一类非线性网络控制系统镇定的新方法

贾新春 [1] 郑利红 [1] 池小波 [1] 张大伟 [1]

摘 要 研究了一类非线性网络控制系统 (Networked control systems, NCSs) 的镇定问题. 在一般的网络环境中, 通过平行分布补偿技术, 将非线性 NCS 建模为包含一个稳定子系统和一个可能不稳定子系统的模糊时滞切换系统. 利用分段 Lyapunov 泛函方法和平均驻留时间方法, 得到了非线性 NCS 指数稳定的充分条件, 并以线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 形式给出了模糊控制器的设计方法. 最后通过数值例子说明了所给方法的有效性.

关键词 非线性网络控制系统, 平均驻留时间, 切换系统, 镇定
中图分类号 TP273.13

A New Approach to Stabilization of a Class of Nonlinear Networked Control Systems

JIA Xin-Chun[1] ZHENG Li-Hong[1] CHI Xiao-Bo[1]
ZHANG Da-Wei[1]

Abstract This paper investigates the stabilization problem of a class of nonlinear networked control systems (NCSs). In a general network environment, the nonlinear NCS is modeled as a fuzzy switched system with time-delay by the parallel distributed compensation technique, and such a system consists of a stable subsystem and a possible unstable subsystem. Using the piecewise Lyapunov function approach and the average dwell time method, a sufficient condition of the exponential stability for such a nonlinear NCS is obtained, and the fuzzy controller design method is presented in the linear matrix inequality (LMI) form. Finally, a numerical example illustrates the effectiveness of the proposed method.

Key words Nonlinear networked control system (NCS), average dwell time, switched system, stabilization

网络控制系统 (Networked control systems, NCSs) 是一种分布式、网络化的反馈控制系统, 与传统的控制系统相比, NCSs 具有易于安装和维护、高可靠性、低成本、可共享资源等优点, 且在工业中有广泛的应用, 如飞行器、无人驾驶车辆、分布式或可移动通讯等[1]. 近来, 已有大量关于 NCSs 的研究工作, 其中, 带有随机丢包或有界丢包[2−3], 随机通讯时滞或有界时滞[4−5], 同时考虑网络诱导时滞和丢包[6−7], 非线性 NCSs 的研究[7] 等. 到目前为止, NCSs 的主要研究方法有随机控制方法, 采样控制方法和基于切换的控制方法等[8−10]. Liu 等研究了带有连续被控对象的线性 NCSs 的稳定性问题[8], 给出了使 NCS 稳定的基于梯度算法的控制器切换策略. Zhang 等考虑了一类带有丢包的线性 NCS 的建模和控制问题[9], 其中 NCS 被建模为包含 4 个子系统的离散切换系统. Xie 等研究了带有通讯约束的线性 NCS 的镇定问题[10], 利用时滞切换系统方法给出了切换控制律的设计方法. 注意到, 这些文献都假设网络诱导时滞小于一个采样周期, 若其超过一个采样周期则视为丢包[9−10]. 因而, 所得线性 NCS 模型并不具有一般性, 在实际应用中受到一定限制. 据我们所知, 非线性 NCSs 相关研究还很少. 这激发了本文的工作.

本文的主要优点如下: 1) 将非线性 NCS 建模为包含两个子系统的模糊时滞切换模型, 其中一个是稳定的小时滞子系统 (网络正常), 另一个是可能不稳定的大时滞子系统 (网络异常); 2) 利用分段 Lyapunov 泛函和平均驻留时间方法, 得到了系统指数稳定的充分条件, 且以线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 的形式给出了控制器设计方法; 3) 提出了一个反映网络诱导时滞大小和丢包界的新的双尺度指标, 与单尺度指标最大允许等价时滞界 (Maximum allowable equivalent delay bound, MAEDB) 相比, 既能较好的刻画网络特性, 又能降低系统对网络的要求.

1 系统描述及预备知识

本文考虑如图 1 所示的非线性 NCSs, 其中被控对象是由 T-S 模糊模型表示的非线性系统. 在 NCSs 结构框图中, 分别在控制器和执行器前端添加了缓存器, 用来丢弃过时数据, 避免错序发生. 假设传感器是时钟驱动的, 控制器和执行器是事件驱动的; 数据以单包方式传输; 执行器具有零阶保持器功能. 可得如下的非线性 NCS[7]:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum\limits_{i=1}^{r} h_i(\boldsymbol{z}(t))\{A_i\boldsymbol{x}(t) + B_i\boldsymbol{u}(t)\} \\ \boldsymbol{u}(t) = \sum\limits_{i=1}^{r} h_i(\boldsymbol{z}(l_k h))K_i\boldsymbol{x}(l_k h) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是输入向量, $t \in [l_k h + \tau_k,\ l_{k+1}h + \tau_{k+1})$ $(k = 1, 2, \cdots)$. A_i, $B_i\,(i = 1, 2, \cdots, r)$ 是适当维数的定常矩阵, $K_j\,(j = 1, 2, \cdots, r)$ 是待设计的状态反馈增益矩阵. r 是模糊规则数目, $\boldsymbol{z}(t) = [z_1(t),\ z_2(t),\ \cdots,\ z_g(t)]^{\mathrm{T}}$ 是前件变量, $h_i(\boldsymbol{z}(t))$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ 是规则的隶属度函数且有 $h_i(\boldsymbol{z}(t)) \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^{r} h_i(\boldsymbol{z}(t)) = 1$[7]. h 是采样周期, $l_k\,(k = 1, 2, \cdots)$ 是整数且有 $\{l_1,\ l_2,\ l_3,\ \cdots\} \subset \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\boldsymbol{x}(l_k h)$ 表示第 k 个成功传输到执行器的采样数据, τ_k 表示该数据到达执行器的网络诱导时滞, 令 $t_0 = l_1 h + \tau_1$, 则 $\lim_{N\to\infty} \bigcup_{k=1}^{N} [l_k h + \tau_k,\ l_{k+1}h + \tau_{k+1}) = [t_0,\ +\infty)$, $t_0 \geq 0$. 在此假设第一个控制信号到达被控对象前 $\boldsymbol{u}(t) \equiv 0$.

