TORA 的动力学建模及基于能量的控制设计

高丙团 [1]

摘 要 针对旋转小球在垂直平面内运动的欠驱动 TORA (Translational oscillators with rotating actuator), 采用基于能量的方法, 设计了系统的状态反馈控制器. 基于拉格朗日方程, 建立了 TORA 的动力学模型, 从能量的角度出发, 说明了系统的无源特性, 在此基础上设计了一个合适李亚普诺夫函数, 从而得到了系统的控制算法; 采用拉萨尔不变性原理分析了控制系统的稳定性. 数值仿真实验证明了控制器的有效性.

关键词 基于能量的控制设计, TORA, 欠驱动, 李亚普诺夫函数, 无源性
中图分类号 TP273

Dynamical Modeling and Energy-based Control Design for TORA

GAO Bing-Tuan[1]

Abstract A state feedback controller is designed for an underactuated TORA (translational oscillators with rotating actuator). Based on Lagrange equations, the dynamics of TORA is derived. The total energy of the system is employed to show the passivity property of TORA, and then a proper Lyapunov function including energy item is designed. Based on Lyapunov theory, a state feedback control algorithm is achieved. The stability of the control system is based on LaSalle invariance theorem. Finally, simulation results demonstrate the feasibility of the presented controller.

Key words Energy-based control design, TORA, underactuated, Lyapunov function, passivity

具有旋转激励的平移振荡器 (Translational oscillators with rotating actuator, TORA), 或称为 RTAC (Rotational/translational actuator), 由一个未驱动的平移振荡器和驱动的转动小球组成, 且振荡器和小球都在水平面内运动, 其原本是双自旋航天器的简化模型, 现作为一个四阶的非线性基准系统, 通常用来检验针对低阶非线性动力学系统进行的非线性控制设计[1]. International Journal of Robust and Nonlinear Control 在 1998 年针对其非线性控制问题进行了专题研究[1−3]. 其常见的设计方法之一是将系统动力学转换为严格反馈形式的级联非线性系统, 然后通过 Backstepping 的方法得到系统的稳定控制输入[3−5]; 另一常见的设计方法则是利用系统的无源特性实现其稳定控制[5−7]. Jiang 等在文献 [8] 中给出了 TORA 系统的全局输出跟踪控制, 文献 [9] 则在实验的基础上研究了它的输出调节控制问题, 近来也有文献通过自调节模糊滑模控制实现了 TORA 系统的稳定控制[10].

本文基于能量的方法设计了旋转小球在垂直平面内运动的 TORA 系统的稳定控制方案, 并对所设计的控制系统进行了仿真实验验证.

收稿日期 2007-08-07 收修改稿日期 2008-03-21
Received August 7, 2007; in revised form March 21, 2008
1. 东南大学电气工程学院 南京 210096
1. School of Electrical Engineering, Southeast University, Nanjing 210096
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01221

1 系统建模

如图 1 所示, TORA 系统由驱动的小球和一个与弹簧连接的移动小车组成. 其中质量为 M 的小车与倔强系数为 k 的弹簧相连并在水平面内作一维运动, 小车的运动位置记为 x, 质量为 m 的小球在输入转矩 τ 的作用下在一个垂直的平面内转动, 转动半径为 r, 小球关于其质心的转动惯量为 I, 小球逆时针转离重力方向的角度记为 θ, 重力加速度记为 g.

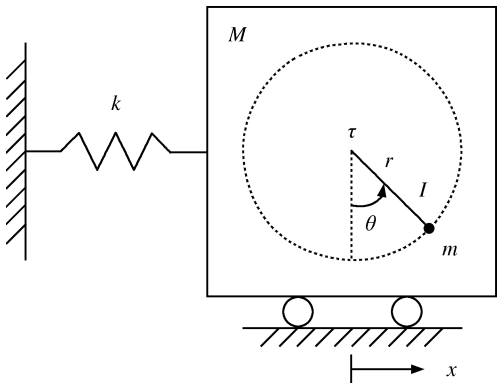


图 1 TORA 系统结构
Fig. 1 TORA system configuration

首先给出整个系统的动能和势能, 系统的总动能由两个部分组成, 小车和小球的总动能为

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}(mr^2+I)\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

系统的总势能为

$$P = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2)$$

1.1 系统动力学模型

TORA 系统的拉格朗日算子函数为

$$L = K - P = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}(mr^2+I)\dot{\theta}^2 + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 \quad (3)$$

