不确定广义双线性系统的鲁棒镇定

兰奇逊 [1, 2] 梁家荣 [3] 高许岗 [4]

摘 要 针对带有不确定参数的广义双线性系统的鲁棒镇定问题进行研究, 其中不确定参数是时变且范数有界的. 本文的目的是设计状态反馈控制器, 使得对所有满足条件的不确定参数闭环系统都是渐近稳定的. 通过引入广义二次稳定的概念、采用 Lyapunov 方法, 分别给出了不确定广义双线性系统在两种不同情形下可镇定的充分条件; 此外, 两个数值例子分别说明了两种设计方法的有效性和合理性.

关键词 广义双线性系统, 不确定性, 鲁棒镇定, 二次稳定性, 渐近稳定性

中图分类号 TP13; O231

Robust Stabilization for Singular Bilinear Systems with Uncertainty

LAN Qi-Xun[1, 2] LIANG Jia-Rong[3] GAO Xu-Gang[4]

Abstract The problem of robust stabilization for uncertain singular bilinear systems (SBS) with norm-bounded time-varying uncertainties is studied. The purpose of this paper is to design a state feedback controller such that the closed-loop system is asymptotically stable for all admissible uncertainties. The sufficient conditions of stabilization for SBS with uncertainties in two different conditions are presented respectively via the notion of generated quadratic stability and Lyapunov method. Furthermore, effectiveness and rationality of the two design methods are illustrated by two numerical examples respectively.

Key words Singular bilinear systems, uncertainty, robust stabilization, quadratic stability, asymptotically stability

广义系统在电力系统、化学化工系统、经济系统、机器人系统、电子网络和宇航系统等领域中均有重要的应用背景, 近年来被人们所关注, 并取得了丰硕的成果[1−2]. 由于广义双线性系统结构简单、可以在更大范围内更精确地描述工业对象, 最近广义双线性系统的研究引起了国内外部分学者的关注[3−7]; 由于广义双线性系统和广义线性系统相比, 广义双线性系统增加了 "双线性" 项, 使得对广义双线性系统的研究比广义线性系统的研究复杂得多, 且有实际的具体背景[8]. 广义双线性系统还有许多问题有待进一步开拓与研究.

鲁棒控制是当今控制理论的一个研究热点, 对于结构不确定广义系统的鲁棒问题的研究已经取得了丰硕的成果[9−14]. 目前对于结构不确定广义双线性系统的鲁棒镇定的研究尚不多见, 本文的目的是利用广义二次稳定的概念和李雅普诺夫稳定性理论来设计状态反馈控制器, 使得闭环系统对所有满足条件的不确定参数是渐近稳定的.

在本文中 $\lambda_{\max}(W)$, $\lambda_{\min}(W)$ 分别表示 W 的最大, 最小特征值; W^{T} 表示 W 的转置; $\|W\| = [\lambda_{\max}(W^{\mathrm{T}}W)]^{\frac{1}{2}}$; $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$; $W > 0$ 表示 W 是正定的; $W \geq 0$ 表示 W 是半正定的; I 表示单位矩阵.

1 预备知识

考虑如下不确定广义系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A(t))\boldsymbol{x}(t) + (B + \Delta B(t))\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别为状态和控制输入; $E, A \in \mathbf{R}^{n\times n}, B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ 为定常矩阵; E 为奇异矩阵; $\Delta A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $\Delta B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ 为不确定矩阵, 且具有如下形式

$$[\Delta A(t)\ \Delta B(t)] = DF(t)[M_1\ M_2] \tag{2}$$

其中 D, M_1, M_2 是适当维数的矩阵, $F(t)$ 满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leq I \tag{3}$$

考虑系统 (1) 的无控参考模型

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A(t))\boldsymbol{x}(t) \tag{4}$$

及系统 (4) 的标称系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) \tag{5}$$

给出以下定义.

定义 1[14]**.** 如果存在两个常量 a, b 使得

$$\|E\boldsymbol{x}(t)\| \leq \|E\boldsymbol{x}(t_0)\|a\mathrm{e}^{-b(t-t_0)}, \quad t > t_0 \tag{6}$$

则称系统 (5) 是 E-指数稳定的.

