 此时估计误差的条件协方差是之前所有控制的二次函数, 其计算极为复杂.

根据式 (44) 可计算出 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ 的条件协方差为

$$\begin{aligned}&\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k,\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{u}_k]=\mathrm{E}\{[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}-\\&\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k,\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{u}_k]][\cdot]^{\mathrm{T}}\}=(I-F'_kC_{k+1})\times\\&\mathrm{E}\Big[\sum_{i=1}^{q}A_i(k)\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}(k)+\\&\sum_{i=1}^{d}B_i(k)L_k\hat{\boldsymbol{x}}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}L_k^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}(k)\Big](I-F'_kC_{k+1})^{\mathrm{T}}+\\&F'_k\Omega^vF_k'^{\,\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{52}$$

其中, $[\cdot]$ 为外侧中括号里内容的缩略表示

## 4 仿真算例

仿真算例采用了一时不变双线性随机系统:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{k+1}&=A\boldsymbol{x}_k+B\boldsymbol{u}_k+A_1\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{\xi}_k+B_1\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{\beta}_k\\y_k&=C\boldsymbol{x}_k+v\end{aligned}$$

初始状态为

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0.4692\\-0.2591\end{bmatrix}$$

系数矩阵如下:

$$A=\begin{bmatrix}0.9501&-0.6068\\0.2311&0.4860\end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}0.8913&-0.4565\\0.7621&0.0185\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0.6989\\0.3784\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}0.8998\\-0.8216\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-0.5681 & 0.7027\\0.3704 & 0.5466\end{bmatrix}$$

成本函数中状态加权矩阵正定, 控制加权矩阵负定.

$$Q=\begin{bmatrix}1.0000 & 0\\0 & 0.5000\end{bmatrix},\ R=-0.2523$$

$\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\beta}$ 和 $v$ 互不相关并分别满足:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\xi}_i)=\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}_i)=\mathrm{E}(v_i)=0$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_j^{\mathrm{T}})=\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_j^{\mathrm{T}})=\mathrm{E}(v_iv_j^{\mathrm{T}})=$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}$$

采用 Matlab 7 分别对开环最优反馈控制和一步量测反馈控制进行了仿真, 并在初始条件和噪声相同的情况下对二者进行比较. 根据仿真结果, 我们重点关注了一步量测算法能有效改善估计精度的特点.

仿真算法的简略步骤如下:

1) 设定式 (42) 中滤波器增益 $F_k'$ 初始值为 0, 此时可根据式 (38) 计算开环最优控制增益序列 $L_k$;

2) 利用 1) 计算出的 $L_k$ 重新计算 $F_k'$;

3) 利用 2) 中得到的 $F_k'$ 重新计算 $L_k$;

4) 重复 1) ~ 3), 直至算法收敛;

5) 从初始时刻迭代计算并应用 $L_k$ 和 $F_k'$.

图 1 和图 2 表明, 采用一步量测反馈控制之后的滤波器估计误差更小, 收敛速度更快.

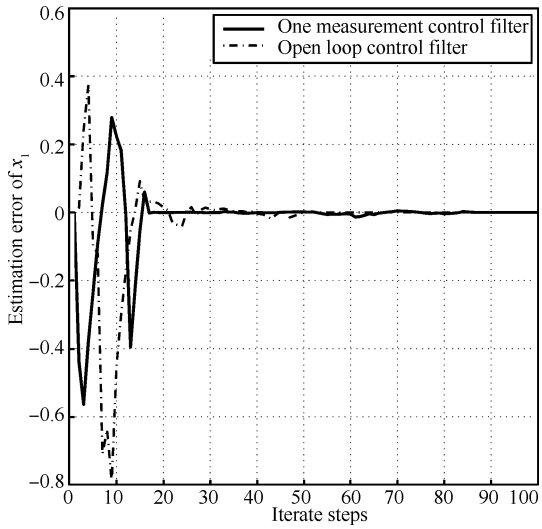



图 1 一维估计误差

Fig. 1 Estimation errors of $x_1$

图 3 表明一步量测反馈控制能有效降低估计误差的协方差. 发生此现象的原因是一步量测控制能够中心化测量值的条件分布, 从而实现更精确的测量. 因此, 在计算当前控制的同时考虑其对未来测量的影响, 能够有效降低估计的不确定性, 从而取得较大收益.