根据拉格朗日方程, 系统相应的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (5)$$

经过计算可得系统的动力学描述为

$$(M+m)\ddot{x} + mr\cos\theta\ddot{\theta} - mr\sin\theta\dot{\theta}^2 + kx = 0$$
$$mr\cos\theta\ddot{x} + (mr^2+I)\ddot{\theta} + mgr\sin\theta = \tau$$

将动力学描述重写成矩阵形式

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + G(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{U} \quad (6)$$

其中

$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$M(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M+m & mr\cos\theta \\ mr\cos\theta & mr^2+I \end{bmatrix}$$

$$C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\begin{bmatrix} 0 & -mr\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} kx \\ mgr\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}$$

由动力学描述可以看出, TORA 系统中只有一个施加在小车上的驱动力, 但是却有两个状态变量需要控制, 即小车的位置和小球的摆角, 因此 TORA 系统是一个欠驱动机械系统.

注 1. 已有文献中考虑的 TORA 系统中的小球是在水平面内运动的, 而本文考虑的 TORA 系统, 其小球是在竖直方向的平面内运动的, 因此小球的运动受到自身重力的影响, 从而在转角动力学方程中增加了 $mgr\sin\theta$ 这一项.

注意到 $M(\boldsymbol{q})$ 是一个对称矩阵, 且

$$\det(M(\boldsymbol{q}))=(M+m)(mr^2+I)-(mr\cos\theta)^2= (M+m)I+Mmr^2+m^2r^2\sin^2\theta>0 \quad (7)$$

因此, $M(\boldsymbol{q})$ 对于所有的 $\boldsymbol{q}$ 是一个正定对称矩阵. 根据式 (6) 计算 $\dot{M}-2C$, 得到

$$\dot{M}(\boldsymbol{q})-2C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\begin{bmatrix} 0 & mr\sin\theta\dot{\theta} \\ -mr\sin\theta\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

因此其是斜对称矩阵, 即有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\dot{M}(\boldsymbol{q})-2C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))\boldsymbol{z}=0, \quad \forall\boldsymbol{z} \quad (9)$$

这个特征将在后续的说明 TORA 系统的无源性方面起到重要作用.

TORA 系统的势能 P 和 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$ 的关系为

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})=\frac{\partial P}{\partial\boldsymbol{q}}=\begin{bmatrix} kx \\ mgr\sin\theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

1.2 TORA 系统的无源性

系统的总能量为

$$E=K+P=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}M(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}-mgr\cos\theta+\frac{1}{2}kx^2 \quad (11)$$

根据式 (6) ~ (9), 可得

$$\begin{aligned}\dot{E}=&\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}+\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}G(\boldsymbol{q})= \\ &\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}(-C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{U}+\frac{1}{2}\dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}})+ \\ &\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})=\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\dot{\theta}\tau \end{aligned} \quad (12)$$

因此, 以 τ 为输入和 $\dot{\theta}$ 为输出的系统是无源的.

注 2. 从系统无源性的推导过程可以看出, 从能量角度出发说明系统无源性的方法同样适用于小球在水平面内运动的 TORA, 区别仅在于小球在水平内运动的 TORA 系统的总能量中无重力势能.

注意对于 $\tau=0$ 和 $\theta\in(-\pi,\pi]$, 系统 (6) 具有两个平衡点, 即一个不稳定的平衡点 $(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta})=(0,0,\pi,0)$ 和一个稳定的平衡点 $(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta})=(0,0,0,0)$; 系统的能量 $E(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 在不稳定的平衡点处等于 mgr, 在稳定的平衡点处为 $-mgr$. 本文的控制目标是将系统稳定在其稳定平衡点处.

2 基于能量的控制设计

利用系统的无源性, 构造如下的李亚普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=k_1(E+mgr)+\frac{k_2}{2}\theta^2 \quad (13)$$

其中 k_1, k_2 为正常数. 显然, 当 $\theta\in(-\pi,\pi]$ 时, 李亚普诺夫函数 $V(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 是正定的.