定义 2[1]**.** 如果广义系统 (4) 对于任意给定的不确定性 $\Delta A(t)$ 都是容许的, 则称广义系统 (4) 是鲁棒稳定的.

如果广义系统 (4) 是鲁棒稳定的, 则广义系统 (4) 对于任意给定的不确定性 $\Delta A(t)$ 都是稳定的、正则的、无脉冲的[13], 即存在可逆实矩阵 P, Q 使得系统 (4) 等价于

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1 &= (A_1 + \Delta A_{11})\boldsymbol{x}_1 + \Delta A_{12}\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{0} &= \Delta A_{21}\boldsymbol{x}_1 + (I_{n-r} + \Delta A_{22})\boldsymbol{x}_2 \end{aligned} \tag{7}$$

取 Lyapunov 函数

$$\Phi(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}V\boldsymbol{x}(t) \tag{8}$$

将 $\Phi(\boldsymbol{x}(t))$ 沿广义系统 (4) 的轨迹求导, 得

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{x})|_{(4)} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[(A + \Delta A)^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}(A + \Delta A)]\boldsymbol{x} \tag{9}$$

定义 3[1]**.** 对于不确定广义系统 (4), 如果存在矩阵 $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和正实数 $\alpha > 0$, 使

$$\begin{aligned} &\dot{\Phi}(\boldsymbol{x}(t)) \leq -\alpha\|\boldsymbol{x}(t)\|^2, \forall \boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n \\ &E^{\mathrm{T}}V = V^{\mathrm{T}}E \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

对于任意允许的不确定性 $\Delta A(t)$ 都成立, 则称不确定广义系统 (4) 是二次稳定的.

收稿日期 2007-01-30 收修改稿日期 2007-05-09
Received January 30, 2007; in revised form May 9, 2007
国家自然科学基金 (60564001), 新世纪优秀人才支持计划 (NCET-06-0756) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60564001) and New Century Excellent Talents in University (NCET-06-0756)
1. 广西大学数学与信息科学学院 南宁 530004 2. 平顶山工学院 平顶山 467001 3. 广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004 4. 南京理工大学电子工程与光电技术学院 南京 210094
1. School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004 2. Pingdingshan Institute of Technology, Pingdingshan 467001 3. School of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004 4. School of Electronic Engineering & Optoelectronic Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00707

定义 3 和下面的定义 4 是等价的:

定义 4[1]**.** 如果存在矩阵 $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和正定矩阵 $L \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 使得广义系统 (4) 对于所有允许的不确定性 $\Delta A(t), t \in \mathbf{R}$, 满足

$$\begin{aligned}(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}(A+\Delta A) \le -L\\ E^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}E \ge 0\end{aligned} \tag{11}$$

则称广义系统 (4) 是二次稳定的.

引理 1[1]**.** 考虑不确定广义系统 (4), 若不确定性 $\Delta A(t)$ 具有式 (2) 的结构, 则不确定广义系统 (4) 二次稳定的充要条件是该广义系统是鲁棒稳定的.

定义 5[13]**.** 如果存在线性状态反馈 $\boldsymbol{u} = K\boldsymbol{x}$, 使得不确定广义系统 (1) 的闭环系统是定义 2 意义下二次稳定的, 则称不确定广义系统 (1) 是二次能稳的.

2 主要结果

考虑不确定广义双线性系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = (A+\Delta A(t))\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{m}(N_i+\Delta N_i)\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}_i + (B+\Delta B(t))\boldsymbol{u} \tag{12}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{u}(t) = [u_1, \cdots, u_m] \in \mathbf{R}^m$ 分别为状态和控制输入; E, A, $N_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ 为定常矩阵; E 为奇异矩阵; $\Delta A(t)$, $\Delta N_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $\Delta B(t) = [\Delta\boldsymbol{b}_1(t), \cdots, \Delta\boldsymbol{b}_m(t)] \in \mathbf{R}^{n\times m}$ 为不确定矩阵, 且满足下式

$$[\Delta A\ \Delta N_i\ \Delta\boldsymbol{b}_i] = DF(t)[M_1\ M_{2i}\ M_{3i}],\quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{13}$$

其中 D, M_1, M_{2i}, M_{3i} 是适当维数的矩阵, $F(t)$ 满足式 (3).

