卫星编队飞行的鲁棒自适应控制方法

董晓光 [1] 曹喜滨 [1] 张锦绣 [1] 施 梨 [1]

摘 要 研究了主从式框架下编队飞行的相对控制问题. 首先推导了描述主从星相对运动的完整非线性动力学模型, 利用完整模型的无摄动形式提出了最优参考轨迹生成问题, 并应用高斯伪谱法将此问题转换成非线性规划问题, 使其可以数值求解; 基于 Lyapunov 方法设计了闭环系统的鲁棒自适应控制器, 在存在未知干扰、未知主星轨道参数与控制以及未知从星质量的情况下, 仅利用相对状态测量即能够保证闭环系统的参考轨迹跟踪误差和参数估计误差全局一致最终有界, 并证明了跟踪误差的最终界可以通过选取合理的控制器参数使其任意小; 最后给出了具体的仿真场景验证了本文主要结果的有效性.

关键词 编队飞行, 鲁棒自适应, 参数估计, 最终有界, 轨迹规划, 伪谱法

引用格式 董晓光, 曹喜滨, 张锦绣, 施梨. 卫星编队飞行的鲁棒自适应控制方法. 自动化学报, 2013, **39**(2): 132−141

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00132

A Robust Adaptive Control Law for Satellite Formation Flying

DONG Xiao-Guang[1] CAO Xi-Bin[1] ZHANG Jin-Xiu[1] SHI Li[1]

Abstract This paper considers the relative control problem of earth-orbiting formations based on the leader-follower scheme. The full nonlinear dynamics describing the relative motion between the leader and the follower are derived. The non-perturbed form of the full dynamics is utilized to formulate the optimal reference trajectory generation problem which is transformed into a nonlinear programming problem for numerical solution by Gauss pseudospectral method. A robust adaptive controller is designed based on the Lyapunov method. Despite the presence of unknown disturbance, unknown reference orbit parameters, unknown control of the leader, and unknown mass of the follower, this controller can guarantee the global uniform ultimate boundedness of the closed-loop system using only relative measurements. The ultimate bound of the tracking error can be made arbitrarily small by proper choice of controller parameters. Simulation results are presented to illustrate the efficiency of the main results in this paper.

Key words Formation flying, robust adaptive, parameter estimation, ultimate boundedness, trajectory generation, pseudospectral method

Citation Xiao-Guang Dong, Xi-Bin Cao, Jin-Xiu Zhang, Li Shi. A robust adaptive control law for satellite formation flying. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(2): 132−141

多颗小卫星编队飞行作为替代传统大卫星的方案受到了国内外的广泛关注, 自主的相对控制是实现卫星编队飞行的关键技术, 而编队飞行的复杂性对控制器设计带来了很大的挑战, 因此国内外学者在此领域展开了大量研究, 目前的编队控制技术主要基于星间相对运动的两种描述方法, 即基于相对位置和速度的描述 (典型代表为 CW 方程)[1] 和基于轨道根数差的描述[2], 后者多用于编队问题的分析, 前者由于其物理含义更为直观, 因此被广泛用于控制器设计. 由于 CW 方程要求参考轨道为圆或者近圆轨道, 且其在推导过程中对非线性项进行了线性化, 加之 CW 方程未考虑摄动因素的影响, 因此基于 CW 方程设计的控制器可能会造成额外的燃料消耗且无法为高精度任务提供足够的性能, 为此, 近几年学者开始基于描述相对运动的完整非线性动力学模型来设计控制器, de Queiroz 等[3] 首先利用完整的动力学模型设计了非线性自适应控制器, 在干扰为未知常量的假设下, 证明了闭环系统跟踪误差的全局渐近收敛; Wong 等[4] 利用 Euler-Lagrange 方法推导得到了相同的动力学模型, 给出的自适应控制器在主从星质量未知且受到周期已知但幅值未知的干扰的情况下, 保证跟踪误差的渐近收敛; Liu 等[5] 在从星质量未知且受到未知常值干扰的情况下, 推导了自适应同步控制器, 可以保证跟踪误差与同步误差的渐近收敛; Wong 等[6] 基于完整的动力学模型设计了非线性的自适应控制器, 在主星不进行轨道控制的前提下, 证明了闭环系统位置跟踪误差的渐近收敛; Lima 等[7] 利用 Lyapunov 方法设计了结合后步法的自适应控制律, 主星运行于理想开

收稿日期 2011-11-11 录用日期 2012-06-05
Manuscript received November 11, 2011; accepted June 5, 2012
国家自然科学基金 (11002040) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (11002040)
本文责任编委 周军
Recommended by Associate Editor ZHOU Jun
1. 哈尔滨工业大学卫星技术研究所 哈尔滨 150080
1. Research Center of Spacecraft Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080
该文的英文版同时发表在*Acta Automatica Sinica*, vol. 39, no. 2, pp.132-141, 2013.

普勒轨道, 在从星推力器存在推力幅值和安装角度误差的情况下完成对参考轨迹的跟踪. 上述文献给出的控制器或需要主星绝对轨道信息等额外测量或需要假设干扰为常值或周期, 由此设计的控制器应用于实际任务中时可能导致性能下降, 从而限制了控制器的应用. 梅杰等[8] 针对近距离航天器的相对运动, 推导了跟踪星体坐标系下的相对运动动力学模型, 设计了一种鲁棒自适应控制律, 可以在转动惯量无法精确得到且存在有界干扰的情况下保证系统全局一致最终有界, 由于动力学模型在跟踪星体坐标系下给出, 从而要求跟踪星的姿态角速度不能过大; Pongvthithum 等[9] 给出了只利用相对状态测量进行控制的自适应控制器, 由于控制器中含有自适应增益的高阶项, 过高的增益要求控制周期较小, 否则容易导致系统的不稳定, 且由于其选择了相对速度而不是相对速度误差进行反馈, 因此对于具有较大相对速度的参考轨迹跟踪性能较差, 且控制输出较大, 甚至无法完成跟踪.

对于编队飞行任务, 参考轨迹跟踪误差与燃料消耗是两个主要关注因素, 二者在很大程度上取决于控制器设计和所需跟踪的参考轨迹, 而上述文献都没有涉及最优参考轨迹的生成问题.

本文综合研究了编队飞行最优相对参考轨迹的生成与鲁棒自适应控制器设计问题, 在只能获取星间相对状态测量的情况下, 保证了闭环系统的全局一致有界, 且参考轨迹跟踪误差的界可以通过选取恰当的控制器参数使其任意小. 内容安排如下: 第 1 节给出了主从式框架下描述星间相对运动的完整动力学模型; 第 2 节给出了本文的主要结果, 首先提出了最优参考轨迹生成问题, 此问题可以应用高斯伪谱法转换成非线性规划问题进行数值求解, 然后推导了对参考轨迹的跟踪误差模型, 分析了影响跟踪误差的几种因素, 在从星质量未知但其下界已知、主从星所受扰动未知且主星轨道参数未知的情况下, 设计了鲁棒自适应控制器, 并证明了闭环系统跟踪误差的全局一致有界; 第 3 节给出了具体的仿真场景, 对本文的主要结果进行了验证分析; 最后给出了本文的结论.