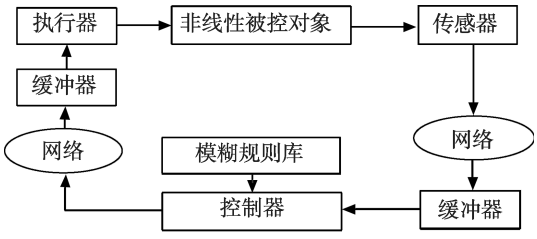

图 1 一类非线性 NCSs 的框架图

Fig. 1 System diagram of a class of nonlinear NCSs

对于 $t \in [l_k h + \tau_k,\ l_{k+1}h + \tau_{k+1})$, 我们定义 $\tau(t) = t - l_k h$, 则 $l_k h = t - \tau(t)$.

收稿日期 2008-08-18 收修改稿日期 2009-03-23
Received August 18, 2008; in revised form March 23, 2009
国家自然科学基金 (60874019, 90820014) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60874019, 90820014)
1. 山西大学数学科学学院 太原 030006
1. School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01476

注 1. 注意到与通常的时变时滞不同的是, $\tau(t)$ 为一个分段线性函数. 在文献 [6 − 7] 中, 令 $0 \le \tau_k \le \tau(t) \le (l_{k+1}-l_k)h+\tau_{k+1} \le \eta$, 其中 η 称为最大允许等价时滞界 (MAEDB). 易知, $\eta\,(\eta>0)$ 是一个综合指标, 它反映了网络诱导时滞大小和丢包界. 然而, 网络大部分时间运行正常, 满足 $0 \le \tau(t) \le \eta$, 偶尔由于网络拥塞等突发性事件, 可能出现 $\eta < \tau(t)$. 一旦发生这种情况, 现存的结论将无法有效处理.

本文利用了切换控制方法, 按照时滞 $\tau(t)$ 的大小把系统 (1) 看作由大时滞子系统和小时滞子系统组成的切换系统. 下面给出具体的描述:

情形 1. 当 $0 < (l_{k+1}-l_k)h+\tau_{k+1} \le h_1$ 时, 非线性 NCS (1) 可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(\boldsymbol{z}(t))h_j(\boldsymbol{z}(t-\tau_1(t)))\{A_i\boldsymbol{x}(t)+ B_iK_j\boldsymbol{x}(t-\tau_1(t))\},\ t\in[l_kh+\tau_k,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})$$

其中 $\tau_1(t)=t-l_kh$ 且有 $0<\tau_1(t)\le h_1$;

情形 2. 当 $h_1 < (l_{k+1}-l_k)h+\tau_{k+1} \le h_2$ 且 $h_1 < \tau_k \le h_2$ 时, 非线性 NCS (1) 可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(\boldsymbol{z}(t))h_j(\boldsymbol{z}(t-\tau_2(t)))\{A_i\boldsymbol{x}(t)+ B_iK_j\boldsymbol{x}(t-\tau_2(t))\},\ t\in[l_kh+\tau_k,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})$$

其中 $\tau_2(t)=t-l_kh$ 且有 $h_1<\tau_2(t)\le h_2$;

情形 3. 当 $h_1 < (l_{k+1}-l_k)h+\tau_{k+1} \le h_2$ 且 $0<\tau_k\le h_1$ 时, 非线性 NCS (1) 可以表示为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(\boldsymbol{z}(t))h_j(\boldsymbol{z}(t-\tau_1(t)))\{A_i\boldsymbol{x}(t)+ B_iK_j\boldsymbol{x}(t-\tau_1(t))\},\ t\in[l_kh+\tau_k,\ l_kh+h_1)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(\boldsymbol{z}(t))h_j(\boldsymbol{z}(t-\tau_1(t)))\{A_i\boldsymbol{x}(t)+ B_iK_j\boldsymbol{x}(t-\tau_2(t))\},\ t\in[l_kh+h_1,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})\end{cases}$$

其中, 当 $t\in[l_kh+\tau_k,\ l_kh+h_1)$ 时, $\tau_1(t)=t-l_kh$; 当 $t\in[l_kh+h_1,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})$ 时, $\tau_2(t)=t-l_kh$. 显然, $0<\tau_1(t)\le h_1$ 和 $h_1<\tau_2(t)\le h_2$.