2.1 当系统 $(E, A+\Delta A)$ 是二次稳定的情形

为了方便起见, 首先考虑单输入不确定广义双线性系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = (A+\Delta A(t))\boldsymbol{x} + (N+\Delta N)\boldsymbol{x}\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}(t))\boldsymbol{u} \tag{14}$$

其中不确定矩阵满足

$$[\Delta A\ \Delta N\ \Delta\boldsymbol{b}] = DF(t)[M_1\ M_2\ M_3] \tag{15}$$

$F(t)$ 满足式 (3).

记 $\beta(\boldsymbol{x}) = [(N+\Delta N)\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})]$, 作以下假设.

假设 1. 在单输入不确定广义双线性系统 (14) 中, 系统 $(E, A+\Delta A)$ 是二次稳定的, 即存在矩阵 $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和正定矩阵 $L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 满足

$$\begin{aligned}(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}(A+\Delta A) \le -L\\ E^{\mathrm{T}}V = V^{\mathrm{T}}E \ge 0\end{aligned} \tag{16}$$

假设 2. 存在一个标量 $\lambda > 0$, 使得

$$L - 2\|V\|\|E\|I - \lambda E^{\mathrm{T}}V \ge 0 \tag{17}$$

假设 3. 在一个标量 $\gamma > 0$, 使得系统 (14) 的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 都满足

$$\|(N+\Delta N)\boldsymbol{x}\| \le \gamma\|E\boldsymbol{x}\| \tag{18}$$

假设 4. 式 (16) 中 V 是可逆的.

定理 1. 对于单输入不确定广义双线性系统 (14), 若假设 1 ∼ 4 同时成立, 则在控制 $\boldsymbol{u} = \varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})E\boldsymbol{x}/(\phi+1)^2$ 下单输入不确定广义双线性系统 (14) 的闭环系统是渐近稳定的, 其中

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (N+DM_2)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + DM_3$$

$$\phi = (\|N\| + \|D\|\|M_2\|)\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{b}\| + \|D\|\|M_3\|$$

证明. 不确定广义双线性系统 (14) 在控制 $\boldsymbol{u} = \varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})E\boldsymbol{x}/(\phi+1)^2$ 下构成的闭环系统为

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = (A+\Delta A(t))\boldsymbol{x} + \frac{\beta(\boldsymbol{x})\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})E\boldsymbol{x}}{(\phi+1)^2} \tag{19}$$

取 Lyapunov 函数为式 (8), 将 $\Phi(\boldsymbol{x})$ 沿广义系统 (19) 的轨迹求导, 得

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{x})|_{(19)} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}(A+\Delta A)]\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}\frac{\beta(\boldsymbol{x})\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})E\boldsymbol{x}}{(\phi+1)^2} \tag{20}$$

由于 $\Delta N = DF(t)M_2, \Delta\boldsymbol{b} = DF(t)M_3$, 所以

$$\begin{aligned}&\|\beta(\boldsymbol{x})\| = \|(N+\Delta N)\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})\| \le\\ &\|N+DF(t)M_2\|\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{b}+DF(t)M_3\| \le\\ &(\|N\|+\|D\|\|F\|\|M_2\|)\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{b}\| + \|D\|\|F\|\|M_3\| \le \phi\end{aligned} \tag{21}$$

又显然 $\|\varphi(\boldsymbol{x})\| \le \phi$.

由假设 1 和假设 2 及 $E^{\mathrm{T}}V = V^{\mathrm{T}}E \ge 0$ 可知

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(\boldsymbol{x})|_{(19)} \le\\ &-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}[(N+\Delta N)\boldsymbol{x} +\\ &(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})]\frac{\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})E\boldsymbol{x}}{(\phi+1)^2} \le\\ &-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x} + 2\|(V\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\|\|E\boldsymbol{x}\| \le\\ &-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x} + 2\|\boldsymbol{x}\|\|V\|\|E\|\|\boldsymbol{x}\| =\\ &-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\|V\|\|E\|\boldsymbol{x} \le\\ &-\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}V\boldsymbol{x} = -\lambda\Phi(E\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{22}$$