1　动力学模型

本节推导主从式框架下描述星间相对运动的非线性动力学方程. 图 1 给出了地球轨道编队飞行示意图, 其中, 地心惯性坐标系 $\{\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{y}_I, \boldsymbol{z}_I\}$ 的原点固定于地心, $\boldsymbol{r}_l$ 和 $\boldsymbol{r}_f$ 分别是主星和从星在惯性坐标系中的位置矢量, 参考轨道坐标系 $\{\boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{y}_l, \boldsymbol{z}_l\}$ 的原点固定于主星的质心, $\boldsymbol{x}_l$ 和 $\boldsymbol{r}_l$ 方向一致, $\boldsymbol{z}_l$ 与主星轨道角速度方向一致, $\boldsymbol{y}_l$ 的方向符合右手坐标系定义, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}_f - \boldsymbol{r}_l$ 代表从星相对于主星的位置矢量. 主星和从星在惯性系中的运动可以用如下的动力学方程描述:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_l^{(I)} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}_l}{\|\boldsymbol{r}_l\|^3} + \frac{\boldsymbol{u}_l}{m_l} + \frac{\boldsymbol{F}_{dl}}{m_l} \tag{1}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_f^{(I)} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}_f}{\|\boldsymbol{r}_f\|^3} + \frac{\boldsymbol{u}_f}{m_f} + \frac{\boldsymbol{F}_{df}}{m_f} \tag{2}$$

其中, μ 为地球引力常数, m_l 和 m_f 分别为主从星的质量, $\boldsymbol{u}_l$ 和 $\boldsymbol{u}_f$ 分别为主从星的控制力, $\boldsymbol{F}_{dl}$ 和 $\boldsymbol{F}_{df}$ 分别为主从星受到的空间扰动, 包括地球引力摄动、日月三体引力摄动、大气阻力与太阳光压等, 上标 (I) 表示在惯性坐标系中求导.

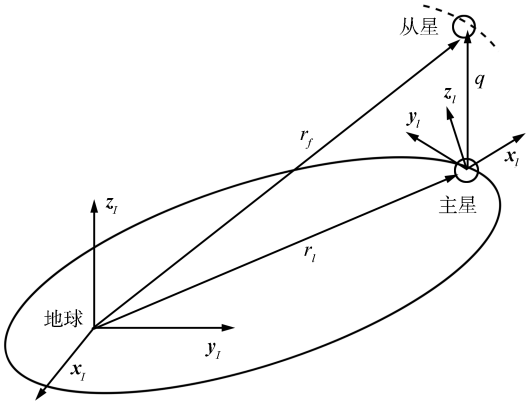


图 1　编队示意图

Fig. 1　Schematic drawing of the formation

式 (2) 减去式 (1) 可以得到惯性系下从星相对于主星的动力学方程:

$$\ddot{\boldsymbol{q}}^{(I)} = -\left(\frac{\mu \boldsymbol{r}_f}{\|\boldsymbol{r}_f\|^3} - \frac{\mu \boldsymbol{r}_l}{\|\boldsymbol{r}_l\|^3}\right) + \frac{\boldsymbol{u}_f}{m_f} - \frac{\boldsymbol{u}_l}{m_l} + \frac{\boldsymbol{F}_d}{m_f} \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{F}_d$ 为主从星所受到的空间扰动的合成项:

$$\boldsymbol{F}_d = \boldsymbol{F}_{df} - \frac{m_f}{m_l}\boldsymbol{F}_{dl} \tag{4}$$

将式 (3) 中惯性系求导转换到参考轨道坐标系, 可得:

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{q}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{q} = \\ -\left(\frac{\mu \boldsymbol{r}_f}{\|\boldsymbol{r}_f\|^3} - \frac{\mu \boldsymbol{r}_l}{\|\boldsymbol{r}_l\|^3}\right) + \frac{\boldsymbol{u}_f}{m_f} - \frac{\boldsymbol{u}_l}{m_l} + \frac{\boldsymbol{F}_d}{m_f}\end{aligned} \tag{5}$$

其中, $\boldsymbol{\omega}$ 是参考轨道坐标系相对于惯性系的角速度, 式 (5) 中各矢量在参考轨道坐标系下的分量形式可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q} &= [x, y, z]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\omega} &= [0, 0, \dot{\theta}]^{\mathrm{T}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= [0, 0, \ddot{\theta}]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{r}_l &= [r_l, 0, 0]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{6}$$

其中, θ 为主星的升交角距.

2 主要结果

2.1 最优参考轨迹生成

最优轨迹生成问题一般可以转换成对应的最优控制问题, 现有文献中的地球轨道编队飞行最优轨迹生成大都基于 CW 方程[10−13], 但由于 CW 方程要求参考轨道为圆或者近圆轨道, 且其在推导过程中应用了线性化假设并忽略了空间扰动, 因此基于 CW 方程设计的最优轨迹在参考轨道偏心率较大时会出现明显的性能下降, 而完整动力学模型中的空间扰动建模非常复杂, 在进行参考轨迹规划时难以充分考虑, 基于其进行轨迹规划并不现实, 但相对运动动力学中的空间扰动项为主从星所受扰动的差分, 通常为一小量, 因此, 可以采用式 (5) 的无摄动形式进行轨迹规划, 其分量形式为

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \dot{\theta}^2 x + \ddot{\theta} y + 2\dot{\theta}\dot{y} - \\ &\quad \frac{\mu(r_l+x)}{\left[(r_l+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{r_l^2} + u_1 \\ \ddot{y} &= -\ddot{\theta} x + \dot{\theta}^2 y - 2\dot{\theta}\dot{x} - \\ &\quad \frac{\mu y}{\left[(r_l+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + u_2 \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{\left[(r_l+x)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} + u_3\end{aligned} \tag{7}$$

其中,

$$\begin{aligned}\ddot{r}_l &= r_l\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r_l^2} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}_l\dot{\theta}}{r_l}\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{u_{fx}}{m_f} \\ u_2 &= \frac{u_{fy}}{m_f} \\ u_3 &= \frac{u_{fz}}{m_f}\end{aligned} \tag{9}$$

从跟踪控制器设计角度, 为了减小跟踪误差, 一般希望生成的参考轨迹尽可能的光滑, 这要求控制输入的变化尽可能小, 此外, 连续推力器也存在推力变化率限制. 因此, 将控制作为上述系统的额外状态, 而其一阶导数作为系统的伪控制输入, 即

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= v_1 \\ \dot{u}_2 &= v_2 \\ \dot{u}_3 &= v_3\end{aligned} \tag{10}$$

通过限制伪控制输入 $\boldsymbol{v}$ 的幅值使得系统真实控制输入的变化速率位于某一事先指定的范围内.

