基于模糊树模型的间接自适应模糊控制

丁海山 [1,2] 毛剑琴 [1] 林 岩 [3]

摘 要 提出了一种基于模糊树模型的间接自适应模糊控制器的设计方法. 采用模糊树辨识方法离线辨识系统中的未知非线性函数, 得到初始的控制器, 然后在线调节模糊树模型中的线性参数, 改善控制器的性能, 实现对有界参考信号的跟踪控制. 通过对倒立摆系统进行数值仿真, 验证了所提方法的有效性和优越性.

关键词 模糊树模型, T-S 模糊模型, 自适应控制, 间接自适应模糊控制
中图分类号 TP13

Indirect Adaptive Fuzzy Control Based on Fuzzy Tree Model

DING Hai-Shan[1,2] MAO Jian-Qin[1] LIN Yan[3]

Abstract The design of an indirect adaptive fuzzy controller is proposed based on the fuzzy tree model. The fuzzy tree identification method is used to off-line identify the unknown nonlinear parts of nonlinear systems. Then the linear parameters of the fuzzy tree model are on-line tuned to improve the performance of the controller and to trace the bounded reference trajectory. The numerical simulation of controlling an inverted pendulum verifies the efficiency and advantage of the proposed method.

Key words Fuzzy tree model, T-S fuzzy model, adaptive control, indirect adaptive fuzzy control

近年来, 自适应控制等先进控制理论取得了长足发展. 然而, 在越来越高的性能要求下, 在过程与环境高度不确定性的情况下, 对于越来越复杂的系统, 将自适应控制用于实际控制时还存在一些问题, 如自适应控制器结构过于复杂, 模型参考自适应控制系统对确定性干扰不能确保零稳态误差等[1].

为了充分发挥自适应控制技术的优越性能, 提高控制的鲁棒性以及对控制参数的自适应和学习能力, 更有效地实现对存在多种不确定性和难以确切描述的非线性复杂过程的控制, 将自适应控制的设计思想与模糊控制相结合的自适应模糊控制, 成为新的研究热点. Wang 提出了一种间接自适应模糊控制器, 并基于李雅普诺夫稳定性理论设计了参数自适应律. 这种控制器允许被控对象含有未知参数, 并能保证闭环系统稳定[2]. 之后, 不少文献在此基础上, 针对不同的研究对象以及不同的控制要求, 提出各种不同的间接自适应模糊控制器. 如, 引入补偿项, 将稳定条件由逼近误差平方可积放宽到逼近误差趋于零[3]; 引入最优逼近误差的自适应补偿项来消除建模误差的影响, 取消了要求逼近误差平方可积或逼近误差的上确界已知的条件[4]. 文献 [5] 提出了基于参考误差调节的间接自适应模糊控制, 不但能保证闭环系统稳定, 而且可使跟踪误差收敛于原点或原点的一个小邻域内. 文献 [6] 引入滑模控制算法, 提出了一种新的自适应模糊控制. 最近文献 [7] 利用 Popove 超稳定理论, 提出一种新的间接自适应模糊控制器设计方法. 此外, 间接自适应模糊控制算法也被推广到多输入多输出系统[8−9]. 自适应模糊控制的研究虽然得到了巨大的发展, 但是研究多侧重于闭环系统的稳定性分析, 对于控制器中的模糊系统尚无较好的构造方法, 模糊规则数目随系统变量的个数呈指数增长.

本文基于模糊树模型, 提出了一种间接的模糊自适应控制器的设计方法. 采用模糊树辨识方法离线辨识系统中的未知非线性函数, 得到初始的控制器, 然后在线调节模糊树模型中的线性参数, 改善控制器的性能, 实现对有界参考输入信号的跟踪控制. 下文安排如下: 第 1 节给出所研究的跟踪控制问题的数学描述; 第 2 节简单介绍模糊树模型, 并给出相应的建模步骤; 第 3 节将模糊树模型与传统的反馈线性化相结合, 提出间接的自适应模糊控制器设计方法, 并给出控制器的性能分析; 第 4 节对倒摆系统用所提的方法设计自适应模糊控制器, 通过数值仿真与已有的方法进行比较; 最后对本文进行小结.

收稿日期 2007-07-10 收修改稿日期 2008-3-24
Received July 10, 2007; in revised form March 24, 2008
国家自然科学基金 (60534020), 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2002CB312205) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60534020), National Basic Research Program of China (973 Program) (2002CB312205)
1. 北京航空航天大学第七研究室 北京 100083 2. 中国空空导弹研究院 洛阳 471009 3. 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院 北京 100083
1. The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083 2. China Airborne Missile Academy, Luoyang 471009 3. School of Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00676

1　问题描述

考虑具有如下标准形的单输入单输出的仿射非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = x_3\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_n = f(x_1,\cdots,x_n) + g(x_1,\cdots,x_n)u\end{cases} \tag{1}$$

其中, $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g(\boldsymbol{x})$ 是未知的连续函数, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态, $u \in \mathbf{R}^1$ 为系统的输入, $y \in \mathbf{R}^1$ 为系统的输出. 这里假设在可控区域 U_c 内, 有 $g(\boldsymbol{x}) > 0$, 并且在可控区域内, 状态都是可测的.

对于式 (1) 描述的系统, 希望得到一个状态反馈控制律 $u(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ 和参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的自适应调整律, 使得系统的输出 $y(t)$ 可以跟踪一致有界的参考信号 $y_r(t)$, 而且满足:

1) 闭环系统的内部状态一致有界, 即存在 $T \geq 0$, 当 $t \geq T$ 时, 有 $\|\boldsymbol{x}(t)\|_2 \leq M_{\boldsymbol{x}} < +\infty$;

2) 跟踪误差 $e(t) = y_r(t) - y(t)$ 尽可能小.