引入时间序列 $\{i_k\}$, 利用牛顿–莱布尼茨公式, 上述 3 种情形可统一表示为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(t)h_j(t-\tau_1(t))\{(A_i+B_iK_j)\boldsymbol{x}(t)- B_iK_j\int_{t-\tau_1(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\},\ t\in[l_kh+\tau_k,\ i_k)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(t)h_j(t-\tau_2(t))\{(A_i+B_iK_j)\boldsymbol{x}(t)- B_iK_j\int_{t-\tau_2(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\},\ t\in[i_k,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[t_0-h_2,\ t_0]\end{cases}\tag{2}$$

其中, $h_i(t)=h_i(\boldsymbol{z}(t)),\ h_j(t-\tau(t))=h_j(\boldsymbol{z}(t-\tau(t)))$.

$$i_k=\begin{cases}l_{k+1}h+\tau_{k+1}, & \text{若 } (l_{k+1}-l_k)h+\tau_{k+1}\le h_1\\ l_kh+\max\{h_1,\tau_k\}, & \text{若 } (l_{k+1}-l_k)h+\tau_{k+1}>h_1\end{cases}$$

当 $t\in[l_kh+\tau_k,\ i_k)$ 时, 记 $\tau_1(t)=t-l_kh$; 当 $t\in[i_k,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})$ 时, 记 $\tau_2(t)=t-l_kh$. 显然, $0<\tau_1(t)\le h_1$ 和 $h_1<\tau_2(t)\le h_2$.

定义 1[11]**.** 当 $t\in\bigcup_{k=1}^{\infty}[i_k,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})$ 时, 系统处于大时滞子系统运行模式; 而当 $t\in\bigcup_{k=1}^{\infty}[l_kh+\tau_k,\ i_k)$ 时, 认为小时滞子系统在运行. $T^+[t_0,t]$ 和 $T^-[t_0,t]$ 分别表示区间 $[t_0,t]$ 上大时滞和小时滞子系统总的运行时间, $T^+[t_0,t]/T^-[t_0,t]$ 表示大、小时滞子系统运行时间比率.

定义 2[11]**.** 对任意切换信号 $\sigma(t)$ 和 $t>t_0$, $N_\sigma(t_0,t)$ 表示切换信号 $\sigma(t)$ 作用下大、小时滞子系统在 $[t_0,t]$ 上的切换数目, 对于给定的 N_0 和 T_a, 若 $N_\sigma(t_0,t)\le N_0+(t-t_0)/T_a$ 成立, 则 N_0 称为振颤界, T_a 称为子系统的平均驻留时间.

本文的目的是给出非线性 NCS (2) 指数稳定的新双尺度指标 (h_1,h_2), 以及相应的控制器设计方法.

2　系统性能分析及状态反馈控制器设计

2.1　小时滞子系统的 Lyapunov 函数衰减估计

考虑下面的小时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(t)h_j(t-\tau_1(t))\{(A_i+B_iK_j)\boldsymbol{x}(t)- B_iK_j\int_{t-\tau_1(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\},\ t\in[l_kh+\tau_k,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[t_0-h_2,\ t_0]\end{cases}\tag{3}$$

其中, $0<\tau_1(t)\le h_1,\ h_2>h_1,\ \boldsymbol{\phi}(t)$ 是给定的连续初始条件.

选择下面的 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V^1(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)\tag{4}$$

其中

$$V_1(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)$$
$$V_2(t)=\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{e}^{a_1(s-t)}Z_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$
$$V_3(t)=\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{e}^{a_1(s-t)}Z_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

这里, P, Z_1 和 Z_2 是待定的正定矩阵, 定义 $h_{12}=h_2-h_1$.

引理 1. 对于给定的标量 $a_1>0,\ h_1>0,\ h_{12}>0$ 和状态反馈增益 $K_j\,(j=1,2,\cdots,r)$, 如果存在矩阵 $T=\begin{bmatrix}T_1^{\mathrm{T}} & T_2^{\mathrm{T}} & T_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $P>0,\ Z_1>0,\ Z_2>0,\ S>0$, 对 $i,j=1,2,\cdots,r$, 满足

$$\Pi_{ij}=\begin{bmatrix}\Pi_{ij11} & h_1(\Pi_{ij12}+T)\\ * & -h_1\mathrm{e}^{-a_1h_1}Z_1\end{bmatrix}<0\tag{5}$$

其中

$$\Pi_{ij11}=\begin{bmatrix}\Omega_{ij} & -T_1+T_2^{\mathrm{T}} & T_3^{\mathrm{T}}+(A_i+B_iK_j)^{\mathrm{T}}S\\ * & -T_2^{\mathrm{T}}-T_2 & -T_3^{\mathrm{T}}\\ * & * & h_1Z_1+h_{12}Z_2-2S\end{bmatrix}$$
$$\Pi_{ij12}=\begin{bmatrix}K_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P & 0 & K_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}S\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$\Omega_{ij}=a_1P+T_1+T_1^{\mathrm{T}}+P(A_i+B_iK_j)+(A_i+B_iK_j)^{\mathrm{T}}P$$

则沿着系统 (3) 的轨迹有: $V^1(t) < \mathrm{e}^{-a_1(t-t_0)}V^1(t_0)$.