选取增广状态 $\tilde{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}, \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}, r_l, \theta, \dot{r}_l, \dot{\theta}, \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 则编队飞行最优轨迹生成问题可以表述为: 设计 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, 满足式 (7) ∼ (10) 给出的动力学方程及初始条件

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \tag{11}$$

使得下面的代价函数取最小值:

$$J = \lambda(t_f - t_0) + \int_{t_0}^{t_f} (1-\lambda)\boldsymbol{u}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t \tag{12}$$

同时满足如下的终端约束和路径约束:

$$\boldsymbol{E}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0), \tilde{\boldsymbol{x}}(t_f), t_0, t_f) \le 0 \tag{13}$$

$$\boldsymbol{H}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{v}(t)) \le 0 \tag{14}$$

其中, 终端约束可以包括起点和终点约束以及过渡时间约束等, 路径约束可以包括推力幅值约束、碰撞规避约束以及构型约束等. 上面得到的最优轨迹生成问题是一个无限维优化问题, 不能直接采用数值方法进行求解, 可采用高斯伪谱方法将其转换为有限维的非线性规划问题, 从而能够应用 SNOPT 等软件进行数值求解, 得到的最优状态解 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 中包含了所需要的编队飞行的最优相对轨迹 $[\boldsymbol{q}_d^{\mathrm{T}}, \dot{\boldsymbol{q}}_d^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和对应的最优控制输入 $\boldsymbol{u}_d$. 此方法一般更适合处理编队的构型初始化或构型重构问题, 若要生成类似基于 CW 方程设计的空间圆及投影圆等典型编队构型, 则需要设计复杂的构型约束.

2.2 相对控制问题描述

星间的期望相对状态轨迹即参考轨迹由 $[\boldsymbol{q}_d^{\mathrm{T}}, \dot{\boldsymbol{q}}_d^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 给出, 则跟踪误差定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e} &= \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_d \\ \dot{\boldsymbol{e}} &= \dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}_d\end{aligned} \tag{15}$$

于是可得跟踪误差动力学方程:

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{e}} &= \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{q}_d, \dot{\boldsymbol{q}}_d) + \boldsymbol{E}_d(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{q}_d, \dot{\boldsymbol{q}}_d) + \\ &\quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_l, \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{D}(t) + \frac{\boldsymbol{u}_f}{m_f}\end{aligned} \tag{16}$$

其中,

$$\boldsymbol{E}_e = \begin{bmatrix} 2\dot{\theta}\dot{e}_2 + \ddot{\theta}e_2 + \dot{\theta}^2 e_1 \\ -2\dot{\theta}\dot{e}_1 - \ddot{\theta}e_1 + \dot{\theta}^2 e_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{E}_d = \begin{bmatrix} 2\dot{\theta}\dot{y}_d + \ddot{\theta}y_d + \dot{\theta}^2 x_d - \ddot{x}_d \\ -2\dot{\theta}\dot{x}_d - \ddot{\theta}x_d + \dot{\theta}^2 y_d - \ddot{y}_d \\ -\ddot{z}_d \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{G}=\left[\begin{array}{c}-\dfrac{\mu(r_l+x)}{[(r_l+x)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\mu}{r_l^2}\\-\dfrac{\mu y}{[(r_l+x)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\\-\dfrac{\mu z}{[(r_l+x)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\end{array}\right] \tag{19}$$

$$\boldsymbol{D}=\left[\begin{array}{c}\dfrac{F_{dx}}{m_f}-\dfrac{u_{lx}}{m_l}\\\dfrac{F_{dy}}{m_f}-\dfrac{u_{ly}}{m_l}\\\dfrac{F_{dz}}{m_f}-\dfrac{u_{lz}}{m_l}\end{array}\right] \tag{20}$$

出于对控制器自主性的要求, 主星的轨道参数以及轨道维持和机动所需的控制力对从星来说是未知的, 在控制器设计中将其作为未知项处理. 因此, 由式 (16) 可知, 影响跟踪误差的主要有以下几个因素: 式 (17) 中的 $\boldsymbol{E}_e$ 与式 (18) 中的 $\boldsymbol{E}_d$ 产生于参考轨道坐标系相对于惯性系的转动及主从星间的相对状态, 由于控制器的存在, 一般可以将跟踪误差保持在较小的范围内, 因此, 对于给定的参考轨道, 主要取决于所要跟踪的参考轨迹, 由此也可以看出最优参考轨迹生成的重要性; 对于编队飞行来说, 式 (19) 中的引力差分项和式 (20) 中的扰动合成项一般为小量, 而主星的轨道控制不一定为小量, 因此要求主星轨道机动不能过快或者要求从星具有更强的轨道机动能力. 在对上述各种干扰因素进行进一步的分析之前, 做出如下有界性假设, 对实际的地球轨道编队飞行任务来说, 这些假设总是合理的.

1) 存在未知常数 M_1, 满足

$$\|\boldsymbol{q}_d\|_2+\|\dot{\boldsymbol{q}}_d\|_2+\|\ddot{\boldsymbol{q}}_d\|_2\le M_1,\ \ \forall t\ge 0 \tag{21}$$

2) 存在未知常数 M_2, 满足

$$\|\boldsymbol{u}_l\|_2+\|\boldsymbol{F}_d\|_2\le M_2,\ \ \forall t\ge 0 \tag{22}$$

3) 存在已知常数 M, 满足

$$m_f\ge M,\ \ \forall t\ge 0 \tag{23}$$

接下来利用上述假设对影响编队飞行跟踪误差的各因素的界进行分析. 首先分析参考轨道角速度和角加速度的界, 二者可以由下式给出:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{n(1+e\cos f)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \dot{\omega} &= \frac{2n^2e\sin f(1+e\cos f)^3}{(1-e^2)^3}\end{aligned} \tag{24}$$

其中, e 为参考轨道偏心率, f 为参考轨道真近角, n 为参考轨道平均角速度. 由于参考轨道半径的最小值不能小于地球半径, 可得:

$$\begin{aligned}|\dot{\theta}| &< \sqrt{\frac{2\mu}{R_\oplus^3}}\\ |\ddot{\theta}| &< \frac{2\mu}{R_\oplus^3}\end{aligned} \tag{25}$$

其中, $R_\oplus$ 为地球半径. 由假设 1 和式 (25) 可知, $\boldsymbol{E}_d$ 有界, 即存在正常数 $\lambda_E\ge 0$, 使得:

$$\|\boldsymbol{E}_d\|_2\le\lambda_E \tag{26}$$

同样, 由假设 2 可知, $\boldsymbol{D}$ 有界, 即存在正常数 $\lambda_D\ge 0$, 使得:

$$\|\boldsymbol{D}\|_2\le\lambda_D \tag{27}$$

引力差 $\boldsymbol{G}$ 的定义要求 $\boldsymbol{q}\ne-\boldsymbol{r}_l$ 且 $\|\boldsymbol{r}_l\|\ne 0$, 这一点对于实际的编队任务来说总是满足的, 于是

$$\|\boldsymbol{G}\|_2\le\frac{\mu}{\|\boldsymbol{r}_l+\boldsymbol{q}\|^2}+\frac{\mu}{\|\boldsymbol{r}_l\|^2} \tag{28}$$

可以得出 $\boldsymbol{G}$ 有界, 即存在正常数 $\lambda_G\ge 0$, 使得:

$$\|\boldsymbol{G}\|_2\le\lambda_G \tag{29}$$

令 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{x}_2=\dot{\boldsymbol{e}}$, $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 则式 (16) 可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x}+B\left(\boldsymbol{E}_e+\boldsymbol{E}_d+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{D}+\frac{\boldsymbol{u}_f}{m_f}\right)=\\ &A\boldsymbol{x}+B\left(W\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}(t)+\frac{\boldsymbol{u}_f}{m_f}\right)\end{aligned} \tag{30}$$

