基于混合系统与终端不变集约束的混合整数规划优化控制

李坚强 [1,2] 裴海龙 [1] 王辉鹏 [1]

摘 要 首先给出了混合系统的混合逻辑动态 (Mixed logic dynamic, MLD) 模型建模; 提出了基于终端不变集约束的混合整数规划优化控制, 通过建立 Lyapunov 函数证明了该方法的可行性; 利用混合整型二次规划 (Mixed-integer quadratic programming, MIQP) 的方法对终端不变集约束混合系统的优化控制进行求解; 最后通过一个实例进行建模、仿真, 证明了本方法的可行性与优越性.

关键词 混合系统, 不变集, 混合逻辑动态模型, 混合整型二次规划
中图分类号 TP27

Mixed Integer Programming Control Based on Hybrid Systems and Terminal Constraint by Invariant Sets

LI Jian-Qiang[1,2] PEI Hai-Long[1] WANG Hui-Peng[1]

Abstract This paper gives a hybrid system model based on mixed logic dynamic (MLD) at first, and proposes a mixed integer programming control based on terminal constraint by invariant set. The validity of the method is proved by Lyapunov function; then the problem is solved by the mixed-integer quadratic programming (MIQP) method. Finally, an example is modeled, and the result of the simulation shows the validity and superiority of the method.

Key words Hybrid systems, invariant sets, mixed logical dynamical systems, mixed-integer quadratic programming (MIQP)

混合系统是由连续变量动态系统 (Continuous variable dynamic systems, CVDS) 和离散动态系统 (Discrete event dynamic systems, DEDS) 相互混合、相互作用而形成的一类动态系统, 其广泛存在于工程实践中, 如计算机控制系统、制造工业、机器人系统、现代飞行控制系统、汽车引擎系统等. 由于混合系统的实用性, 其近年来受到了控制和计算机领域学者的广泛关注, 并取得了大量成果. Lygeros 对混合系统的混合自动机建模, 混合系统的分析与综合, 可达集等几个方面进行了较为全面的论述[1]; Pei 对于一类含过渡状态混合系统的稳定区域进行了研究[2]; Jirstrand 通过线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 的方法解决了一类混合系统 — 分段仿射系统的不变集求解问题[3]; Li 等对一类混合动态系统, 通过 LMI 的方法求得有效的切换, 使系统的状态保持在一个不变集内[4]. 目前对混合系统的研究主要集中在基于稳定性、可达性等问题的研究上, 而对基于不变集的模型预测控制未见有关报道.

对于混合系统的终端稳定点约束的优化控制, Bemporad 和 Zhang 等通过混合逻辑动态 (Mixed logic dynamic, MLD) 模型建模, 利用混合整型二次规划 (Mixed-integer quadratic programming, MIQP) 的方法求得混合系统的最优控制[5−7]; 文献 [8−9] 给出了混杂系统、非线性系统混合逻辑动态模型的建模方法, 对其进行了稳定性分析. 但由于系统引入的是终点时刻状态的稳定等式约束, 虽然保证了系统的稳定性, 但等式约束的引入也减少了系统的可行区域, 降低了系统的最优控制效果.

本文混合系统的优化控制不同于文献 [5], 主要通过终端不变集的引入, 系统的状态最终收敛于一定的区域或集合内, 同时系统的 MLD 建模、MIQP 求解均是建立在终端不变集约束的条件下, 这将大大增加系统的可行区域. 本文的结构如下: 第 1 节对混合系统进行混合逻辑动态模型建模; 第 2 节引入改进后混合整型二次规划的方法, 并对混合系统进行优化控制求解; 第 3 节通过一个实际混合系统的例子对基于不变集约束混合整型二次规划的方法进行验证, 证明方法的可行性.

1 混合系统 MLD 建模

1.1 混合系统建模

对于混合系统理论的研究, 目前还有一种通用的混合系统分析与控制器的设计方法, 建立通用的分析与设计方法, 具有相当的难度. 因而针对某一类的混合系统, 建立起相对应的分析与设计方法. 现有模型中, 离散混合自动机 (Discrete hybrid automata, DHA) 适用于混合系统的建模、仿真等方面的问题; 分段仿射系统 (Piecewise affine, PWA) 能够方便分析混合系统的稳定性和不变性, 方便求解系统的不变集[3−4]; 线性互补模型 (Linear complementarity, LC) 能够方便建立混合系统的状态演化轨迹的存在性与唯一性问题; 而混合逻辑动态系统模型则能够方便地建立并求解混合系统的优化控制、状态估计及系统的故障检测[9]. 本文主要通过 MLD 建模, 通过预测控制, 满足系统的优化控制与系统最终状态的不变集约束.