由此可得

$$\Phi(\boldsymbol{x}(t)) \le \Phi(\boldsymbol{x}(t_0))\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} \tag{23}$$

因为 $E^{\mathrm{T}}V = V^{\mathrm{T}}E \ge 0$, V 可逆, 所以存在一个正定矩阵 $\hat{V}$ 使得 $E^{\mathrm{T}}V = E^{\mathrm{T}}\hat{V}E$[10], 从而得到

$$\lambda_{\min}(\hat{V})\|E\boldsymbol{x}(t)\|^2 \le \Phi(E\boldsymbol{x}(t)) \le \lambda_{\max}(\hat{V})\|E\boldsymbol{x}(t_0)\|^2\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} \tag{24}$$

所以有

$$\|E\boldsymbol{x}(t)\| \le \|E\boldsymbol{x}(t_0)\|\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\hat{V})}{\lambda_{\min}(\hat{V})}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda(t-t_0)} \tag{25}$$

由定义 1 知系统 (19) 是 E-指数稳定的. 所以 $\lim_{t\to\infty} E\boldsymbol{x}(t) = 0$.

下面证明 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) = 0$. 在不确定广义双线性系统 (14) 中, 系统 $(E, A+\Delta A)$ 是二次稳定的, 所以存在可逆实矩阵 P, Q 使得式 (19) 等价于

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1 &= (A_1+\Delta A_{11})\boldsymbol{x}_1 + \Delta A_{12}\boldsymbol{x}_2 + f_1(\boldsymbol{x})\\ 0 &= \Delta A_{21}\boldsymbol{x}_1 + (I_{n-r}+\Delta A_{22})\boldsymbol{x}_2 + f_2(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{26}$$

其中, $[f_1(\boldsymbol{x})\ f_2(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}} = P\beta(\boldsymbol{x})\varphi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})E\boldsymbol{x}/(\phi+1)^2$.

由 $\lim_{t\to\infty} E\boldsymbol{x}(t) = 0$ 和假设 3 可知

$$\lim_{t\to\infty} f_1(\boldsymbol{x}) = 0, \lim_{t\to\infty} f_2(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{27}$$

现假设式 (26) 的解 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) \neq 0$, 不妨假设 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}_2(t) \neq 0$. 由于 $(E, A+\Delta A)$ 是二次稳定的, 所以

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}(A_1+\Delta A_{11})\boldsymbol{x}_1 + \Delta A_{12}\boldsymbol{x}_2 = -\lim_{t\to\infty} f_1(\boldsymbol{x}) \neq 0\\ &\lim_{t\to\infty} f_2(\boldsymbol{x}) = -\lim_{t\to\infty}(A_{21}\boldsymbol{x}_1 + (I_{n-r}+\Delta A_{22})\boldsymbol{x}_2) \neq 0\end{aligned} \tag{28}$$

这与式 (27) 矛盾. 所以 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) = 0$. □

若对于不确定广义双线性系统 (12) 满足假设 1 和假设 2, 假设 3 改为

假设 3.* 若存在一个标量 $\gamma > 0$, 使得系统 (12) 的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 都满足 $\|(N_i+\Delta N_i)\boldsymbol{x}\| \leq \lambda\|E\boldsymbol{x}\|$. 则可以得到推论 1.

推论 1. 对于不确定广义双线性系统 (12), 若假设 1 ∼ 2, 假设 3* 和假设 4 同时成立, 则在控制 $\boldsymbol{u}_i = \varphi_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})E\boldsymbol{x}/(\phi_i+1)^2 (i = 1, 2, \cdots, m)$ 下, 不确定广义双线性系统 (12) 的闭环系统是渐近稳定的. 其中

$$\phi_i = (\|M_1\| + \|D\|\|M_{2i}\|)\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{b}\| + \|D\|\|M_{3i}\|$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = (N_i + DM_{2i})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + DM_{3i}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

证明. 方法和定理 1 的方法相同. □

2.2 当系统 $(E, A+\Delta A)$ 不满足二次稳定的情形

若在单输入不确定广义双线性系统 (14) 中, $(E, A+\Delta A, \boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})$ 是二次能控的, 根据定义 5 做如下假设:

假设 5. 设存在状态反馈 $\boldsymbol{u} = KE\boldsymbol{x}$, 使得 $(E, A+\Delta A+(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})KE)$ 是二次稳定的.