对候选李亚普诺夫函数求导, 可得

$$\dot{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=k_1\dot{E}+k_2\theta\dot{\theta}=k_1\dot{\theta}\tau+k_2\theta\dot{\theta}=\dot{\theta}(k_1\tau+k_2\theta) \quad (14)$$

令

$$k_1\tau+k_2\theta=-k_3\dot{\theta} \quad (15)$$

其中 $k_3>0$, 由此可得

$$\dot{V}=-k_3\dot{\theta}^2 \quad (16)$$

由式 (15) 可求出系统的控制输入为

$$\tau=-\frac{1}{k_1}(k_2\theta+k_3\dot{\theta}) \quad (17)$$

求出的控制输入 (17) 可以保证李亚普诺夫的导数是负半定的, 即保证式 (16) 是负半定的, 因此, 由李亚普诺夫稳定性判据可知, 闭环控制系统是稳定的.

注 3. 控制算法 (17) 表明实现系统的稳定可以不进行小车位置及其导数项的检测.

注 4. 从基于能量的控制设计过程可以看出, 该设计过程同样适用于小球在水平面内运动的 TORA, 且最后得到的控制算法 (17) 同样可以用来实现对其的稳定控制[2, 5].

注 5. 与文献 [2, 5] 针对小球在水平面内运动的 TORA 得到的同样的控制器相比较, 本文基于能量控制设计的方法, 设计李亚普诺夫函数的思路清晰, 且所设计的李亚普诺夫函数比较简洁, 从而得到的控制算法 (17) 也比较简单.

2.1 稳定性分析

根据拉萨尔不变性原理, 证明以下定理.

定理 1. 由式 (6) 和 (17) 组成的闭环系统中, 控制输入 (17) 能够将系统从任意初始位置渐近稳定到原点.

证明. 根据式 (16), 不变集 Γ 定义为 $\Gamma:\{(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta}):\dot{\theta}=0\}$. 在不变集 Γ 中, 根据 $\dot{\theta}=0$, 因而有 $\dot{V}=0$, 从而在不变集 Γ 中 θ, V 和 τ (根据式 (17)) 都是常量. 当 θ, V 和 τ 都是常量时, 根据式 (6) 可推出在不变集 Γ 中有 $x=0$, 从而有 $\dot{x}=0$. 则已经证明在不变集 Γ 中有 $(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta})=(0,0,\mathrm{const},0)$, 同时, 根据式 (6) 和 (17) 可得

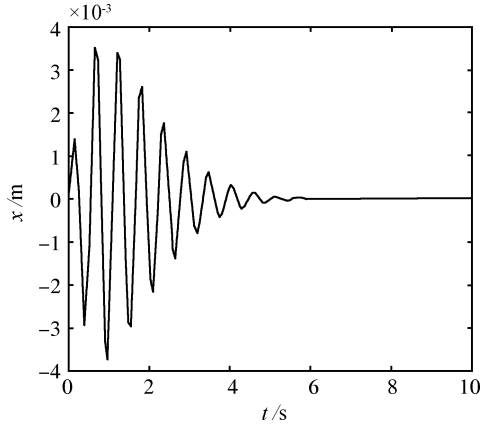
$$\tau=-\frac{k_2}{k_1}\theta=mgr\sin\theta \quad (18)$$

由于式 (18) 在 $\theta\in(-\pi,\pi]$ 内有唯一解 $\theta=0$. 因此, 不变集 Γ 的最大不变集为 $(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta})=(0,0,0,0)$, 从而根据拉萨尔

不变性原理, 控制系统渐近稳定于能量为 $-mgr$ 的稳定的平衡点处. □

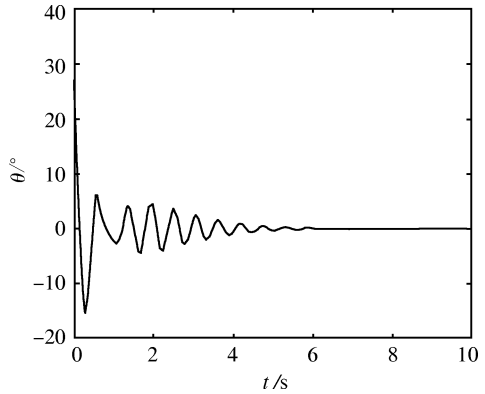
3　仿真实验

为了检验前面设计的控制方案, 下面给出控制系统的数值仿真实验. 仿真过程中系统参数取为文献 [1] 中实验平台的参数, 即 $M = 1.3608\,\mathrm{kg}$, $m = 0.096\,\mathrm{kg}$, $k = 186.3\,\mathrm{N/m}$, $r = 0.0592\,\mathrm{m}$ 和 $I = 0.0002175\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$; 其中控制器的参数取为 $k_1 = 450$, $k_2 = 5.3$, $k_3 = 1$. 仿真结果如图 2 和图 3 所示.