1.2 混合系统 MLD 建模

混合系统的离散时间混合逻辑动态模型由 Bemporad 和 Morari 于 1999 年提出[5], 其一般表示式为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}(t+1) = A_t\boldsymbol{x}(t) + B_{1t}\boldsymbol{u}(t) + B_{2t}\boldsymbol{\delta}(t) + B_{3t}\boldsymbol{z}(t) \\ &\boldsymbol{y}(t) = C_t\boldsymbol{x}(t) + D_{1t}\boldsymbol{u}(t) + D_{2t}\boldsymbol{\delta}(t) + D_{3t}\boldsymbol{z}(t) \\ &E_{2t}\boldsymbol{\delta}(t) + E_{3t}\boldsymbol{z}(t) \le E_{1t}\boldsymbol{u}(t) + E_{4t}\boldsymbol{x}(t) + E_{5t} \end{aligned} \tag{1}$$

式中, $t \in \mathbf{Z}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_c \\ x_l \end{bmatrix}$, $x_c \in \mathbf{R}^{n_c}$, $x_l \in \{0,1\}^{n_l}$, $n = n_c + n_l$; $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_c \\ y_l \end{bmatrix}$, $y_c \in \mathbf{R}^{p_c}$, $y_l \in \{0,1\}^{p_l}$, $p = p_c + p_l$; $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_c \\ u_l \end{bmatrix}$, $u_c \in \mathbf{R}^{m_c}$, $u_l \in \{0,1\}^{m_l}$, $m = m_c + m_l$ 分别为系统的状态、输出、以及控制输入. 它们既可以是连续变量 (用下标 c 表示), 也可以是离散 (逻辑) 变量 (用下标 l 表示), 也

收稿日期 2007-08-21 收修改稿日期 2008-04-17
Received August 21, 2007; in revised form April 17, 2007
国家自然科学基金 (60374036, 60574004, 60736024), 高校博士点基金 (20040561031), 广东省自然科学基金 (20040561031) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60374036, 60574004, 60736024), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20040561031), and the Natural Science Foundation of Guangdong Province (20040561031)
1. 华南理工大学自动化学院 广州 510641 2. 深圳大学信息工程学院 深圳 518060
1. Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou 510641 2. School of Information Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01203

可以同时包含二者. $\delta(t), z(t)$ 分别是 MLD 模型引入的辅助逻辑变量与辅助连续变量. 辅助离散 (逻辑) 变量, 用于刻画混合系统中的各个部分之间的逻辑关系, 用于表示离散事件、系统的不同运行模态或者用于表示系统运行所处的不同区域范围. 在混合整数不等式中既包含了 $\delta(t), z(t)$ 的定义, 也包含了由于物理限制或安全运行的需要而必须要引入的系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 与控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 所应满足的约束条件.

2 不变集约束的 MLD 模型优化预测控制

2.1 不变集约束优化控制问题的提出

第 1.2 节介绍了对混合系统进行 MLD 建模的方法, 以及在建立 MLD 模型后, 给定混合系统的初始状态 x_0、状态 $\boldsymbol{x}$ 与输入 $\boldsymbol{u}$ 的约束条件等概念, 但与文献 [5] 所不同的是, 本文采用了终端不变集约束, 这将扩大系统的可行区域, 提高系统的优化性能. 我们提出了如下改进的混合整数预测控制, 首先考虑如下的最优控制问题.

问题 1. 给定一个初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 和终止时间 T, 找到一个控制序列 $u_0^{T-1}=\{\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{u}(1),\cdots,\boldsymbol{u}(T-1)\}$, 使得系统状态到达所要求的不变集内, 并使性能指标 (2) 最优.

目标函数

$$\min_{\{u_t^{T-1}\}} J(u_t^{T-1},\boldsymbol{x}(t)) = \min_{\{u_t^{T-1}\}} \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} \|\boldsymbol{u}_t(k)-\boldsymbol{u}_e\|_{Q_1}^2 + \|\boldsymbol{\delta}_t(k|t)-\boldsymbol{\delta}_e\|_{Q_2}^2 + \|\boldsymbol{z}_t(k|t)-\boldsymbol{z}_e\|_{Q_3}^2 + \|\boldsymbol{x}_t(k|t)-\boldsymbol{x}_e\|_{Q_4}^2 + \|\boldsymbol{y}_t(k|t)-\boldsymbol{y}_e\|_{Q_5}^2 \right\} \tag{2}$$

约束条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1|t)=A\boldsymbol{x}(k|t)+B_1\boldsymbol{u}(k|t)+B_2\boldsymbol{\delta}(k|t)+B_3\boldsymbol{z}(k|t) \\ \boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(k|t)+D_1\boldsymbol{u}(k|t)+D_2\boldsymbol{\delta}(k|t)+D_3\boldsymbol{z}(k|t) \\ E_2\boldsymbol{\delta}(k|t)+E_3\boldsymbol{z}(k|t)\le E_1\boldsymbol{u}(k|t)+E_4\boldsymbol{x}(k|t)+E_5 \\ \boldsymbol{x}(T|t)\in \mathrm{Inv}(\boldsymbol{x}), \quad k=0,1,\cdots,T-1 \end{cases} \tag{3}$$

根据滚动时域控制, 取

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}_t^*(0) \tag{4}$$

式 (2) 中 $Q_i=Q_i^{\mathrm{T}}\ge 0, i=1,\cdots,5$ 是已知的权重阵, $\boldsymbol{x}_e$ 为 $\mathrm{Inv}(\boldsymbol{x})$ 的任一状态, $(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{u}_e,\boldsymbol{\delta}_e,\boldsymbol{z}_e)$ 为系统的终端状态. 式 (2) ~ (4) 为该改进预测控制算法, 与一般混合整数预测控制算法不同, 式 (3) 中用不变集 $\mathrm{Inv}(\boldsymbol{x})$ 集合来约束终端. 由于不变集的特殊属性, 这样可以即保证预测控制系统的稳定性同时, 又可以扩宽系统的可行区域, 增强系统的最优化控制效果. 对于系统的不变集求解可以参考文献 [3−4].