其中,

$$A=\left[\begin{array}{cc}0 & I_{3\times3}\\0_{3\times3} & 0\end{array}\right],B=\left[\begin{array}{c}0_{3\times3}\\I_{3\times3}\end{array}\right]$$

$$W=\left[\begin{array}{cccccc}\dot{\theta}^2 & \ddot{\theta} & 0 & 0 & 2\dot{\theta} & 0\\-\ddot{\theta} & \dot{\theta}^2 & 0 & -2\dot{\theta} & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{d}(t)=\boldsymbol{E}_d+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{D}$$

其中, $W\boldsymbol{x}$ 可以看做是回零扰动, 满足

$$\begin{aligned}\|W\boldsymbol{x}\|_2=&\left\|\left[\begin{array}{c}\dot{\theta}^2x_1+\ddot{\theta}x_2+2\dot{\theta}x_5\\-\ddot{\theta}x_1+\dot{\theta}^2x_2-2\dot{\theta}x_4\\0\end{array}\right]\right\|_2\le\\ &\sqrt{(3\dot{\theta}^4+3\ddot{\theta}^2)(x_1^2+x_2^2)+12\dot{\theta}^2x_4^2+12\dot{\theta}^2x_5^2}\le\\ &\gamma\|\boldsymbol{x}\|_2\end{aligned} \tag{31}$$

其中,

$$\gamma \geq \max\left\{\sqrt{3\dot{\theta}^4+3\ddot{\theta}^2}, \sqrt{12\dot{\theta}^2}\right\} \tag{32}$$

$\boldsymbol{d}(t)$ 有界, 满足

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{d}\|_2 \leq \|\boldsymbol{E}_d\|_2 + \|\boldsymbol{G}\|_2 + \|\boldsymbol{D}\|_2 \leq \\ \lambda_E + \lambda_G + \lambda_D = \lambda_d\end{aligned} \tag{33}$$

由于干扰和其他各种未知因素的存在, 无法设计控制器保证闭环系统跟踪误差的渐近收敛, 只能保证误差有界, 则编队飞行的相对控制问题可以描述为: 对于由式 (16) 给出的编队飞行参考轨迹跟踪误差模型, 从星质量未知但其下界已知, 主星轨道参数及轨道控制未知, 主从星所受到的空间扰动未知, 满足式 (21) ∼ (23) 给出的假设, 设计控制器 $\boldsymbol{u}_f$, 使得闭环系统的跟踪误差有界.

根据上述分析, 编队飞行的相对控制问题可以一般化为如下的控制问题:

问题 1. 对于如下的动力学系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\left[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}(t) + \frac{\boldsymbol{u}_f}{m_f}\right] \tag{34}$$

其中 (A, B) 可控, 系统的全部状态可测, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{d}(t)$ 和 m_f 未知, 存在正常数 γ、λ_d 和 M 使得:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\|_2 \leq \gamma\|\boldsymbol{x}\|_2 \\ \|\boldsymbol{d}(t)\|_2 \leq \lambda_d \\ m_f \geq M\end{aligned} \tag{35}$$

设计控制器 $\boldsymbol{u}_f$ 使得闭环系统全局一致最终有界.

2.3 鲁棒自适应控制器设计

定理 1. 问题 1 可以由如下形式的鲁棒自适应控制器解决:

$$\boldsymbol{u}_f = \hat{m}_f\boldsymbol{u} = \hat{m}_f(\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{w}) \tag{36}$$

其中, $\boldsymbol{\nu}$ 为如下受回零扰动影响的系统的渐近稳定控制器:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\left[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nu}\right] \tag{37}$$

其定义为

$$\boldsymbol{\nu} = -B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} \tag{38}$$

P 为如下 Riccati 代数方程的唯一正定对称解:

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + (\gamma^2+\sigma^2)I - PBB^{\mathrm{T}}P = 0 \tag{39}$$

$\boldsymbol{w}$ 为针对 $\boldsymbol{d}(t)$ 的干扰补偿器:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= -\beta B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} \\ \dot{\beta} &= -\varepsilon_1\alpha_1(\beta-\beta^*) + \varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBB^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{40}$$

$\hat{m}_f$ 是对未知参数 m_f 的估计值, 其更新律为

$$\dot{\hat{m}}_f = -\varepsilon_2\alpha_2(\hat{m}_f - M) - \varepsilon_2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{u} \tag{41}$$

正常数 σ、β^*、ε_1、ε_2、α_1、α_2 和 M 为控制器参数. 自适应增益 β 和参数估计值 $\hat{m}_f$ 有界, 并且通过选择合适的控制器参数能够使得闭环系统状态 $\boldsymbol{x}$ 的最终界任意小.

证明. 先假设未知参数 m_f 已知, 即 $\boldsymbol{u}_f = m_f\boldsymbol{u}$, 将其代入式 (34) 中可以得到下面的名义系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\left[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}(t) + \boldsymbol{u}\right] \tag{42}$$

式 (37) 中给出的是一个受回零扰动作用的可控线性定常系统, 对于任意选定的正定阵 $Q = (\gamma^2+\sigma^2)I$, 存在如下 Lyapunov 函数:

$$V_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} \tag{43}$$

其中, P 为如下 Riccati 代数方程的唯一正定对称解:

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + Q - PBB^{\mathrm{T}}P = 0 \tag{44}$$

(A, B) 可控能够保证上式解的存在唯一性. 系统 (37) 的控制器选择为

$$\boldsymbol{\nu} = -B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} \tag{45}$$

对 V_1 沿着式 (37) 求导, 可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left[-Q - PBB^{\mathrm{T}}P\right]\boldsymbol{x} \leq \\ 2\gamma\|B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{x}\|_2 - (\gamma^2+\sigma^2)\|\boldsymbol{x}\|_2^2 - \|B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\|_2^2 = \\ -(\gamma\|\boldsymbol{x}\|_2 - \|B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\|_2)^2 - \sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \leq \\ -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2\end{aligned} \tag{46}$$

于是, $\boldsymbol{\nu}$ 可以使得式 (37) 中的系统全局指数收敛. 将 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{w}$ 代入式 (42) 中, 可得:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\left[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) - B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\right] + B\left[\boldsymbol{d}(t) + \boldsymbol{w}\right] \tag{47}$$

选取干扰补偿器

$$\boldsymbol{w} = -\beta B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} \tag{48}$$

选择 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}V_2 = V_1 + \varepsilon_1^{-1}(\beta-\beta^*)^2 = \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} + \varepsilon_1^{-1}(\beta-\beta^*)^2\end{aligned} \tag{49}$$

对 V_2 沿式 (47) 求导, 可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left[-Q - PBB^{\mathrm{T}}P\right]\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \\ 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{w}) + 2\varepsilon_1^{-1}(\beta-\beta^*)\dot{\beta} \leq \\ -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2 + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{d} - 2\beta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBB^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} + \\ 2\varepsilon_1^{-1}(\beta-\beta^*)\dot{\beta} \leq \\ -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2 + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{d} - 2\beta^*\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBB^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} + \\ 2\varepsilon_1^{-1}(\beta-\beta^*)(\dot{\beta} - \varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBB^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{50}$$

选择自适应增益的更新律为

$$\dot{\hat{\beta}} = -\varepsilon_1\alpha_1(\beta-\beta^*)+\varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PBB^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} \tag{51}$$

可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 \le\ & -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{d}-2\beta^*\|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\|_2^2+\\ & 2\varepsilon_1^{-1}(\beta-\beta^*)\left[-\varepsilon_1\alpha_1(\beta-\beta^*)\right]\le\\ & -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2-2\alpha_1(\beta-\beta^*)^2+\frac{\|\boldsymbol{d}\|_2^2}{2\beta^*}\le\\ & -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2-2\alpha_1(\beta-\beta^*)^2+\frac{\lambda_d^2}{2\beta^*}\end{aligned} \tag{52}$$

则闭环系统 (47) 全局一致最终有界, 且可以通过设计合适的 σ、α_1 和 β^* 使界任意小.