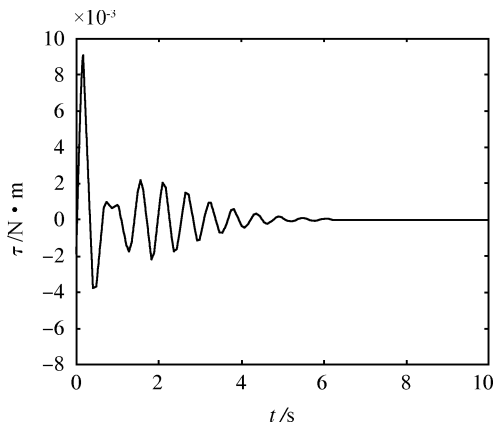
(a) 小车位置

(a) Cart position



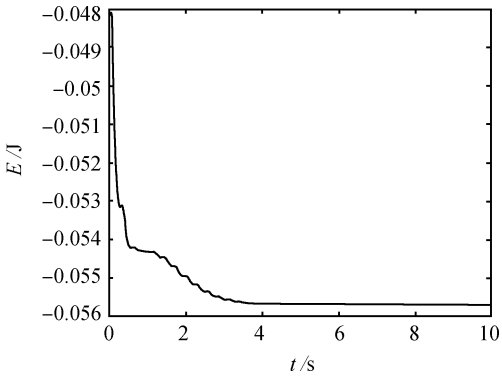
(b) 小球转角

(b) Rotated angle of the ball



(c) 控制输入

(c) Control input



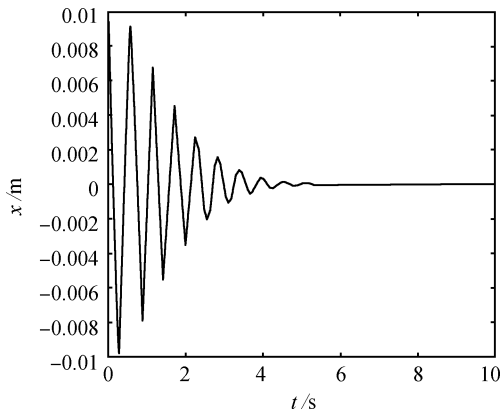
(d) 系统能量

(d) System energy

图 2　初始条件为 $(0, 0, 30, 0)$ 的仿真结果

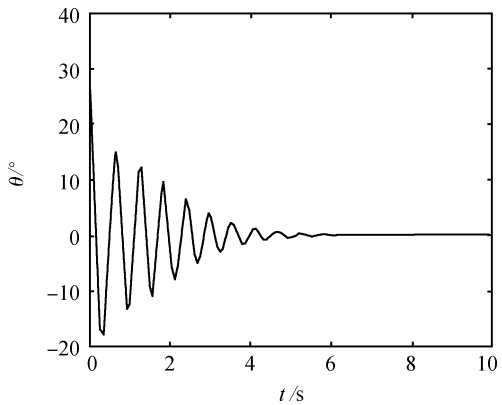
Fig. 2　Simulation results with initial condition $(0, 0, 30, 0)$

图 2 和图 3 分别是在初始条件为 $(0, 0, 30, 0)$ 和 $(0.01, 0, 30, 0)$ 情况下采用本文控制方案所得到的仿真结果. 由仿真结果可以看出, TORA 系统在状态反馈控制器的作用下, 在 6 s 之内实现了系统稳定的任务, 即将系统的状态由初始的稳定到原点, 此刻系统的能量处于最低的状态. 同时, 仿真结果显示小车的位置不大于 0.025 m, 持续输入转矩不大于 0.1 N·m, 满足文献 [1] 中的设计要求. 仿真结果还说明: 对于不同的初始条件, 在不检测小车位置和其速度的情况下, 所设计的控制器可以实现系统的渐近稳定控制.