证明. 对于非线性 NCS (3), 选择 Lyapunov-Krasovskii 函数 (4), 在每个区间 $[l_kh+\tau_k,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})$ $(k=1,2,\cdots)$ 上, 沿着系统 (3) 的轨迹, 有

$$\dot{V}_1(t) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) \le\ & h_1\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)Z_1\dot{\boldsymbol{x}}(t)- \\ & \int_{t-\tau_1(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{e}^{-a_1h_1}Z_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s- \\ & a_1\int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{e}^{a_1(s-t)}Z_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(t) =\ & h_{12}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)Z_2\dot{\boldsymbol{x}}(t)- \\ & \int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{e}^{a_1(s-t)}Z_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s- \\ & a_1\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{e}^{a_1(s-t)}Z_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{8}$$

定义 $\boldsymbol{\varsigma}(t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t), \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_1(t)), \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$, 根据牛顿–莱布尼茨公式和系统 (3), 有下面的等式成立,

$$2\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)T\left[\boldsymbol{x}(t) - \int_{t-\tau_1(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s - \boldsymbol{x}(t-\tau_1(t))\right] = 0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}2\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)S\Bigg[&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(t)h_j(t-\tau_1(t))\times\Big\{(A_i+B_iK_j)\boldsymbol{x}(t)- \\ & B_iK_j\int_{t-\tau_1(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\Big\} - \dot{\boldsymbol{x}}(t)\Bigg] = 0\end{aligned} \tag{10}$$

由式 (6) $\sim$ (10) 得

$$\begin{aligned}&\dot{V}^1(t) + a_1V^1(t) \le \\ &\quad\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(t)h_j(t-\tau_1(t))\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\Pi_{ij11} + (\Pi_{ij12}+T)\times \\ &\quad h_1\mathrm{e}^{a_1h_1}Z_1^{-1}\times(\Pi_{ij12}+T)^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\varsigma}(t)\end{aligned} \tag{11}$$

利用矩阵 Schur 补性质, 由式 (5) 和 (11) 可得, 对 $t\in[l_kh+\tau_k\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})$, $\dot{V}^1(t)+a_1V^1(t)<0$. 于是, 对不等式两边同时积分, 可得 $V^1(t) < \mathrm{e}^{-a_1[t-(l_kh+\tau_k)]}V^1(l_kh+\tau_k)$, $\forall t\in[l_kh+\tau_k\ l_{k+1}h+\tau_{k+1})$. 由于 $\boldsymbol{x}(t)$ 是连续的, 知 $V^1(t)$ 在区间 $[t_0,t]$ 上连续, 有 $\lim_{t\to(l_kh+\tau_k)^-}V^1(t) = \lim_{t\to(l_kh+\tau_k)^+}V^1(t) = V^1(l_kh+\tau_k)$. 因而有 $V^1(t) < \mathrm{e}^{-a_1(t-t_0)}V^1(t_0)$. □

2.2 大时滞子系统的 Lyapunov 函数增长估计

考虑下面的大时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{r}h_i(t)h_j(t-\tau_2(t))\Big\{(A_i+B_iK_j)\boldsymbol{x}(t)- \\ \quad B_iK_j\int_{t-\tau_2(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\Big\},\ t\in[l_kh+\tau_k,\ l_{k+1}h+\tau_{k+1}) \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[t_0-h_2,\ t_0]\end{cases} \tag{12}$$

其中, $h_1\le\tau_2(t)\le h_2$, $h_2>h_1$, $\boldsymbol{\phi}(t)$ 是给定的初始条件.

选择下面的 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V^2(t) = V_4(t) + V_5(t) + V_6(t) \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}V_4(t) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P_1\boldsymbol{x}(t) \\ V_5(t) &= \int_{-h_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{e}^{a_2(t-s)}Z_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \\ V_6(t) &= \int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{e}^{a_2(t-s)}Z_4\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

这里, P_1, Z_3 和 Z_4 是待定的正定矩阵, 定义 $h_{12}=h_2-h_1$.

引理 2. 对于给定的标量 $a_2>0$, $h_1>0$, $h_{12}>0$ 和状态反馈增益 K_j $(j=1,2,\cdots,r)$, 如果存在矩阵 $P_1>0$, $Z_3>0$, $Z_4>0$, $S>0$, $M=\begin{bmatrix}M_1^{\mathrm{T}} & M_2^{\mathrm{T}} & M_3^{\mathrm{T}} & M_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $N=\begin{bmatrix}N_1^{\mathrm{T}} & N_2^{\mathrm{T}} & N_3^{\mathrm{T}} & N_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, 对 $i,j=1,2,\cdots,r$, 满足

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix}\Psi_{ij11} & h_1(M+\Psi_{ij12}) & h_{12}(N+\Psi_{ij12}) \\ * & -h_1Z_3 & 0 \\ * & 0 & -h_{12}\mathrm{e}^{a_2h_1}Z_4\end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