由于参数 m_f 实际上未知, 还需要设计参数估计器, 定义 m_f 的估计误差为

$$\tilde{m}_f = \hat{m}_f - m_f \tag{53}$$

将 $\boldsymbol{u}_f = \hat{m}_f(\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{w})$ 代入式 (34) 可得:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} =& A\boldsymbol{x}+B\left[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{d}+\frac{\hat{m}_f}{m_f}(\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{w})\right]=\\ & A\boldsymbol{x}+B\left[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{w}+\frac{\tilde{m}_f}{m_f}(\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{w})\right]\end{aligned} \tag{54}$$

定义 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}V =& V_2+\frac{\varepsilon_2^{-1}\tilde{m}_f^2}{m_f}=\\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}+\varepsilon_1^{-1}(\beta-\beta^*)^2+\frac{\varepsilon_2^{-1}\tilde{m}_f^2}{m_f}\end{aligned} \tag{55}$$

对 V 沿式 (54) 求导, 可得:

$$\begin{aligned}\dot{V} =& \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left[-Q-PBB^{\mathrm{T}}P\right]\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})+\\ & 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{w})+2\varepsilon_1^{-1}(\beta-\beta^*)\dot{\beta}+\\ & 2\frac{\tilde{m}_f}{m_f}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{u}+\frac{2\varepsilon_2^{-1}\tilde{m}_f\dot{\hat{m}}_f}{m_f}\le\\ & -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2-2\alpha_1(\beta-\beta^*)^2+\frac{\lambda_d^2}{2\beta^*}+\\ & 2\frac{\tilde{m}_f}{m_f}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{u}+\frac{2\varepsilon_2^{-1}\tilde{m}_f\dot{\hat{m}}_f}{m_f}\end{aligned} \tag{56}$$

选择参数估计律为

$$\dot{\hat{m}}_f = -\varepsilon_2\alpha_2(\hat{m}_f-M)-\varepsilon_2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB\boldsymbol{u} \tag{57}$$

可得:

$$\begin{aligned}\dot{V} \le\ & -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2-2\alpha_1(\beta-\beta^*)^2+\frac{\lambda_d^2}{2\beta^*}-\\ & \frac{2\alpha_2\tilde{m}_f(m_f+\tilde{m}_f-M)}{m_f}=\\ & -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2-2\alpha_1(\beta-\beta^*)^2-\frac{2\alpha_2\tilde{m}_f^2}{m_f}+\\ & \frac{\lambda_d^2}{2\beta^*}-\frac{2\alpha_2\tilde{m}_f(m_f-M)}{m_f}\le\\ & -\sigma^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2-2\alpha_1(\beta-\beta^*)^2-\frac{\alpha_2\tilde{m}_f^2}{m_f}+\\ & \frac{\lambda_d^2}{2\beta^*}+\frac{\alpha_2(m_f-M)^2}{m_f}\end{aligned} \tag{58}$$

可以得到, 闭环系统全局一致有界, 下面还需进一步确定跟踪误差的最终界. 首先选择由式 (34)、(45)、(48)、(51) 及 (57) 构成的增广闭环系统的状态向量为

$$\boldsymbol{X} = \left[\sigma\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \beta-\beta^*, \tilde{m}_f-M\right]^{\mathrm{T}} \tag{59}$$

于是

$$W_1(\|\boldsymbol{X}\|_2)\le V(\boldsymbol{X})\le W_2(\|\boldsymbol{X}\|_2) \tag{60}$$

其中, $W_1(\cdot)$ 和 $W_2(\cdot)$ 为 K_∞ 类函数:

$$\begin{aligned}W_1(r) &= w_1r^2,\quad w_1=\min\left(\frac{\lambda_n(P)}{\sigma^2},\varepsilon_1,\frac{\varepsilon_2^{-1}}{m_f}\right)\\ W_2(r) &= w_2r^2,\quad w_2=\max\left(\frac{\lambda_1(P)}{\sigma^2},\varepsilon_1,\frac{\varepsilon_2^{-1}}{m_f}\right)\end{aligned} \tag{61}$$

其中, $\lambda_1(P)\ge\lambda_2(P)\ge\ \cdots\ge\lambda_n(P)$ 为矩阵 P 的特征值. 取常数 $0<\theta<\min(1,2\alpha_1,\alpha_2/m_f)$, 可得:

$$\begin{aligned}&\dot{V}\le -W_3(\boldsymbol{X}),\quad \forall\|\boldsymbol{X}\|_2^2\ge\eta\\ &\eta=\frac{\lambda_d^2}{2\theta\beta^*}+\frac{\alpha_2(m_f-M)^2}{\theta m_f}>0\end{aligned} \tag{62}$$

其中, $W_3(\boldsymbol{X})$ 为一连续的正定函数:

$$\begin{aligned}W_3(\boldsymbol{X}) =& (1-\theta)\|\sigma^2\boldsymbol{x}\|_2^2+\left(\frac{\alpha_2}{m_f}-\theta\right)\tilde{m}_f^2+\\ & (2\alpha_1-\theta)(\beta-\beta^*)^2\end{aligned} \tag{63}$$

根据文献 [14] 的定理 4.18 可知, 对于任意的 $\boldsymbol{X}(t_0)$, 存在 $T\ge 0$ (依赖于 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 及 η), 使得:

$$\|\boldsymbol{X}(t)\|_2\le W_1^{-1}(W_2(\eta))=\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}\eta,\ \ \forall t\ge t_0+T \tag{64}$$

即

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{w_2}{\sigma^2 w_1}}\eta,\ \ \forall t \geq t_0 + T \tag{65}$$

在进一步讨论跟踪误差的最终界之前, 需要先给出正定矩阵 P 的最大和最小特征值的界, 最小特征值的下界可以由下式给出[15]:

$$\lambda_n(P) \geq \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \rho_1\beta_n}}{\rho_1} \tag{66}$$

其中

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \sigma(A) = \sqrt{\lambda_1(A^{\mathrm{T}}A)} > 0 \\ &\rho_1 = \lambda_1(BB^{\mathrm{T}}) > 0 \\ &\beta_n = \lambda_n(Q) = (\gamma^2 + \sigma^2) \end{aligned} \tag{67}$$

于是可得:

$$\lambda_n(P) \geq \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \rho_1(\gamma^2 + \sigma^2)}}{\rho_1} \tag{68}$$