2.2 控制算法的可行性

对于问题 1, 假设 t 是当前时刻, $\boldsymbol{x}(t)$ 为当前系统状态. 记: $u_t^{k-1}=\{\boldsymbol{u}_t(0),\boldsymbol{u}_t(1),\cdots,\boldsymbol{u}_t(k-1)\}$, 表示在 t 时刻求得的未来 k 时刻的最优控制序列. $\boldsymbol{x}(k|t)=\boldsymbol{x}(t+k,\boldsymbol{x}(t),u_t^{k-1})$, 表示基于系统的模型, t 时刻状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 在控制序列 u_t^{k-1} 作用下, 未来 $t+k$ 时刻系统状态的预测. 同理 $\boldsymbol{\delta}(k|t)$, $\boldsymbol{z}(k|t)$, $\boldsymbol{y}(k|t)$, 都是基于当前时刻采用一控制序列对未来 k 时刻的预测.

定理 1. 对于混合系统 (1), $(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{u}_e,\boldsymbol{\delta}_e,\boldsymbol{z}_e)$ 为系统的终端状态, 且优化问题 (2) 存在可行解, 则满足问题 1 中的所有约束条件下, 预测控制策略 (2) ~ (4) 使系统收敛于终端不变集内.

证明. 利用标准李亚普诺夫稳定判据来对上面结论进行证明. 令

$$V(t)=J(U_t^*,\boldsymbol{x}(t)) \tag{5}$$

U_t^* 为最优控制序列 $\{\boldsymbol{u}_t^*(0),\cdots,\boldsymbol{u}_t^*(T-1)\}$, 取另一控制序列 $U_1=\{\boldsymbol{u}_t^*(1),\boldsymbol{u}_t^*(2),\cdots,\boldsymbol{u}_t^*(T-1),\boldsymbol{u}_e\}$.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\delta}(k|t+1)=\boldsymbol{\delta}(k+1|t) \\ &\boldsymbol{z}(k|t+1)=\boldsymbol{z}(k+1|t), \quad k=0,\cdots,T-1 \\ &\boldsymbol{\delta}(T-1|t+1)=\boldsymbol{\delta}_e, \quad \boldsymbol{z}(T-1|t+1)=\boldsymbol{z}_e \\ &\boldsymbol{x}(T-1|t+1)=\boldsymbol{x}(T|t)\in \mathrm{Inv}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ U_1 为可行解, 可得

$$V(t+1)\le J(U_1,\boldsymbol{x}(t+1)) \tag{6}$$

$V(t+1)$ 取最优控制序列 U_{t+1}^*, 将不等式右边展开, 得

$$\begin{aligned} &J(U_1,\boldsymbol{x}(t+1))= \\ &\|\boldsymbol{u}_t^*(1)-\boldsymbol{u}_e\|_{Q_1}^2+\cdots+\|\boldsymbol{u}_t^*(T-1)-\boldsymbol{u}_e\|_{Q_1}^2+ \\ &\|\boldsymbol{u}_e-\boldsymbol{u}_e\|_{Q_1}^2+\|\boldsymbol{\delta}(0|t+1)-\boldsymbol{\delta}_e\|_{Q_2}^2+\cdots+ \\ &\|\boldsymbol{\delta}(T-2|t+1)-\boldsymbol{\delta}_e\|_{Q_2}^2+\|\boldsymbol{\delta}(T-1|t+1)-\boldsymbol{\delta}_e\|_{Q_2}^2+ \\ &\|\boldsymbol{z}(0|t+1)-\boldsymbol{z}_e\|_{Q_3}^2+\cdots+\|\boldsymbol{z}(T-2|t+1)-\boldsymbol{z}_e\|_{Q_3}^2+ \\ &\|\boldsymbol{z}(T-1|t+1)-\boldsymbol{z}_e\|_{Q_3}^2+\|\boldsymbol{x}(0|t+1)-\boldsymbol{x}_e\|_{Q_4}^2+\cdots+ \\ &\|\boldsymbol{x}(T-2|t+1)-\boldsymbol{x}_e\|_{Q_4}^2+\|\boldsymbol{x}(T-1|t+1)-\boldsymbol{x}_e\|_{Q_4}^2+ \\ &\|\boldsymbol{y}(0|t+1)-\boldsymbol{y}_e\|_{Q_5}^2+\cdots+\|\boldsymbol{y}(T-2|t+1)-\boldsymbol{y}_e\|_{Q_5}^2+ \\ &\|\boldsymbol{y}(T-1|t+1)-\boldsymbol{y}_e\|_{Q_5}^2 \end{aligned} \tag{7}$$