其中

$$\Psi_{ij11} = \begin{bmatrix}\bar{\Omega}_{ij1} & -N_1+M_2^{\mathrm{T}} & N_1+M_3^{\mathrm{T}}-M_1 & \bar{\Omega}_{ij2} \\ * & -N_2-N_2^{\mathrm{T}} & N_2-N_3^{\mathrm{T}}-M_2 & -N_4^{\mathrm{T}} \\ * & * & \bar{\Omega}_3 & \bar{\Omega}_4 \\ * & * & * & \bar{\Omega}_5\end{bmatrix}$$

$$\Psi_{ij12} = \begin{bmatrix}K_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_1 & 0 & 0 & K_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}S\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\Omega}_{ij1} = P_1(A_i+B_iK_j) + (A_i+B_iK_j)^{\mathrm{T}}P_1 - a_2P_1 + M_1 + M_1^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\Omega}_{ij2} = (A_i+B_iK_j)^{\mathrm{T}}S + M_4^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\Omega}_3 = N_3^{\mathrm{T}} + N_3 - M_3^{\mathrm{T}} - M_3$$

$$\bar{\Omega}_4 = N_4^{\mathrm{T}} - M_4^{\mathrm{T}},\ \bar{\Omega}_5 = h_1Z_3 + h_{12}Z_4 - 2S$$

则沿着系统 (12) 的轨迹有: $V^2(t) < \mathrm{e}^{a_2(t-t_0)}V^2(t_0)$.

证明. 类似引理 1 的证明, 略. □

2.3 切换系统 (2) 的稳定性分析

首先选择如下的分段 Lyapunov 函数

$$V^{\sigma(t)}(t) = \begin{cases}V^1(t), & t\in[l_kh+\tau_k, i_k) \\ V^2(t), & t\in[i_k, l_{k+1}h+\tau_{k+1})\end{cases} \tag{15}$$

其中, i_k $(k=1,2,\cdots)$ 如式 (2) 定义, $V^1(t), V^2(t)$ 分别如式 (4) 和式 (13) 定义, $\sigma(t)\in\{1,2\}$ 是系统 (2) 的切换信号 (其中 1 代表系统 (2) 处于小时滞子系统模式; 2 为大时滞子模式).

定理 1. 对于给定的常数 $a_1>0$, $a_2>0$, $h_1>0$, $h_{12}>0$, $\mu\ge1$ 和反馈增益 K_j $(j=1,2,\cdots,r)$, 如果存在矩阵 $P>0$, $P_1>0$, $Z_1>0$, $Z_2>0$, $Z_3>0$, $Z_4>0$, $S>0$, $T=\begin{bmatrix}T_1^{\mathrm{T}} & T_2^{\mathrm{T}} & T_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $M=\begin{bmatrix}M_1^{\mathrm{T}} & M_2^{\mathrm{T}} & M_3^{\mathrm{T}} & M_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $N=\begin{bmatrix}N_1^{\mathrm{T}} & N_2^{\mathrm{T}} & N_3^{\mathrm{T}} & N_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 使得矩阵不等式 (5) 和 (14) 以及不等式

$$\begin{aligned}&P\le\mu P_1,\ P_1\le\mu P,\ Z_1\le\mu Z_3 \\ &Z_3\le\mu Z_1,\ Z_2\le\mu Z_4,\ Z_4\le\mu Z_2\end{aligned} \tag{16}$$

成立, 若切换信号满足下面的条件

$$\begin{aligned}&\mathrm{C1}: \frac{T^+[t_0,t]}{T^-[t_0,t]} \le \frac{(a_1-a^*)}{(a_2+a^*)}\\ &\mathrm{C2}: T_a[t_0,t] \ge \frac{\ln(\mu \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2})}{a}\end{aligned} \tag{17}$$

其中, $a^* \in (0,a_1)$, $a \in (0,a^*)$, 则系统 (2) 指数稳定的且有 $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \sqrt{V^{\sigma(t_0)}(t_0)/c}\ \mathrm{e}^{-0.5(a^*-a)(t-t_0)}$, $c = \min\{\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(P_1)\}$.

证明. 由式 (4), (13) 和 (16) 可得

$$\begin{aligned}&V^2(t) \le \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2}\mu V^1(t)\\ &V^1(t) \le \mu V^2(t) \le \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2}\mu V^2(t)\end{aligned} \tag{18}$$

引入序列 $\{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$, 表示大、小时滞子系统的切换时刻, 其中 $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$, 容易得 $\bigcup_{n=1}^{\infty}[s_n,\ s_{n+1}) \subset [t_0\ , \infty)$. 下面分别考虑大、小时滞子系统这两种情形

情形 1. 当 $t \in [s_n, s_{n+1}), (n \in \mathbf{N}^+)$ 且有在此区间上大时滞子系统在运行时, 则下式成立

$$\begin{aligned}V^2(t) \le\ & V^2(s_n)\mathrm{e}^{a_2(t-s_n)} =\\ & V^2(s_n)\mathrm{e}^{a_2T^+(s_n,t)-a_1T^-(s_n,t)} \le\\ & \mu \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2}\mathrm{e}^{a_2T^+(s_n,t)-a_1T^-(s_n,t)}V^1(s_n-0)\end{aligned}$$