正定矩阵 P 的上界可以由文献 [16] 的定理 1 给出:

$$\begin{aligned} P \leq M^{\mathrm{T}}W^{-\mathrm{T}}\{\rho\left[(W+I)^{\mathrm{T}}(W+I)+I\right] + \\ M^{-\mathrm{T}}(Q+K^{\mathrm{T}}K)M^{-1}\}W^{-1}M \end{aligned} \tag{69}$$

其中,

$$\begin{aligned} &\rho = \frac{\lambda_1\left[W^{-\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}(Q+K^{\mathrm{T}}K)M^{-1}W^{-1}\right]}{1-\lambda_1\left\{W^{-\mathrm{T}}\left[(W+I)^{\mathrm{T}}(W+I)+I\right]W^{-1}\right\}} \\ &\quad > 0 \\ &W = M(A+BK)M^{-1} - I \end{aligned} \tag{70}$$

矩阵 K 使得 $(A+BK)$ 为一稳定矩阵, 由于 (A,B) 可控, 因此 K 总是存在的, 非奇异阵 M 使得下式成立:

$$M(A+BK)M^{-1} + M^{-\mathrm{T}}(A+BK)^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} < 0 \tag{71}$$

式 (71) 等价于

$$P_M(A+BK) + (A+BK)^{\mathrm{T}}P_M < 0 \tag{72}$$

其中 $P_M = M^{\mathrm{T}}M$, 即 M 是 P_M 的 Cholesky 分解, 由于 $(A+BK)$ 为一稳定矩阵, 因此总存在正定阵 P_M 使得式 (72) 成立, 进而总存在非奇异矩阵 M 使得式 (71) 成立, 于是可以确定式 (44) 给出的 Riccati 代数方程的正定解矩阵 P 的最大特征值的上界为

$$\begin{aligned} &\lambda_1(P) \leq \rho\lambda_1 \times \\ &\left\{M^{\mathrm{T}}W^{-\mathrm{T}}\left[(W+I)^{\mathrm{T}}(W+I)+I\right]W^{-1}M\right\} + \\ &\lambda_1(M^{\mathrm{T}}W^{-\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}QM^{-1}W^{-1}M) + \\ &\lambda_1(M^{\mathrm{T}}W^{-\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KM^{-1}W^{-1}M) \leq \\ &\rho\lambda_1(M^{\mathrm{T}}M) + (\gamma^2+\sigma^2) \times \\ &\lambda_1(M^{\mathrm{T}}W^{-\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}M^{-1}W^{-1}M) + \\ &\lambda_1(M^{\mathrm{T}}W^{-\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KM^{-1}W^{-1}M) = \\ &k_1(\gamma^2+\sigma^2) + k_2 \end{aligned} \tag{73}$$

其中, 正常数 k_1 和 k_2 分别为

$$\begin{aligned} &k_1 = \\ &\frac{\lambda_1(W^{-\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}M^{-1}W^{-1})\lambda_1(M^{\mathrm{T}}M)}{1-\lambda_1\left\{W^{-\mathrm{T}}\left[(W+I)^{\mathrm{T}}(W+I)+I\right]W^{-1}\right\}} + \\ &\lambda_1(M^{\mathrm{T}}W^{-\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}M^{-1}W^{-1}M) > 0 \\ &k_2 = \\ &\frac{\lambda_1(W^{-\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KM^{-1}W^{-1})\lambda_1(M^{\mathrm{T}}M)}{1-\lambda_1\left\{W^{-\mathrm{T}}\left[(W+I)^{\mathrm{T}}(W+I)+I\right]W^{-1}\right\}} + \\ &\lambda_1(M^{\mathrm{T}}W^{-\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}KM^{-1}W^{-1}M) > 0 \end{aligned} \tag{74}$$

于是,

$$\frac{\lambda_n(P)}{\sigma^2} \leq \frac{\lambda_1(P)}{\sigma^2} \leq k_1\left(\frac{\gamma^2}{\sigma^2}+1\right) + \frac{k_2}{\sigma^2} \tag{75}$$

可见, 对于任意选定的 ε_1 和 ε_2, 总可以确定足够大的 σ, 使得:

$$w_1 = \min\left(\frac{\lambda_n(P)}{\sigma^2}, \varepsilon_1^{-1}, \frac{\varepsilon_2^{-1}}{m_f}\right) = \frac{\lambda_n(P)}{\sigma^2} \tag{76}$$

将式 (76) 代入式 (65) 中, 可得:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{w_2}{\lambda_n(P)}}\eta \leq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\rho_1 c_2}{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \rho_1(\gamma^2+\sigma^2)}}}\eta, & c_2 \geq \dfrac{\lambda_1(P)}{\sigma^2} \\ \sqrt{\dfrac{\rho_1\left[k_1(\gamma^2+\sigma^2)+k_2\right]}{\sigma^2\left(-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \rho_1(\gamma^2+\sigma^2)}\right)}}\eta, & c_2 < \dfrac{\lambda_1(P)}{\sigma^2} \end{cases},\ \ \forall t \geq t_0 + T \tag{77}$$

其中

$$c_2 = \max\left(\varepsilon_1^{-1}, \frac{\varepsilon_2^{-1}}{m_f}\right) \tag{78}$$

由此可知, 通过选择恰当的 ε_1、ε_2 和足够大的 σ 可以使得跟踪误差的最终界任意小, 同时自适应增益 β 和质量估计误差 $\tilde{m}_f$ 有界. □

式 (77) 中跟踪误差的最终界的表达式可以作为控制器参数选择的依据, 一般来说, 为了保证较小的跟踪误差, 应当选择较大的 σ 和 β^*, 但是过大的 σ 和 β^* 会导致不合理的系统闭环增益, 使得高频噪声进入回路, 另外过大的增益也不利于控制器的数字化实现; ε_1 和 ε_2 决定了自适应参数 β 和 $\hat{m}_f$ 的变化速率, α_1 和 α_2 是自适应更新律的修正参数, 用以保证存在未知干扰的情况下自适应参数 β 和 $\hat{m}_f$ 的有界性, 增加了系统的鲁棒性, 这四个参数需要根据系统跟踪误差和控制输出进行选择及调整; 对于实际的动力学系统, M 对应的参数 $\hat{m}_f$ 通常具有特定的物理意义, 因此 M 一般可以选择为实际物理参数的下界, 例如在本文的编队问题中, $\hat{m}_f$ 为从星质量的估计值, M 可以选择为不加注燃料时卫星的质量. 总的来说, 定理 1 中的控制器参数需要结合实际问题进行选择和调整以得到满意的效果.

3　仿真结果与分析

本节通过构型重构和重构后的构型保持对最优相对轨迹生成以及鲁棒自适应控制器进行分析验证.

主从星的质量分别为 $m_l = m_f = 10\,\mathrm{kg}$, 主星的轨道半长轴选择为 7 642 km, 主星轨道偏心率为 0.01, 轨道倾角为 $\pi/4$, 选择 36 阶的 GEMT1 地球引力场模型, 采用指数标高大气密度模型, 忽略日月三体引力摄动与太阳光压.