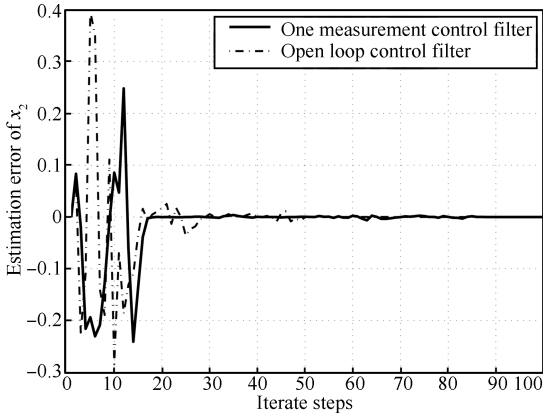



图 2 二维估计误差

Fig. 2 Estimation errors of $x_2$

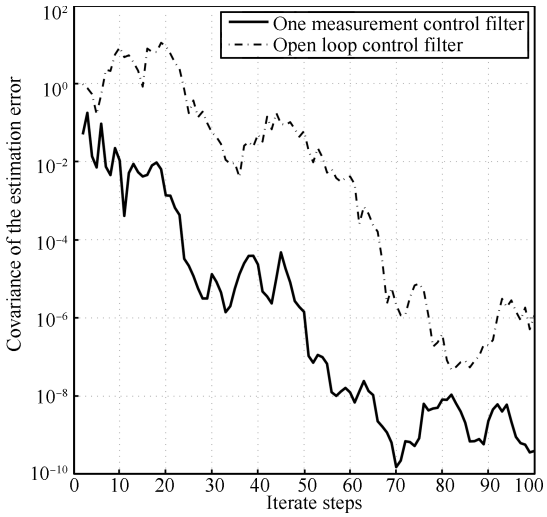



图 3 估计误差条件协方差对数曲线

Fig. 3 Log curves of the conditional covariance of the estimation errors

## 5 结论

本文给出了一种能够将未来测量结合到当前控制计算中的 BLSS 一步量测反馈控制设计方法. 该控制的两种极限形式分别是目前广泛采用的确定等价控制和真正的随机最优控制. 与完全忽略控制对偶效果的确定等价控制相比, 这种次优控制算法更接近对偶控制, 从而有效提高了状态估计的精度. 在将来的工作中, 我们将进一步研究将未来多步测量结合到当前控制计算中的 BLSS 控制设计问题. 本文中提出的概念还可以进一步扩展用于简化某些复杂问题的控制设计. 例如, 对于本文所考虑的双线性随机系统, 可假设仅未来几步存在乘性噪声, 从而得到便于实际应用的次优解.

## References


1 Maclane P J. Optimal stochastic control of linear systems with state and control-dependent disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, **16**(6): 793−798

2 Kleinman D L. Optimal stationary control of linear systems with control-dependent noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, **14**(6): 673−677

3 Dragan V, Morozan T, Stoica A. $H_2$ optimal control for linear stochastic systems. *Automatica*, 2004, **40**(7): 1103−1113

4 Gershon E, Shaked U. $H_\infty$ output-feedback control of discrete-time systems with state-multiplicative noise. *Automatica*, 2008, **44**(2): 574−579

5 Hassibi B, Sayed A H, Kailath T. *Indefinite-quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to $H_2$ and $H_\infty$ Theories*. New York: SIAM, 1998

6 Wang Guang-Chen, Wu Zhen. Stochastic maximum principle for a kind of risk-sensitive optimal control problem and application to portfolio choice. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(10): 1043−1047
(王光臣, 吴臻. 一个风险敏感最优控制问题的随机最大值原理及在投资选择中的应用. 自动化学报, 2007, **33**(10): 1043−1047)

7 Cui Peng, Zhang Cheng-Hui. Indefinite linear quadratic optimal control problem for singular linear discrete-time system: Krein space method. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(6): 635−640
(崔鹏, 张承慧. 线性离散奇异系统的不定二次最优控制问题: Krein 空间方法. 自动化学报, 2007, **33**(6): 635−640)