记 $A_c = A+\Delta A+(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})KE, \bar{N} = N+\Delta N$. 根据定义 3 可知存在矩阵 $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和正定矩阵 $L \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 使得下面不等式成立

$$\begin{aligned}A_c^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}A_c \leq -L\\ E^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}E \geq 0\end{aligned} \tag{29}$$

则单输入不确定广义双线性系统状态反馈 $\boldsymbol{u} = KE\boldsymbol{x}$ 下的闭环系统为

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A_c\boldsymbol{x} + \bar{N}\boldsymbol{x}KE\boldsymbol{x} \tag{30}$$

取 Lyapunov 函数为式 (8), 将 $\Phi(\boldsymbol{x})$ 沿广义系统 (30) 的轨迹求导, 得

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{x})|_{(30)} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A_c^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}A_c)\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}\bar{N}\boldsymbol{x}KE\boldsymbol{x} \tag{31}$$

定义集合 $\Omega = \{\boldsymbol{x} : S \geq (\bar{N}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}H\bar{N}\boldsymbol{x}\}(S, H > 0)$, 令 $Y = \bar{N}\boldsymbol{x}KE\boldsymbol{x}$, 则

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(\boldsymbol{x})|_{(30)} =& \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A_c^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}A_c + V^{\mathrm{T}}H^{-1}V + (KE)^{\mathrm{T}}SKE)\boldsymbol{x} -\\ &(V\boldsymbol{x} - HY)^{\mathrm{T}}H^{-1}(V\boldsymbol{x} - HY) - (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(KE)^{\mathrm{T}}SKE\boldsymbol{x} - Y^{\mathrm{T}}HY)\end{aligned} \tag{32}$$

假设 6. 存在可逆矩阵 V, 矩阵 K 和一个标量 $\lambda > 0$ 使得

$$L - V^{\mathrm{T}}H^{-1}V - (KE)^{\mathrm{T}}SKE \geq \lambda E^{\mathrm{T}}V \tag{33}$$

由式 (32) 可知, $\dot{\Phi}(\boldsymbol{x})|_{(30)} \leq -\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}V\boldsymbol{x}$.

由上面的分析可得到定理 2.

定理 2. 若不确定广义双线性系统 (14), 满足假设 3、假设 5 和假设 6, 则在状态反馈 $\boldsymbol{u} = KE\boldsymbol{x}$ 下, 不确定广义双线性系统 (14) 的闭环系统是渐近稳定的.

证明. 方法和定理 1 的证明方法类似. □

3 例子

例 1. 考虑不确定广义双线性系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = (A+\Delta A(t))\boldsymbol{x} + (N+\Delta N)\boldsymbol{x}\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}(t))\boldsymbol{u} \tag{34}$$

其中 $[\Delta A\ \Delta N\ \Delta\boldsymbol{b}] = DF(t)[M_1\ M_2\ \boldsymbol{M}_3]$,

$$E = \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix}-9.5 & & \\ & -8.5 & \\ & & -8\end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix}0.5 & & \\ & 0.5 & \\ & & 0.5\end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix}\sin t & & \\ & \sin t & \\ & & 1\end{bmatrix},$$

$M_1 = E$, $M_2 = \mathrm{diag}\{4, 6, -2\}$, $\boldsymbol{M}_3 = [2, 0, 0]^{\mathrm{T}}$. 易知系统 $(E, A+\Delta A)$ 是二次稳定的, 分别取

$$L = \mathrm{diag}\{16, 16, 16\}, V = \mathrm{diag}\{1, 1, 1\}, \gamma = 5, \lambda = 14.$$

容易验证: 不等式 (16) ∼ (18) 得到满足, 即假设 1 ∼ 4 都得到满足.