情形 2. 当 $t \in [s_n, s_{n+1}), (n \in \mathbf{N}^+)$ 且有在此区间上小时滞子系统在运行时, 则下式成立

$$\begin{aligned}V^1(t) \ \le\ & V^1(s_n)\mathrm{e}^{-a_1(t-s_n)} =\\ & V^1(s_n)\mathrm{e}^{a_2T^+(s_n,t)-a_1T^-(s_n,t)} \le\\ & \mu \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2}\mathrm{e}^{a_2T^+(s_n,t)-a_1T^-(s_n,t)}V^2(s_n-0)\end{aligned}$$

综合以上两种情形, 当 $t \in [s_n, s_{n+1})$, 时有下式成立:

$$\begin{aligned}V^{\sigma(t)}(t) \le\ & \mu \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2}\mathrm{e}^{a_2T^+(s_n,t)-a_1T^-(s_n,t)}\times\\ & V^{\sigma(s_n-0)}(s_n-0)\end{aligned} \tag{19}$$

不妨假设 $N_\sigma(t_0,t) = m$, $m \ge 1$, 由式 (18) 和 (19), 通过相似的计算, 可得下式:

$$\begin{aligned}&V^{\sigma(t)}(t) \le\\ &\mu \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2}\mathrm{e}^{a_2T^+(s_m,t)-a_1T^-(s_m,t)}\times\\ &\mathrm{e}^{a_2T^+(s_{m-1},s_m)-a_1T^-(s_{m-1},s_m)}V^{\sigma(s_{m-1})}(s_{m-1}) \le\\ &(\mu \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2})^2\mathrm{e}^{a_2T^+(s_{m-1},t)-a_1T^-(s_{m-1},t)}\times\\ &V^{\sigma(s_{m-1}-0)}(s_{m-1}-0) \le\\ &(\mu \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2})^{N_\sigma(t_0,t)}\mathrm{e}^{a_2T^+(t_0,t)-a_1T^-(t_0,t)}V^{\sigma(t_0)}(t_0)\end{aligned} \tag{20}$$

根据 C1 和 C2 得:

$$-a_1T^-(t_0,t) + a_2T^+(t_0,t) \le -a^*(t-t_0) \tag{21}$$

$$N_\sigma(t_0,t)\ln(\mu \mathrm{e}^{(a_1+a_2)h_2}) \le a(t-t_0) \tag{22}$$

由式 (20) $\sim$ (22), 可知 $V^{\sigma(t)}(t) \le \mathrm{e}^{-(a^*-a)(t-t_0)}V^{\sigma(t_0)}(t_0)$, 注意到 $V^{\sigma(t)}(t) \le c\,\|\boldsymbol{x}(t)\|^2$, 可得结论成立. □

2.4 切换系统 (2) 的控制器设计

定理 1 表明了在一定的切换信号下系统 (2) 是指数稳定的. 当增益矩阵 $K_j\,(j=1,2,\cdots,r)$ 需要设计时, 不等式 (5) 和 (14) 不是 LMIs, 下面给出基于 LMIs 的控制器设计.

定理 2. 对于给定的常数 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $h_1 > 0$, $h_{12} > 0$, $\rho > 0$, $\mu \ge 1$, 如果存在矩阵 $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$, $\bar{T}_3$, $\bar{M} = \begin{bmatrix}\bar{M}_1^{\mathrm{T}} & \bar{M}_2^{\mathrm{T}} & \bar{M}_3^{\mathrm{T}} & \bar{M}_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $N = \begin{bmatrix}\bar{N}_1^{\mathrm{T}} & \bar{N}_2^{\mathrm{T}} & \bar{N}_3^{\mathrm{T}} & \bar{N}_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\bar{P} > 0$, $\bar{Z}_1 > 0$, $\bar{Z}_2 > 0$, $\bar{Z}_3 > 0$, $\bar{Z}_4 > 0$ 满足下面的 LMIs

$$\bar{\Pi}_{ij} = \begin{bmatrix}\Sigma_{ij1} & -\bar{T}_1 + \bar{T}_2^{\mathrm{T}} & \Sigma_{ij2} & h_1(\bar{T}_1 + B_i\bar{K}_j)\\ * & -\bar{T}_2^{\mathrm{T}} - \bar{T}_2 & -T_3^{\mathrm{T}} & h_1\bar{T}_2\\ * & * & \Sigma_3 & h_1(\bar{T}_3 + \rho B_i\bar{K}_j)\\ * & * & * & -h_1\mathrm{e}^{-a_1h_1}\bar{Z}_1\end{bmatrix} < 0 \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{\Psi}_{ij11} & h_1(\bar{M} + \bar{\Psi}_{ij12}) & h_{12}(\bar{N} + \bar{\Psi}_{ij12})\\ * & -h_1\bar{Z}_3 & 0\\ * & 0 & -h_{12}\mathrm{e}^{a_2h_1}\bar{Z}_4\end{bmatrix} < 0 \tag{24}$$

$$\bar{Z}_1 \le \mu\bar{Z}_3,\ \bar{Z}_3 \le \mu\bar{Z}_1,\ \bar{Z}_2 \le \mu\bar{Z}_4,\ \bar{Z}_4 \le \mu\bar{Z}_2 \tag{25}$$