经过替代转换, 上式可化为

$$\begin{aligned} &J(U_1,\boldsymbol{x}(t+1))=V(t)-\|\boldsymbol{u}_t^*(0)-\boldsymbol{u}_e\|_{Q1}^2- \\ &\|\boldsymbol{\delta}(0|t)-\boldsymbol{\delta}_e\|_{Q2}^2-\|\boldsymbol{z}(0|t)-\boldsymbol{z}_e\|_{Q3}^2-\|\boldsymbol{x}(0|t)-\boldsymbol{x}_e\|_{Q4}^2- \\ &\|\boldsymbol{y}(0|t)-\boldsymbol{y}_e\|_{Q5}^2+\|\boldsymbol{x}(T|t)-\boldsymbol{x}_e\|_{Q4}^2 \end{aligned} \tag{8}$$

基于初始时刻对 t 时刻的预测值为等于 t 时刻的实际测量值, 可得

$$\begin{aligned} &V(t+1)\le V(t)-||\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}_e||_{Q1}^2- \\ &||\boldsymbol{\delta}(t)-\boldsymbol{\delta}_e||_{Q2}^2-||\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}_e||_{Q3}^2-||\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e||_{Q4}^2- \\ &||\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}_e||_{Q5}^2+||\boldsymbol{x}(T|t)-\boldsymbol{x}_e||_{Q4}^2 \end{aligned} \tag{9}$$

当 $\boldsymbol{x}(t)$ 未到达不变集时, $V(t)$ 是单调递减的函数, 系统将逐步收敛到不变集, 当 t 取值趋于无穷时, $\boldsymbol{x}(t)$ 最终稳定在不变集内, 说明控制算法可行, 系统 (1) 在满足终端不变集约束下求得最优控制. □

3 MLD 模型 MIQP 问题的求解

3.1 MLD 模型优化预测控制

建立 MLD 模型后, 给定混合系统初始状态 $\boldsymbol{x}_0$, 控制的终止时刻 T 以及终端不变集 $\mathrm{Inv}(\boldsymbol{x})$, 对于问题 1 的求解为二

次的优化控制问题, 由于式 (1) 中 $\boldsymbol{x}$ 的状态方程具有线性的性质, 可得

$$\boldsymbol{x}(t)=A^t\boldsymbol{x}_0+\sum_{i=0}^{t-1}A^i[B_1\boldsymbol{u}(t-1-i)+ B_2\boldsymbol{\delta}(t-1-i)+B_3\boldsymbol{z}(t-1-i)] \tag{10}$$

经过推导、整理, 在任一离散时刻, 问题 1 与式 (10) 的优化控制可转化为标准的混合整数规划 MIQP 问题[5−6], 即

$$\min_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{\gamma}+F\boldsymbol{\gamma})$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}A_{ineq}\boldsymbol{\gamma}\le b_{ineq}\\ A_{eq}\boldsymbol{\gamma}=b_{eq}\\ \boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^{nc}\times\{0,1\}^{nd}\\ \boldsymbol{\gamma}(itype)\in\{0,1\}^{nd}\end{cases} \tag{11}$$

混合整数规划问题, 通常是 NP 难问题. 对于 MIQP 问题的求解, 在文献 [5−7] 中都有对 MIQP 算法的描述和讨论, 目前主要有四种方法: 切相平面法 (Cutting plane methods), 分解法 (De-composition methods), 基于逻辑法 (Logic-based methods) 和 B & B 法 (Branch and bound methods). 其中, B & B 法是最成功与有效的[5]. 在文献 [10] 的研究报告中, Fletcher 和 Leyffer 对几种方法进行了数值研究, 得出 B & B 法具有一定的优越性. 因而本文将采用 B & B 法进行 MIQP 问题的求解.

3.2　基于终端不变集约束的 B & B 算法

B & B 算法求解 MIQP 问题的主要思想是: 通过放松决策变量中的部分或全部的整数约束限制, 生成一系列对应原来 MIQP 问题的连续二次规划 (Quadratic programming, QP) 问题, 通过求解这一系列的 QP 问题可以得到符合整数约束条件的 MIQP 问题的解 (次优解或全局最优解). 而求解 QP 问题, 是比较容易的, 而且可以直接借助 Matlab optimization toolbox 中现有的求解 QP 问题的程序来完成.

B & B 方法求解 MIQP 问题的原理可用完全二叉树的数据结构来表示. 令 $\boldsymbol{\lambda}\in\{0,1,*\}^{nd}$ 是一向量, $\boldsymbol{\lambda}$ 的维数与整数约束的决策变量中的变量的维数相同. 放松决策变量中所有的取整数值的约束条件后, 用 $\boldsymbol{\lambda}_0$ 表示. 如 $\boldsymbol{\lambda}_0=\{*,*,\cdots,*\}$, 当 λ_i 中的某一元素的值取为 * 时, $0\le\lambda_i\le1$. 对应于二叉树的树根, $\boldsymbol{\lambda}_0$ 对应的求解问题即 QP 问题. B & B 求解法的结构可如图 1 所示.