仿真场景设置如下: 在初始时刻 ($t = t_0$) 主星位于其轨道的真近点, 从星位置与主星重合, 规划一条最优相对状态轨迹将从星相对于主星从初始相对位置 $[0,0,0]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{m}$ 和相对速度 $[0,0,0]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{m/s}$ 转移到期望的相对位置 $[50,-20,-86.6]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{m}$ 和相对速度 $[0.0095,0.0945,0.164]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{m/s}$, 完成重构后, 从星保持对主星的空间圆构型, 构型保持过程中主星进行了一次持续 400 s 的轨道机动, 此处的轨道机动并没有实际的任务背景, 只是为了验证本文的鲁棒自适应控制器可以在主星机动的情况下完成对参考轨迹的跟踪. 重构过程中的约束条件为: 重构时间不超过 1 000 s, 从星的推力器能够提供的最大加速度为 $3\times10^{-3}\,\mathrm{km/s^2}$, 考虑到生成的参考轨迹尽可能光滑以及连续推力器的限制, 要求控制加速度的变化速率不超过 $10^{-5}\,\mathrm{km/s^3}$, 故终端约束和路径约束可以表示为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{q}(t_f) = [50,-20,86.6]^{\mathrm{T}}\\
&\dot{\boldsymbol{q}}(t_f) = [0.0095,0.0945,0.164]^{\mathrm{T}}\\
&t_f \le 1\,000\\
&u_j(t) - 3\times10^{-3} \le 0,\ \ t\in[t_0,t_f],\ j=1,2,3\\
&-3\times10^{-3} - u_j(t) \le 0,\ \ t\in[t_0,t_f],\ j=1,2,3\\
&v_j(t) - 1\times10^{-5} \le 0,\ \ t\in[t_0,t_f],\ j=1,2,3\\
&-1\times10^{-5} - v_j(t) \le 0,\ \ t\in[t_0,t_f],\ j=1,2,3
\end{aligned} \tag{79}$$

代价函数中 λ 取为 1×10^{-5}, 由此得到最优相对位置轨迹如图 2 所示, 构型重构时间为 562.3 s. 对于多颗卫星编队飞行的情形, 还需要进一步添加碰撞规避约束, 并且要在代价函数中加入燃料均衡惩罚项以避免编队卫星间燃料消耗相差过大.

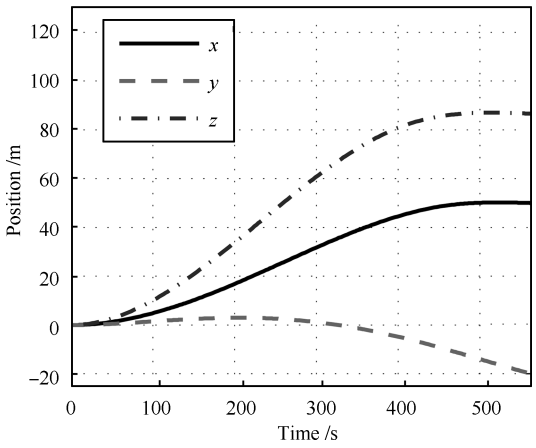


图 2　期望的重构相对位置轨迹

Fig. 2　Desired relative position trajectories for reconfiguration

对于上述仿真场景, 控制器参数选择为 $\sigma = 0.1$、$\beta^* = 10$、$\varepsilon_1 = 2\,000$、$\varepsilon_2 = 500$、$\alpha_1 = 1\times10^{-6}$、$\alpha_2 = 2\times10^{-8}$ 和 $M = 9\,\mathrm{kg}$, 上述鲁棒自适应控制器用于构型重构和构型保持, 进行仿真, 得到的结果如图 3 ∼ 5 所示.

从图 3 可以看出, 从星沿着图 2 给出的期望相对轨迹完成重构 (曲线的带 "○" 部分) 后, 进入了相对主星的空间圆构型并进行保持, 由于空间圆构型是基于 CW 方程设计的, 因此将其应用到参考轨道偏心率不为零的情况时需要一定的控制力进行维持; 在 $t = 3\,200\,\mathrm{s}$ 时刻, 主星沿其参考轨道坐标系的 $\boldsymbol{y}_l$ 轴方向施加推力进行了一次轨道机动, 从图 5 可以看出, 从星产生了相应的控制力以完成轨迹跟踪, 在图 4 中则体现为跟踪误差的短时间增加, 可知, 在主星机动的情况下, 控制器仍能完成对参考轨迹的跟踪.

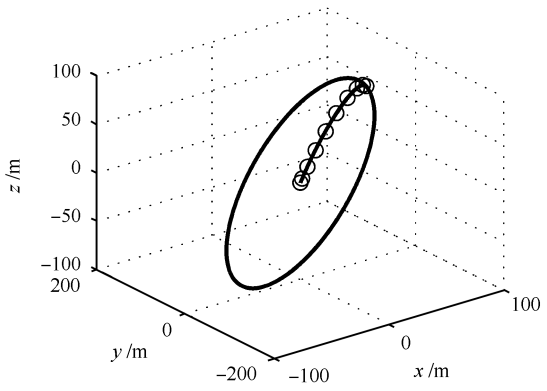


图 3 主从星相对轨迹

Fig. 3 Relative trajectory between the leader and follower

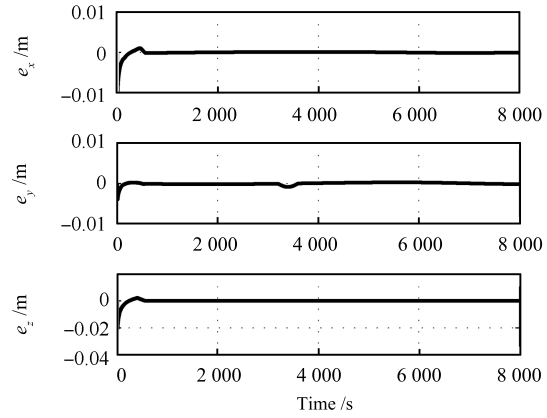


图 4 参考轨迹跟踪误差

Fig. 4 Reference trajectory tracking errors

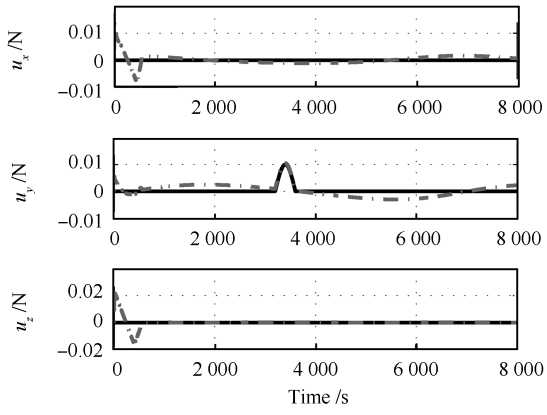


图 5 主星 (实线) 和从星 (点划线) 控制力

Fig. 5 Control inputs of the leader (solid) and follower (dash-dotted)

图 6 和图 7 分别对比了改变 σ 和 β^* 对跟踪误差的影响 (这里只给出了跟踪误差较大的重构段沿 x 轴方向的位置跟踪误差, 其他轴情况类似). 可以看出, 当分别增大 σ 和 β^* 时, 跟踪误差会相应减小, 而减小二者时, 跟踪误差则会增大, 这一结果符合式 (77) 中参数对跟踪误差最终界的影响. 但 σ 和 β^* 对跟踪误差的影响又存在不同之处, σ 直接影响控制器增益, 因此从图 6 可以看出, 增大 σ 从初始时刻就能够减小跟踪误差, 而 β^* 通过影响 β 的变化率来间接影响控制器增益, 因此在图 7 中体现为其作用需要一段时间后才能显现出来.