则在满足式 (17) 的切换信号下, 系统 (2) 是指数稳定的且 $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \sqrt{V^{\sigma(t_0)}(t_0)/c}\ \mathrm{e}^{-0.5(a^*-a)(t-t_0)}$ 和增益矩阵 $K_j = \bar{K}_j\bar{P}^{-1}\,(j=1,2,\cdots,r)$, 其中 $c = \min\{\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(P_1)\}$,

$$\bar{\Psi}_{ij11} = \begin{bmatrix}\bar{\Sigma}_{ij1} & -\bar{N}_1 + \bar{M}_2^{\mathrm{T}} & \bar{N}_1 + \bar{M}_3^{\mathrm{T}} - \bar{M}_1 & \bar{\Sigma}_{ij2}\\ * & -\bar{N}_2 - \bar{N}_2^{\mathrm{T}} & \bar{N}_2 - \bar{N}_3^{\mathrm{T}} - \bar{M}_2 & -\bar{N}_4^{\mathrm{T}}\\ * & * & \bar{\Sigma}_3 & \bar{\Sigma}_4\\ * & * & * & \bar{\Sigma}_5\end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi}_{ij12} = \begin{bmatrix}\ \bar{K}_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \rho\bar{K}_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}\ \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\Sigma_{ij1} = a_1\bar{P} + \bar{T}_1 + \bar{T}_1^{\mathrm{T}} + A_i\bar{P} + B_i\bar{K}_j + \bar{P}A_i^{\mathrm{T}} + \bar{K}_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}$$

$$\Sigma_{ij2} = \bar{T}_3^{\mathrm{T}} + \rho\bar{P}A_i^{\mathrm{T}} + \rho\bar{K}_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}$$

$$\Sigma_3 = h_1\bar{Z}_1 + h_{12}\bar{Z}_2 - 2\rho\bar{P}$$

$$\bar{\Sigma}_{ij1} = A_i\bar{P} + B_i\bar{K}_j + \bar{P}A_i^{\mathrm{T}} + \bar{K}_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} - a_2\bar{P} + \bar{M}_1 + \bar{M}_1^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\Sigma}_{ij2} = \rho\bar{P}A_i^{\mathrm{T}} + \rho\bar{K}_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} + \bar{M}_4^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\Sigma}_3 = \bar{N}_3^{\mathrm{T}} + \bar{N}_3 - \bar{M}_3^{\mathrm{T}} - \bar{M}_3$$

$$\bar{\Sigma}_4 = \bar{N}_4^{\mathrm{T}} - \bar{M}_4^{\mathrm{T}},\ \bar{\Sigma}_5 = h_1\bar{Z}_3 + h_{12}\bar{Z}_4 - 2\rho\bar{P}$$

证明. 记 $\Delta = \mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}\}$, 定义矩阵变量 $S = \rho P$, $\bar{P} = P^{-1}$, $\bar{T}_d = P^{-1}T_dP^{-1}\ (d=1,2,3)$, $\bar{K}_j = K_jP^{-1}\ (j=1,2,\cdots,r)$, $\bar{Z}_i = P^{-1}Z_iP^{-1}\ (i=1,2)$, 于是有 $\bar{\Pi}_{ij} = \Delta^{\mathrm{T}}\Pi_{ij}\Delta\ (i,j=1,2,3,\cdots,r)$, 因而有式 (5) 与 (23) 等价. 类似可证明式 (14) 和 (24) 以及式 (16) 和 (25) 等价. 根据定理 1, 则有 $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \sqrt{V^{\sigma(t_0)}(t_0)/c}\ \mathrm{e}^{-0.5(a^*-a)(t-t_0)}$ 和增益矩阵 $K_j = \bar{K}_j\bar{P}^{-1}\ (j=1,2,\cdots,r)$. □

注 2. 当 $r=1$, $h_1 = h_2$ 且 a_1 充分小时, 引理 1 的结论类似于文献 [6]. 与文献 [7] 相比, 选择 $h_1\,(h_1 \le \eta)$ 使小时滞子系统指数稳定, 利用定理 2 易得较大的 $h_2\,(h_2 \ge \eta)$ 使得 NCS (2) 仍然是指数稳定的, 这将在仿真中得到验证.

3 仿真示例

在本节中, 我们利用下面的例子说明所给方法的有效性.

例 1. 考虑如下模糊模型表示的倒立摆系统[12]:

$$\begin{cases} \text{If } x_1(t) \text{ is } M_1, \text{ then } \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_1\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{u}(t) \\ \text{If } x_1(t) \text{ is } M_2, \text{ then } \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_2\boldsymbol{x}(t) + B_2\boldsymbol{u}(t) \end{cases} \tag{26}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)]^{\mathrm{T}}$, $x_1(t)$ 是倒立摆的摆角, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $x_3(t)$ 是电动机的电流,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9.8 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

M_1 和 M_2 是模糊集且

$$M_1(x_1(t)) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)}, & x_1(t) \neq 0 \\ 1, & x_1(t) = 0 \end{cases}$$

$$M_2(x_1(t)) = 1 - M_1(x_1(t))$$

该模糊模型可以精确地表示非线性系统在 $-\pi \leq x_1(t) \leq \pi$ 时的动力学特性.