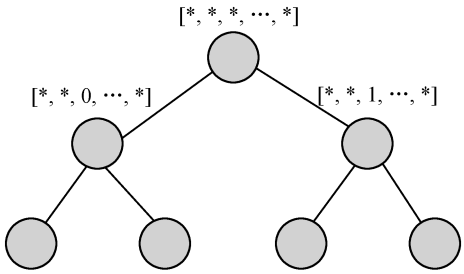

图 1　B & B 算法二叉树结构图

Fig. 1　Binary tree of B & B method

通过对放松决策变量后的最优问题进行求解, 求解得到最优连续决策变量以及目标函数的最优值, 若问题无解, 或者最优值为无穷大时, 则说明对应的原 MIQP 问题也都无解. 若满足整数约束条件, 则为原 MIQP 问题的全局最优解; 若不满足整数约束条件, 则必须在 λ_0 的基础上, 进一步生成 QP 问题, 并求解这些 QP 问题. 方法如图 1 所示, 选择 $\boldsymbol{\lambda}_0$ 中的某一元素 (如选择第三个元素), 分别设定该元素的值为 0 和 1. 在二叉树上, 对应节点如生成的两个子节点 $\boldsymbol{\lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_2$, $\boldsymbol{\lambda}_1=\{*,*,0,\cdots,*\}$, $\boldsymbol{\lambda}_2=\{*,*,1,\cdots,*\}$. 接着再对生成 QP 问题进行求解. 根据这一原理, 可以推出 B & B 求解不变集终端约束 MIQP 问题的算法, 如图 2 所示.

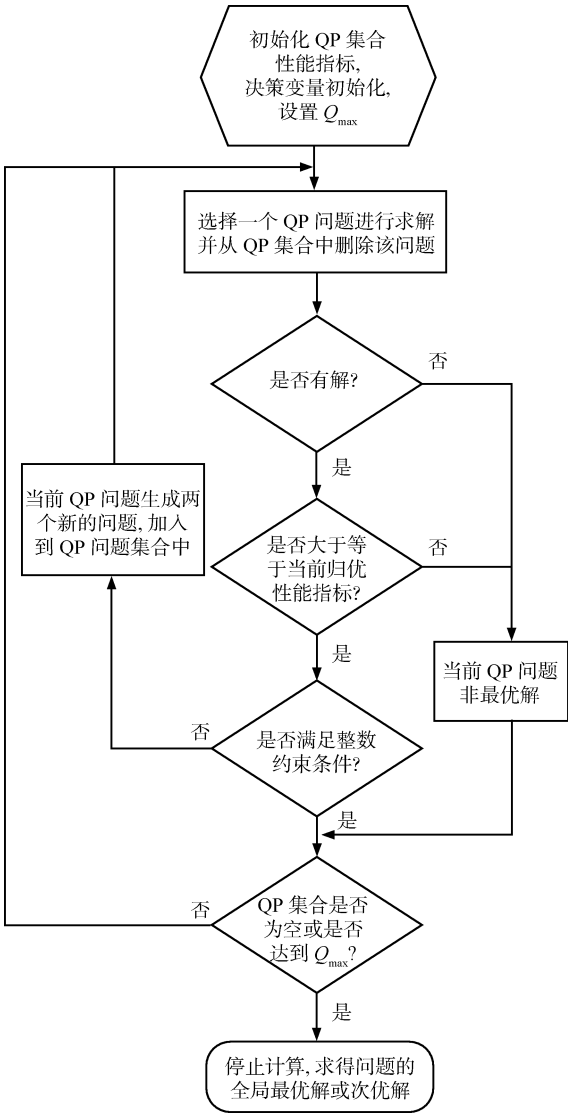

图 2　B & B 求解不变集终端约束算法

Fig. 2　Computation of B & B method by invariant sets terminal constraint

步骤 1. 用对应向量 $\boldsymbol{\lambda}_0$ 初始化 QP 问题集合; 令性能指标与决策变量初始化设置为无穷大. 设定最大限制寻优过程求解的数目 $Q_{\max}$.

步骤 2. 从 QP 问题的集合中选择一个作为当前待求解的 QP 问题, 并从 QP 问题的集合中删除该 QP 问题.

步骤 3. 在终端不变集约束下, 求解当前的 QP 问题, 可分为以下几种情况:

a) 若当前的 QP 问题是无解的, 则该 QP 问题为根节点的子树内所有其他节点对应的 QP 问题也是无解的, 转至步骤 5;

b) 若所求得性能指标大于或等于当前的性能指标, 则以该 QP 问题为根节点的子树内所有其他节点对应的 QP 问题的解也是大于当前的性能指标, 因而无需计算它们对应的 QP 问题, 转至步骤 5;

c) 若所求得性能指标小于当前的性能指标, 且满足整数约束条件, 则当前 QP 问题的解, 即为到目前为止求得的 MIQP 问题的最优解, 更新当前最优解的值, 转至步骤 5;

d) 若所求得性能指标小于当前的性能指标, 但是不满足整数约束条件, 转至步骤 4.