根据定理 1, 我们所需要的镇定控制器为

$$\boldsymbol{u} = \frac{\left(\begin{bmatrix}4 & & \\ & 7 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}}{(5\|\boldsymbol{x}\|+2)^2} \tag{35}$$

容易证明在该控制器下式 (34) 的闭环系统是渐近稳定的.

例 2. 若在不确定广义双线性系统 (34), $A = \mathrm{diag}\{-8.5, 1, -8\}$, 其余的系数矩阵和例 1 中相同 (记该系统为式 (35)), 可知 $(E, A+\Delta A, \boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})$ 是二次能控的, 取

$$K = (0\ \ -9.5\ 1), V = \mathrm{diag}\{1,\ 1,\ 1\}, \gamma = 5, \lambda = 1,$$

$$L = \mathrm{diag}\{6, 6, 6\}, S = \frac{1}{400}, H = \mathrm{diag}\{0.2,\ 0.2,\ 0.2\},$$

则 $\Omega = \{\boldsymbol{x} : 16\boldsymbol{x}_1^2 + 25\boldsymbol{x}_2^2 \leq 1/400, \boldsymbol{x}_3 \in \mathbf{R}\}$.

容易验证, 假设 3、假设 5 和假设 6 的条件都得到满足. 根据定理 2, 我们取镇定控制器为 $\boldsymbol{u} = -9.5\boldsymbol{x}_2$, 容易证明在该控制器下 (35) 的闭环系统在 Ω 内是渐近稳定的.

例 3. 一个广义双线性系统的具体实例[8]:

某绝热式甲醇合成固定床催化反应器, 经双线性化, 可以用下列多参数奇异摄动双线性系统近似

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{T}}\\ \varepsilon_1\dot{\boldsymbol{Y}}_m\\ \varepsilon_2\dot{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{co_2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{Y}_m\\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{co_2}}\end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ 0 & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{Y}_m \\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{co}_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

式中, $\boldsymbol{T} = [\Delta T_1, \Delta T_2, \cdots, \Delta T_{n+1}]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{Y}_m = [\Delta y_{m1}, \Delta y_{m2}, \cdots, \Delta y_{m+1}]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{Y}_{\mathrm{co}_2} = [\Delta y_{\mathrm{co}_2,1}, \Delta y_{\mathrm{co}_2,2}, \cdots, \Delta y_{\mathrm{co}_2,m+1}]^{\mathrm{T}}$, ΔT_i, $\Delta y_{m,j}$ 和 $\Delta y_{\mathrm{co}_2,j}$, $(i = 1, \cdots, n+1; j = 1, \cdots, m+1)$ 分别为沿反应器轴向各配置点上的温度、甲醇摩尔分率和二氧化碳摩尔分率与其静态值的偏差; $\boldsymbol{u}$ 为进口气体摩尔流量, 这里为输入变量; A_{ij}, N_{ij} 均为 $(n+1) \times (n+1)$ 维常数矩阵, $i, j = 1, 2, 3$; $\boldsymbol{B}_i$ 均为 $(n+1) \times 1$ 维常数向量 $i = 1, 2, 3$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为奇异摄动小参数.

当 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 中一个为 0 或两个同时为 0 时 (不妨设 $\varepsilon_1 = 1/2, \varepsilon_2 = 0$), 则上述双线性系统则化成了如下的广义双线性系统

$$\begin{bmatrix} I & & \\ & \frac{1}{2}I & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{T}} \\ \dot{\boldsymbol{Y}}_m \\ \dot{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{co}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{Y}_m \\ \boldsymbol{Y}_{co_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ 0 & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{Y}_m \\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{co}_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

其中, I 为 $(n+1) \times (n+1)$ 单位矩阵.

4 结束语

本文对于不确定广义双线性系统鲁棒性进行了研究, 提出了两种不同情形下的鲁棒镇定方法, 保证了在相应的鲁棒控制律下所构成的闭环系统对所有满足条件的不确定参数是渐近稳定的.