8 Zhao Hong-Guo, Zhang Huan-Shui, Zhang Cheng-Hui. Optimal robust estimation for linear uncertain systems with single delayed measurement. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(2): 202−207
(赵洪国, 张焕水, 张承慧. 单观测时滞线性不确定系统最优鲁棒估计. 自动化学报, 2008, **34**(2): 202−207)

9 Qi Jun-Jun, Zhang Wei-Hai. Discrete-time indefinite stochastic LQ optimal control: infinite horizon case. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(5): 613−617
(祁军军, 张维海. 离散时间不定号随机线性二次型最优控制: 无限时区情形. 自动化学报, 2009, **35**(5): 613−617)

10 Chen S P, Li X J, Zhou X Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1998, **36**(5): 1685−1702

11 Rami M A, Zhou X Y. Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(6): 1131−1143

12 Rami M A, Chen X, Zhou X Y. Discrete-time indefinite LQ control with state and control dependent noises. *Journal of Global Optimization*, 2002, **23**(3−4): 245−265

13 Peng S G. A general stochastic maximum principle for optimal control problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1990, **28**(4): 966−979

14 Feldbaum A. *Optimal Control Systems*. New York: Academic Press, 1965

15 Alspach D L. A dual control for linear systems with control dependent plant and measurement noise. In: Proceedings of the 1973 IEEE Conference on Decision and Control including the 12th Symposium on Adaptive Processes. San Diego, USA: IEEE, 1973. 681−689

16 Bar-Shalom Y, Tse E. Dual effect, certainty equivalence, and separation in stochastic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, **19**(5): 494−500

17 Filatov N M, Unbehauen H. Survey of adaptive dual control methods. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 2002, **147**(1): 118−128

18 Li D, Qian F C, Fu P L. Variance minimization approach for a class of dual control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(12): 2010−2020

19 Lee J M, Lee J H. An approximate dynamic programming based approach to dual adaptive control. *Journal of Process Control*, 2009, **19**(5): 859−864

20 Todorov E. Stochastic optimal control and estimation methods adapted to the noise characteristics of the sensorimotor system. *Neural Computation*, 2005, **17**(5): 1084−1108

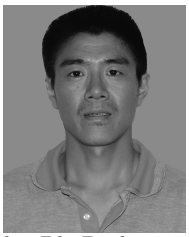
21 Carravetta F, Mavelli G. Suboptimal stochastic linear feedback control of linear systems with state- and control-dependent noise: the incomplete information case. *Automatica*, 2007, **43**(5): 751−757

22 Curry R. A new algorithm for suboptimal stochastic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, **14**(5): 533−536

23 Chen S, Yong J. Stochastic linear quadratic optimal control problems. *Applied Mathematics and Optimization*, 2001, **43**(1): 21−45

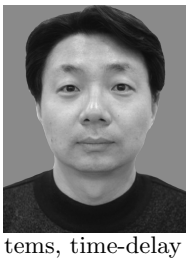
24 Dragan V, Morozan T, Stoica A M. Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems. New York: Springer, 2006. 50

25 Moore J B, Zhou X Y, Lim A E B. Discrete time LQG controls with control dependent noise. *System and Control Letters*, 1999, **36**(3): 199−206


**邢国靖** 山东大学控制科学与工程学院工程师. 2011 年获得山东大学控制科学与工程学院博士学位. 主要研究方向为最优控制, 随机系统, 切换系统.
E-mail: xgjsdu@sdu.edu.cn
(**XING Guo-Jing** Engineer at the School of Control Science and Engineering, Shandong University. He received his Ph. D. degree at the School of Control Science and Engineering, Shandong University in 2011. His research interest covers optimal control, stochastic systems, and switching systems.)

**张承慧** 山东大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向为工程最优控制, 自适应控制, 可再生能源. 本文通信作者.
E-mail: zchui@sdu.edu.cn
(**ZHANG Cheng-Hui** Professor at the School of Control Science and Engineering, Shandong University. His research interest covers engineering optimal control, adaptive control, and renewable energy. Corresponding author of this paper.)


**崔 鹏** 山东大学控制科学与工程学院副教授. 主要研究方向为奇异系统, 时滞系统, 最优控制.
E-mail: cuipeng@sdu.edu.cn
(**CUI Peng** Associate professor at the School of Control Science and Engineering, Shandong University. His research interest covers descriptor systems, time-delay systems, and optimal control.)