步骤 4. 在当前的 QP 问题的基础上, 生成两个新的 QP 问题, 并加入到 QP 问题的集合中, 转至步骤 2.

步骤 5. 如果 QP 问题集合为空集或求解的 QP 问题的数目已达到 $Q_{\max}$, 则停止计算, 求得问题的全局最优解或次优解; 如果 QP 问题集合为非空集, 则转至步骤 2, 继续求解其他最优解. 若求解结束得到的解为 ∞, 则 QP 问题不可解.

从以上步骤可以看出 B & B 算法求解 MIQP 问题最大数目为 $2^{nd+1}-1$. 从步骤 3 中我们可以看到, 当某一子树的根节点对应的 QP 问题无解或有解但非最优时, 则该子树内其他节点对应的 QP 问题也就无需求解. 从而, 大大减少了需要求解的 QP 问题的数量. 若这种子树的规模越大、越多, 则算法就越有效.

4 仿真例子

4.1 接球模型

考虑文献 [11] 所示的接球系统模型, 这是一个典型的混合动态系统. 如图 3 所示, 系统中有一小车, 可横向自由移动, 移动过程中受到外力为 u 的推动和粘滞摩擦系数为 β 的阻力作用. 有三个小球从高空中以一固定速度下跌, 系统的目标就是要通过左右移动下面的小车接到落下来的小球. 为了不变集的定义, 小球由原来的 2 个增加到了 3 个. 在图 3 中, y_1, y_2, y_3 分别表示小球的垂直高度, d_1, d_2, d_3 分别表示在横向的位置, x 为小车的中心横向位. 当且仅当 $|x-d_i|\le b$ 和 $a_1\le y_i\le a_2$, $i=1,2,3$. 其中小球的下降过程中还受到向上的扰动气流 u_i, $i=1,2,3$.

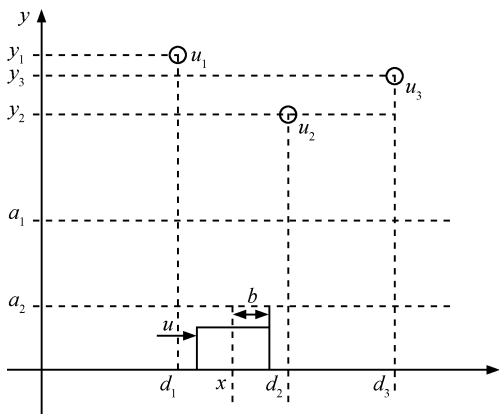

图 3 接球模型

Fig. 3 Model of grabbing the balls

先对该系统进行模型分析. 系统包含两个连续动态部分, 一部分是小球的下落, 这个动态行为可以用如下动态方程对其进行描述

$$\dot{y}_1=-c_1+\gamma u_1 \tag{12}$$

$$\dot{y}_2=-c_2+\gamma u_2 \tag{13}$$

$$\dot{y}_3=-c_3+\gamma u_3 \tag{14}$$

式中 c_1, c_2, c_3, γ 为一固定常数, u_1, u_2, u_3 为属于 [0 $\mathrm{jet}_{\max}$] 区间. 另外一部分连续动态即为小车的连续动态行为, 根据牛顿力学, 可用如下动态方程表示

$$M\ddot{x}=-\beta\dot{x}+u \tag{15}$$

式中 M 表示小车的质量.

4.2 MLD 建模

系统包含有五个连续状态 (车位移 x_1, 速度 x_2, 球位移 y_1, y_2, y_3), 三个逻辑状态 C_1, C_2, C_3 分别表示接到球 $1,2,3$. 据此, 可以先引入 15 个辅助逻辑变量 δ_i, $i=\{1,2,\cdots,15\}$, 满足以下关系

$$\begin{cases}\delta_1\Leftrightarrow y_1\le a_1 & \delta_3\Leftrightarrow y_2\le a_1 & \delta_5\Leftrightarrow y_3\le a_1\\ \delta_2\Leftrightarrow y_1\ge a_2 & \delta_4\Leftrightarrow y_2\ge a_2 & \delta_6\Leftrightarrow y_3\ge a_2\\ \delta_7\Leftrightarrow x\le d_1+b & \delta_9\Leftrightarrow x\le d_2+b & \delta_{11}\Leftrightarrow x\le d_3+b\\ \delta_8\Leftrightarrow x\ge d_1-b & \delta_{10}\Leftrightarrow x\ge d_2-b & \delta_{12}\Leftrightarrow x\ge d_3-b\\ \delta_{13}\Leftrightarrow C_1 & \delta_{14}\Leftrightarrow C_2 & \delta_{15}\Leftrightarrow C_3\end{cases} \tag{16}$$