References

1 Yang Dong-Mei, Zhang Qing-Ling, Yao Bo. *Singular Systems*. Beijing: Science Press, 2004
(杨冬梅, 张庆灵, 姚波. 广义系统. 北京: 科学出版社, 2004)

2 Zhang Qing-Ling, Yang Dong-Mei. *The Analysis and Synthesis of Singular Systems with Uncertainty*. Shenyang: Northeast University Press, 2003
(张庆灵, 杨冬梅. 不确定广义系统的分析与综合. 沈阳: 东北大学出版社, 2003)

3 Lewis F L, Mertzios B G, Marszalek W. Analysis of singular bilinear systems using Walsh functions. *IEE Proceedings-D: Control Theory and Applications*, 1991, **138**(2): 89−92

4 Zasadzinski M, Magarotto E, Darouach M. Unknown input reduced order observer for singular bilinear systems with bilinear measurements. In: Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, Australia: IEEE, 2000. 796−801

5 Zasadzinski M, Magarotto E, Rafaralahy H, Souley Ali H. Residual generator design for singular bilinear systems subjected to unmeasurable disturbances: an LMI approach. *Automatica*, 2003, **39**(4): 703−713

6 Lu G P, Daniel W C H. Continuous stabilization controllers for singular bilinear systems: the state feedback case. *Automatica*, 2006, **42**(2): 309−314

7 Hsiao C H, Wang W J. State analysis of time-varying singular bilinear systems via Haar wavelets. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2000, **52**(1): 11−20

8 Mohler R R, Ruberti A. *Theory and Application of Variable Structure Systems*. New York: Academic Press, 1972

9 Guan Z H, Yao J, Hill D J. Roubust H_∞ control of singular impulsive systems with uncertain perturbations. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Expressbriefs*, 2005, **52**(6): 293−298

10 Yao J, Guan Z H, Chen G R, Daniel W C H. Stability, robust stabilization and H_∞ control of singular-impulsive systems via switching control. *Systems and Control Letters*, 2006, **55**(11): 879−886

11 Zhang Qing-Ling, Zhang Li-Qian, Dai Guan-Zhong, Nie Yi-Yong. Analysis and synthesis of robust stability for linear timeinvariant descriptor systems. *Control Theory and Applications*, 1999, **16**(4): 525−528
(张庆灵, 张立茜, 戴冠中, 聂义勇. 广义线性系统的鲁棒稳定性分析与综合. 控制理论与应用, 1999, **16**(4): 525−528)

12 Xu S Y, Yang C W. An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems. *International Journal of Systems Science*, 2000, **31**(1): 55−61

13 Xu S Y, Yang C W. Robust stabilization for generalized state-space systems with uncertainty. *International Journal of Control*, 1999, **72**(18): 1659−1664

14 Dolezai V. Generalized solution of semistate equations and stability. *Circuits, Systems, and Signal Process*, 1986, **5**(4): 391−403

兰奇逊 平顶山工学院讲师. 2005 年获得河南师范大学计算数学专业学士学位, 2008 年获得广西大学运筹学与控制论专业硕士学位. 主要研究方向为广义系统、变结构控制以及可靠控制. 本文通信作者.
E-mail: qixun407@163.com
(**LAN Qi-Xun** Lecturer at Pingdingshan Institute of Technology. He received his bachelor degree in computing mathematics from Henan Normal University in 2005, and his master degree in operations research and cybernetics from Guangxi University in 2008, respectively. His research interests cover singular systems, variable structure control, and reliable control. Corresponding author of this paper.)

梁家荣 广西大学教授. 1998 年获得华南理工大学自动控制理论与应用专业博士学位. 主要研究方向为广义系统, 变结构控制, 人工智能.
E-mail: liangjr@gxu.edu.cn
(**LIANG Jia-Rong** Professor at Guangxi University. He received his Ph. D. degree in automatic control and applications from South China University of Technology. His research interest covers singular systems, variable structure control, and artificial intelligence.)

高许岗 南京理工大学电子工程与光电技术学院博士研究生. 2005 年获得河南师范大学计算数学专业学士学位, 主要研究方向为合成孔径雷达对抗. E-mail: gaoxug@126.com
(**GAO Xu-Gang** Ph. D. candidate at School of Electronic Engineering & Optoelectronic Technology, Nanjing University of Science and Technology. He received his bachelor′s degree in computing mathematics from Henan Normal University. His main research interest is countermeasure of SAR.)