根据定理 2, 当 $\rho = 0.2, \mu = 1.05, a_1 = 0.1, a_2 = 1$ 时, 选择 NCS 的双尺度指标 $(h_1,\ h_2) = (0.08,\ 0.15)$, 可得相应的控制器增益矩阵 $\boldsymbol{K}_1 = [-15.3703\ -\ 5.2749\ -\ 0.3796]$, $\boldsymbol{K}_2$ $= [-\ 15.3703\ -\ 5.2749\ -\ 0.3796]$, 当 $a^* = 0.065$, $a = 0.060$ 时, 大、小时滞子系统运行时间比率为 0.0329 和各子系统平均驻留时间为 3.5632 s. 在仿真中, 选择采样周期 $h = 0.05$ s、初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = [2, -1, -3]^{\mathrm{T}}$, 在按照上述条件所设计切换信号 $\sigma(t)$ 下, 非线性 NCSs 在时间范围 [0, 10] s 的状态响应曲线如图 2 所示, 其中在时间范围 [3.08, 4.16) s 上处于大时滞子系统运行模式, 且最大控制输入时滞可达 0.15 s . 由图 2 可以看出, 本文所给的双尺度时滞镇定方法的有效性.

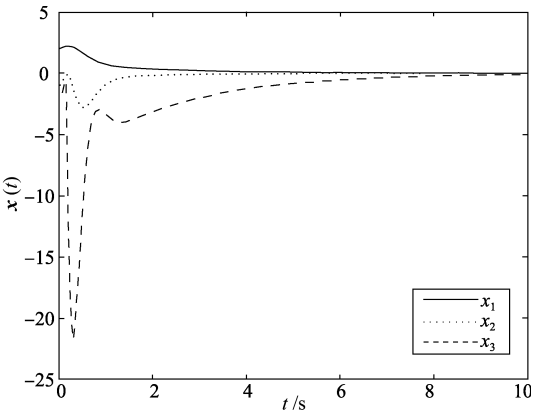

图 2 NCS 的状态响应曲线

Fig. 2 State responses of NCS

4 结论

本文利用切换系统方法, 研究了一类带有网络诱导时滞和数据丢包的非线性 NCSs 的镇定问题. 提出了一个与网络诱导时滞大小和丢包界相关的新的双尺度指标, 表明了系统稳定性与大、小时滞子系统发生频率和累积时间的关系.

References

1 Hespanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Y G. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 138−162

2 Wang Z D, Yang F W, Daniel W C H, Liu X H. Robust H_∞ control for networked systems with random packet losses. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2007, **37**(4): 916−924

3 Xiong J L, James L. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss. *Automatica*, 2007, **43**(1): 80−87

4 Yang F W, Wang Z D, Hung Y S, Gani M. H_∞ control for networked systems with random communication delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 511−518

5 Yan H S, Huan X H, Wang M, Zhang H. Delay-dependent stability criteria for a class of networked control systems with multi-input and multi-output. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2007, **34**: 997−1005

6 Yue D, Han Q L, Peng C. State feedback controller design of networked control systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems. II: Express. Briefs*. 2004, **51**(11): 640−644

7 Jia X C, Zhang D W, Zheng L H, Zheng N N. Modeling and stabilization for a class of nonlinear networked control systems: a T-S fuzzy approach. *Progress in Natural Science*, 2008, **18**(8): 1031−1037

8 Liu Y Z, Yu H B. Stability of network control systems based on switched technique. In: Proceedings of the 42nd IEEE conference on decision and control. Hawaii, USA: IEEE, 2003. 1110−1113

9 Zhang W A, Yu L. Output feedback stabilization of networked control systems with packet dropouts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(9): 1705−1710

10 Xie D, Chen X, Lv L, Xu N. Asymptotical stabilisability of networked control systems: time-delay switched system approach. *IET Proceeding-Control Theory and Applications*, 2008, **2**(9): 743−751

11 Zhai G S, Hu B, Yasuda K, Michel A N. Piecewise Lyapunov function for switched systems with average dwell time. *Asian Journal of Control*, 2000, **2**(3): 192−197

12 Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1998, **6**(2): 250−265

贾新春 山西大学数学科学学院教授. 主要研究方向为网络控制系统和智能控制. 本文通信作者. E-mail: xchjia@sxu.edu.cn

(**JIA Xin-Chun** Professor at Shanxi University. His research interest covers networked control systems and fuzzy control. Corresponding author of this paper.)

郑利红 山西大学数学科学学院硕士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制和智能控制. E-mail: zhenglihong_2006@126.com

(**ZHENG Li-Hong** Master student at Shanxi University. His research interest covers robust control and fuzzy control.)

池小波 山西大学数学科学学院硕士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制和智能控制. E-mail: xbchi@163.com

(**CHI Xiao-Bo** Master student at Shanxi University. His research interest covers robust control and fuzzy control.)

张大伟 山西大学数学科学学院硕士研究生. 主要研究方向为时滞系统和模糊系统. E-mail: zhang-daweisx@163.com

(**ZHANG Da-Wei** Master student at Shanxi University. His research interest covers time-delay systems and fuzzy systems.)