再引入一个连续辅助变量 z_1, z_2, z_3, 有

$$z_1=(-c_1+\gamma u_1)(1-\delta_1) \tag{17}$$

$$z_2=(-c_2+\gamma u_2)(1-\delta_2) \tag{18}$$

$$z_3=(-c_3+\gamma u_3)(1-\delta_3) \tag{19}$$

另外, 根据上述变量还有如下关系

$$\delta_{13}\Leftrightarrow[\delta_1=1]\wedge[\delta_2=1]\wedge[\delta_7=1]\wedge[\delta_8=1] \tag{20}$$

$$\delta_{14}\Leftrightarrow[\delta_3=1]\wedge[\delta_4=1]\wedge[\delta_9=1]\wedge[\delta_{10}=1] \tag{21}$$

$$\delta_{15}\Leftrightarrow[\delta_5=1]\wedge[\delta_6=1]\wedge[\delta_{11}=1]\wedge[\delta_{12}=1] \tag{22}$$

$$\delta_{13}+\delta_{14}+\delta_{15}=3 \tag{23}$$

将上述逻辑约束转换成 37 个混合整数线性不等式, 取参数 $M_1=1$, $a_1=2$, $a_2=1$, $d_1=2$, $d_2=3$, $d_3=5$, $b=0.5$, $a_1=2$, $c_1=6$, $c_2=8$, $c_3=7$, $\beta=0.2$, $\gamma=5$, $u_{\max}=[-60, 60]$, $\mathrm{jet}_{\max}=10$. 可以得出该系统的标准混合逻辑动态系统模型为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(t+1)=A\boldsymbol{x}(t)+B_1\boldsymbol{u}(t)+B_2\boldsymbol{\delta}(t)+B_3\boldsymbol{z}(t)\\&E_2\boldsymbol{\delta}(t)+E_3\boldsymbol{z}(t)\le E_1\boldsymbol{u}(t)+E_4\boldsymbol{x}(t)+E_5\end{aligned} \tag{24}$$

系数矩阵 A, B, E 的具体形式可以通过 HYSDEL 工具计算得到[11].

4.3 仿真结果

采用混合整数预测控制算法, 终端约束由三个小球都要接住 [0 0 0 0 0 1 1 1] 改为终端不变集约束, 即三个小球只需任意接住两个. 系统取如下参数, 初始状态为 [0 0 5 5 6 0 0], 控制目标是移动小车接住两个球后停回原点. 优化目标函数加权系数为 $Q_1 = 0.5I$, $Q_2 = I$, $Q_3 = I$, $Q_4 = I$, $Q_5 = 0$, 仿真结果如图 4～7 所示.