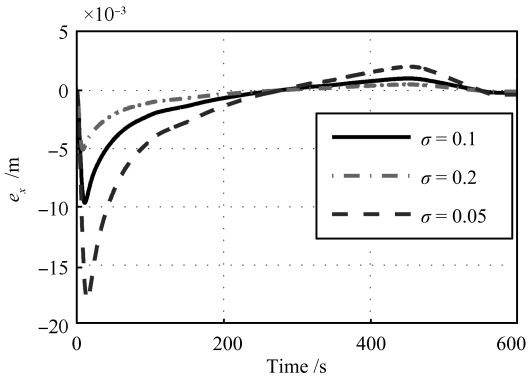


图 6 改变 σ 时 x 轴跟踪误差

Fig. 6 Tracking error of the x axis with different σ

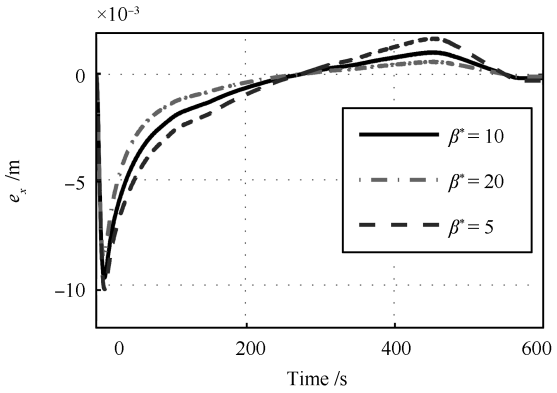


图 7 改变 β^* 时 x 轴跟踪误差

Fig. 7 Tracking error of the x axis with different β^*

4 结论

参考轨迹生成算法和控制器设计对跟踪精度和燃料消耗都有着重要影响, 因此分别提出了最优参考轨迹生成问题和编队相对状态控制问题, 其中前者可以应用伪谱法转换成非线性规划问题以便进行数值求解, 通过对动力学模型中干扰和未知参数的分析, 将相对控制问题一般化为具有未知参数且受到回零扰动和有界非回零扰动影响的动力学系统的控制问题, 然后设计了相应的鲁棒自适应控制器以保证闭环系统的全局一致最终有界, 并证明了通过设计合理的控制器参数可以使得跟踪误差的最终界任意小, 最后通过构型重构和保持场景的仿真结果显示了本文主要结果的有效性.

References

1 Kapila V, Sparks A G, Buffington J M, Yan Q G. Spacecraft formation flying: dynamics and control. In: Proceedings of the 1999 IEEE American Control Conference. San Diego: IEEE, 1999. 4137−4141

2 Schaub H, Alfriend K T. Impulsive feedback control to establish specific mean orbit elements of spacecraft formations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, **24**(4): 739−745

3 de Queiroz M S, Kapila V, Yan Q G. Adaptive nonlinear control of multiple spacecraft formation flying. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, **23**(3): 385−390

4 Wong H, Pan H Z, de Queiroz M S, Kapila V. Adaptive learning control for spacecraft formation flying. In: Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, USA: IEEE, 2001. 1089−1094

5 Liu H T, Shan J J, Sun D. Adaptive synchronization control of multiple spacecraft formation flying. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2007, **129**(3): 337−342

6 Wong H, Kapila V, Sparks A G. Adaptive output feedback tracking control of spacecraft formation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2002, **12**(2−3): 117−139

7 Lima H C, Bang H. Adaptive control for satellite formation flying under thrust misalignment. *Acta Astronautica*, 2009, **65**(1−2): 112−122

8 Mei Jie, Ma Guang-Fu. Robust adaptive control of relative orbit for nearby spacecraft. *Journal of Astronautics*, 2010, **31**(10): 2276−2282
(梅杰, 马广富. 近距离航天器相对轨道的鲁棒自适应控制. 宇航学报, 2010, **31**(10): 2276−2282)

9 Pongvthithum R, Veres S M, Gabriel S B, Rogers E. Universal adaptive control of satellite formation flying. *International Journal of Control*, 2005, **78**(1): 45−52

10 Lim H C, Bang H C, Park K D, Lee W K. Optimal formation trajectory-planning using parameter optimization technique. *Journal of Astronomy and Space Sciences*, 2004, **21**(3): 209−220

11 Cho H C, Park S Y. Analytic solution for fuel-optimal reconfiguration in relative motion. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, **141**(3): 495−512

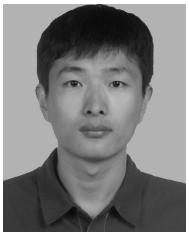
12 Wang S Y, Zheng C W, Wang Y X. A time-fuel optimal for spacecraft formation reconfiguration. In: Proceedings of the 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Singapore: IEEE, 2007. 994−998

13 Lim H C, Bang H. Trajectory planning of satellite formation flying using nonlinear programming and collocation. *Journal of Astronomy and Space Sciences*, 2008, **25**(4): 361−374

14 Khalil H K, Grizzle J. *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice Hall, 2006. 168−174

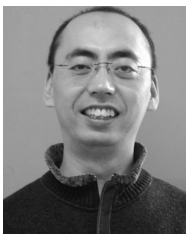
15 Kwon W H, Moon Y S, Ahn S C. Bounds in algebraic Riccati and Lyapunov equations: a survey and some new results. *International Journal of Control*, 1996, **64**(3): 377−390

16 Davies R K, Shi P, Wiltshire R. New upper matrix bounds for the solution of the continuous algebraic Riccati matrix equation. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2008, **6**(5): 776−784



董晓光 哈尔滨工业大学卫星技术研究所博士研究生. 主要研究方向为编队飞行及 drag-free 卫星. 本文通信作者.
E-mail: dxglaw@gmail.com
(**DONG Xiao-Guang** Ph. D. candidate at the Research Center of Spacecraft Technology, Harbin Institute of Technology. His research interest covers formation flying and drag-free satellites. Corresponding author of this paper.)

曹喜滨 哈尔滨工业大学航天学院教授. 主要研究方向为卫星总体设计和仿真.
E-mail: xbcao@hit.edu.cn
(**CAO Xi-Bin** Professor at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. His research interest covers system design and simulation of satellites.)



张锦绣 哈尔滨工业大学副教授. 主要研究方向为卫星总体设计与仿真.
E-mail: jinxiu@hit.edu.cn
(**ZHANG Jin-Xiu** Associate professor at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. His research interest covers system design and simulation of satellites.)

施 梨 哈尔滨工业大学卫星技术研究所博士研究生. 主要研究方向为 drag-free 卫星.
E-mail: shilihit@yahoo.com.cn
(**SHI Li** Ph. D. candidate at the Research Center of Spacecraft Technology, Harbin Institute of Technology. His research interest covers drag-free satellites.)