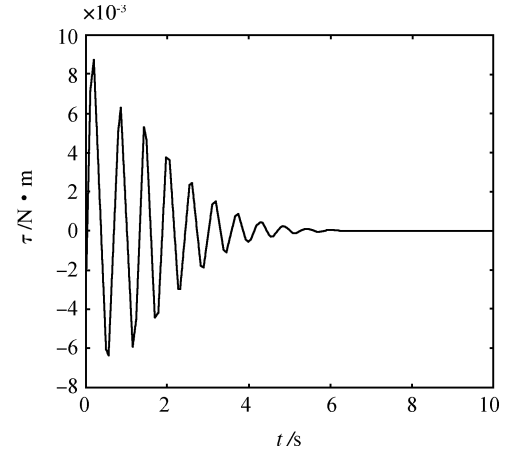
(a) 小车位置

(a) Cart position



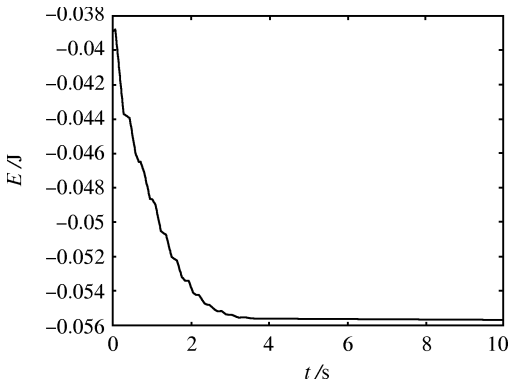
(b) 小球转角

(b) Rotated angle of the ball



(c) 控制输入

(c) Control input



(d) 系统能量

(d) System energy

图 3 初始条件为 $(0.01, 0, 30, 0)$ 的仿真结果

Fig. 3 Simulation results with initial condition $(0.01, 0, 30, 0)$

4 结论

本文针对旋转小球在垂直平面内运动的 TORA 进行了稳定控制的研究. 基于拉格朗日方程建立了该系统的动力学模型, 与旋转小球在水平面内运动的 TORA 的动力学相比, 小球在转动过程中自身的重力将影响其运动特征.

基于系统的总能量说明旋转小球在垂直平面内运动的 TORA 的无源性, 在此基础上设计了系统的李亚普诺夫函数, 从而基于李亚普诺夫定理得到实现系统全局渐近稳定的状态反馈算法, 这一控制设计过程也同样适用于旋转小球在水平面内运动的 TORA. 最后对文中给出的控制方案进行了数值仿真实验, 实验结果证明了所提出方案有效性.

References

1 Robert T B, Bernstein D S, Coppola V T. A benchmark problem for nonlinear control design. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1998, **8**(4-5): 307−310

2 Panagiotis T, Martin C, Mario A R. An L_2 disturbance attenuation solution to the nonlinear benchmark problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1998, **8**(4-5): 311−330

3 Robert T B, Bernstein D S, Coppola V T. Experimental implementation of integrator backstepping and passive nonlinear controllers on the RTAC testbed. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1998, **8**(4-5): 435−457

4 Wan C J, Bernstein D S, Coppola V T. Global stabilization of the oscillating eccentric rotor. In: Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control. Lake Beuna Vista, USA: IEEE, 1994. 4024−4029

5 Jankovic M, Fontaine D, Kokotovic P V. TORA example: cascade and passivity-based control designs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1996, **4**(3): 292−297

6 Alleyne A. Physical insights on passivity-based TORA control designs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1998, **6**(3): 436−439

7 Tadmor G. Dissipative design, lossless dynamics, and the nonlinear TORA benchmark example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, **9**(2): 391−398

8 Jiang Z P, Kanellakopoulos I. Global output feedback tracking for a benchmark nonlinear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(5): 1023−1027

9 Pavlov A, Janssen B, van de Wouw N, Nijmeijer H. Experimental output regulation for the TORA system. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference. Seville, USA: IEEE, 2005. 1108−1113

10 Hung L C, Lin H P, Chung H Y. Design of self-tuning fuzzy sliding mode control for TORA system. *Expert Systems with Applications*, 2007, **32**(1): 201−212

高丙团 东南大学电气工程学院讲师. 2007 年获得哈尔滨工业大学电气工程系博士学位. 主要研究方向为欠驱动机械系统和机器人学.
E-mail: gaobingtuan@seu.edu.cn
(**GAO Bing-Tuan** Lecturer at the School of Electrical Engineering, Southeast University. He received his Ph. D. degree from the Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology in 2007. His research interest covers underactuated mechanical systems and robotics.)