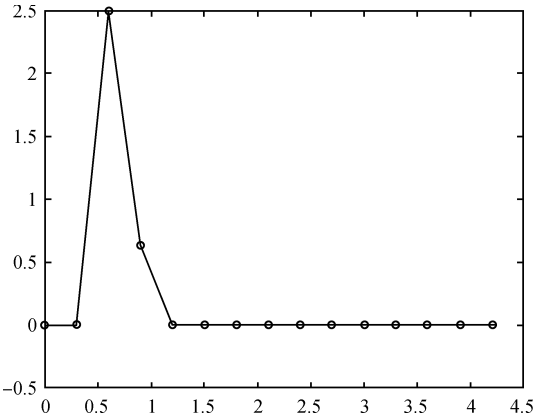

图 4　小车位移 x

Fig. 4　Position of the car x

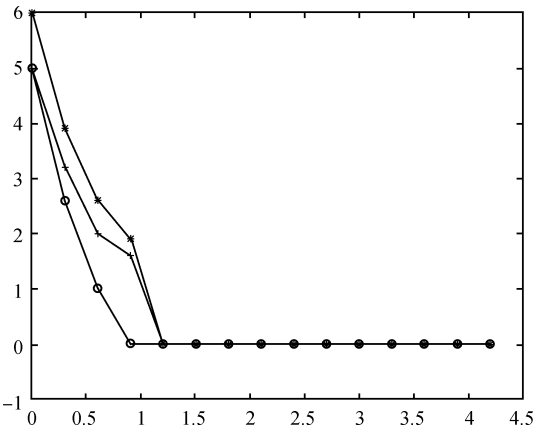

图 5　小球位置 y_1, y_2 和 y_3

Fig. 5　Position of grab the balls y_1, y_2, and y_3

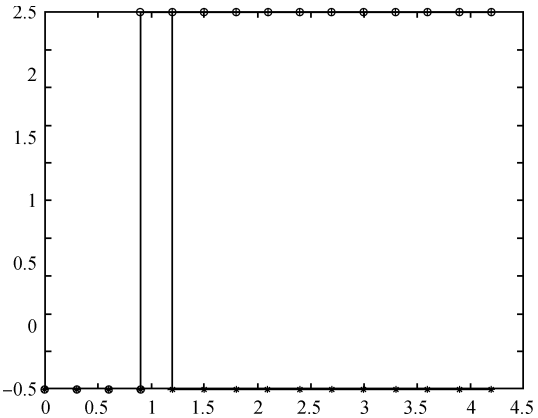

图 6　逻辑状态 C_1, C_2 和 C_3

Fig. 6　Logic states C_1, C_2, and C_3

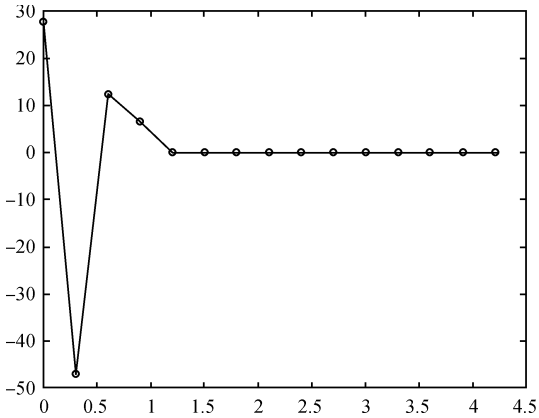

图 7　小车控制输入 u

Fig. 7　Control input u

相对于文献 [11] 中的实验结果, 采用改进的不变集约束的混合整数预测控制, 在稳定的终端约束改为一个终端不变集约束的条件下, 系统取得了很好的控制效果. 如图 6 所示, 小车达到了接住两个球的控制目标, 实现了终端不变集约束的条件, 相对文献 [11], 系统实现控制目标的时间更为迅速, 同时也增大了系统的可行域. 该方法将进一步应用于 "小型无人直升机自主导航与控制" 的建模仿真与控制器的设计中.

5 结论

本文提出了一种基于混合系统与终端不变集约束的混合整数预测控制方法. 首先利用 MLD 模型对混合系统进行建模, 然后提出了在终端不变集约束下的优化预测控制, 通过 MIQP 的方法求出最佳控制序列, 得到最优的控制效果. 从本文的仿真实例看, 用基于终端不变集约束的预测控制比稳定点约束控制得到了更好的效果, 不仅扩宽了可行域, 同时缩短了最优控制效果的时间, 这给路径规划研究, 无人机安全区域求解等应用提供了有效的方法.

References

1 Lygeros J. *Lecture Notes on Hybrid Systems*. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Patras, 2004

2 Pei H L, Krogh B H. Stability regions for systems with mode transitions. In: Proceedings of American Control Conference. Arlington, VA, USA: IEEE, 2001. 4834−4839

3 Jirstrand M. Invariant sets for a class of hybrid systems. In: Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control. Tampa, Florida, USA: IEEE, 1998. 3699−3704

4 Li J Q, Pei H L, Zhang S X, Liu B L. Efficient transition for invariant set in a class of hybrid systems. In: Proceedings of the 6th International Conference on Control and Automation. Guangzhou, China: IEEE, 2007. 1722−1726

5 Bemporad A, Morari M. Control of systems integrating logic, dynamic, and constraints. *Automatica*, 1999, **35**(3): 407−427

6 Zhang Ju. Hybrid Systems and Its Applications in Non-linear Control Systems [Ph. D. dissertation], Zhejiang University, 2005
(张聚. 混合系统理论及在非线性系统中的应用研究 [博士学位论文], 浙江大学, 2005)

7 Richards A, How J. Mixed-integer programming for control. In: Proceedings of American Control Conference. Portland, USA: IEEE, 2005. 2676−2683

8 Li Xiu-Gai, Gao Dong-Jie, Wang Yu-Hong. Predictive control for hybrid system based on mixed logic dynamic model. *Control and Decision*, 2002, **17**(3): 315−319
(李秀改, 高东杰, 王宇红. 基于混合逻辑动态模型的混杂系统预测控制. 控制与决策, 2002, **17**(3): 315−319)

9 Zou Tao, Wang Xin, Li Shao-Yuan. Multi-model predictive control for nonlinear systems based on mixed logic. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(2): 188−192
(邹涛, 王昕, 李少远. 基于混合逻辑的非线性系统多模型预测控制. 自动化学报, 2007, **33**(2): 188−192)

10 Fletcher R, Leyffer S. Numerical experience with lower bounds for MIQP branch-and-bound. *SIAM Journal on Optimization*, 1998, **8**(2): 604−616

11 Bemporad A. Hybrid Toolbox for Real-time Applications [Online], available: http://www.dii.unisi.it/hybrid/, April 15, 2008

李坚强 华南理工大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为混合系统、嵌入式系统研究. 本文通信作者. E-mail: aujqli@163.com
(**LI Jian-Qiang** Ph. D. candidate at the Institute of Automation, South China University of Technology. His research interest covers hybrid systems and embedded systems. Corresponding author of this paper.)

裴海龙 华南理工大学自动化学院教授. 主要研究方向为混合系统、嵌入式系统研究. E-mail: auhlpei@scut.edu.cn
(**PEI Hai-Long** Professor at the Institute of Automation, South China University of Technology. His research interest covers hybrid systems and embedded systems.)

王辉鹏 华南理工大学自动化学院硕士研究生. 主要研究方向为混合系统. E-mail: wanghuipeng@21cn.com
(**WANG Hui-Peng** Master student at the Institute of Automation, South China University of Technology. His research interest covers hybrid systems.)