这里参考输出 $y_r(t)$ 一致有界是指: 若定义 $\boldsymbol{y}_r = [y_r, \dot{y}_r, \cdots, y_r^{(n-1)}]^{\mathrm{T}}$, 有 $\|\boldsymbol{y}_r\|_2 \leq M_{\boldsymbol{y}}$.

大部分文献所设计的间接自适应模糊都是用 Mamdani 型模糊系统逼近未知函数, 然后再根据经典非线性控制理论中的反馈线性化的思想设计控制律. 文献 [10−11] 提出用 T-S 模糊系统逼近未知函数, 然后进行控制. 所设计的控制器能够确保闭环系统渐近稳定都是基于模糊系统能够充分逼近未知函数. 虽然已经证明了各类模糊系统是通用逼近子, 但是当逼近精度趋于零时, 所需的模糊规则数目将趋于无穷[12−13]. 已有的文献对于模糊系统的构造都是采用网格划分输入空间, 对于高维情况, 会产生 "规则爆炸" 问题, 实际应用时较为困难. 为此, 本文将建立未知非线性函数的模糊树模型, 并在此基础上设计间接自适应模糊控制器, 可以在保证跟踪精度的前提下有效地减少控制器中模糊规则的数目.

2　模糊树模型

毛剑琴等提出基于树结构的 T-S 模糊模型辨识方法, 简称模糊树辨识方法, 所建的模型称为模糊树模型[14−15]. 模糊树辨识方法通过自适应划分输入空间来获得模糊规则, 即在线性逼近误差和输出数据密度大的地方子空间划分精细, 而在线性逼近误差和输出数据密度小的地方子空间划分粗糙. 输入空间的划分情况可以与一棵二叉树 T 来对应. 每个叶节点对应的子空间上, 用 n 维超平面 $y_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_t^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}$ 逼近非线性函数, 其中 $\hat{\boldsymbol{x}} = [1, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n+1}$. 如果逼近误差满足要求, 则停止对该子空间的划分. 对子空间划分的判别函数取为超平面 $g_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_t^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}} - \theta_t = 0$, 其中 θ_t 为该子空间上输出数据的重心. 模糊树辨识方法根据 $g_t(\boldsymbol{x}) \leq 0$ 和 $g_t(\boldsymbol{x}) \geq 0$, 可以将该子空间划分为两个更精细的子空间, 并在 $g_t(\boldsymbol{x}) \approx 0$ 的区域定义模糊带, 最终完成对输入空间的模糊划分. 按照这种方式, 判别函数将自动向输出数据密度大的地方移动, 划分出大小不同、形状不规则的模糊子空间.

模糊空间划分完毕, 即可得到如下一组规则:

R^l: 如果 $\boldsymbol{x}$ 是 N_{t_l}, 那么

$$y_{t_l} = \boldsymbol{c}_{t_l}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

$t_l \in \tilde{\mathrm{T}}$ 为叶节点集合, 其中, $\boldsymbol{c}_{t_l} = [c_0^{t_l}, c_1^{t_l}, \cdots, c_n^{t_l}]^{\mathrm{T}}$ 为线性参数, N_{t_l} 是模糊子空间 χ_{t_l} 上定义的模糊集合, 对应的隶属度函数记为 $N_{t_l}(\boldsymbol{x})$. 若将 N_{t_l} 的归一化隶属度函数记为 $\mu_{t_l}(\boldsymbol{x})$, 即 $\mu_{t_l}(\boldsymbol{x}) = \frac{N_{t_l}(\boldsymbol{x})}{\sum_{t_l\in\tilde{\mathrm{T}}} N_{t_l}(\boldsymbol{x})}$, 则得到模糊树模型的输出表达式

$$\hat{y}(\boldsymbol{x}) = \sum_{t_l\in\tilde{\mathrm{T}}} \mu_{t_l}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}_{t_l}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{3}$$

二叉树每个节点上的隶属度函数按如下方式定义:

1) 对于根节点,

$$N_{r(\mathrm{T})}(\boldsymbol{x}) \equiv 1 \tag{4}$$

2) 对于非根节点 t,

$$N_t(\boldsymbol{x}) = N_{p(t)}(\boldsymbol{x})\hat{N}_t(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

其中, $p(t)$ 表示节点 t 的父节点,

$$\hat{N}_t(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\alpha_t(\boldsymbol{c}_{p(t)}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}} - \theta_{p(t)})}}$$

表示节点 t 上的辅助隶属度函数,

$$\theta_{p(t)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M} N_{p(t)}(\boldsymbol{x}^i)\boldsymbol{c}_{p(t)}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}^i}{\sum\limits_{i=1}^{M} N_{p(t)}(\boldsymbol{x}^i)}$$

表示父节点上的数据重心, $|\alpha_t|$ 表示模糊带的宽度, 在计算时, 事先确定一个正数 α, 对于左节点, $\alpha_t = -\alpha$, 对于右节点, $\alpha_t = \alpha$. $\boldsymbol{x}^i$ 为输入数据样本, $i = 1, 2, \cdots, M$.

假设共有 L 个叶节点, 即有 $\tilde{\mathrm{T}} = \{t_1, t_2, \cdots, t_L\}$. 记 $\boldsymbol{c}_{\tilde{\mathrm{T}}} = [\boldsymbol{c}_{t_1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}_{t_2}^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{c}_{t_L}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 模糊规则 (2) 中的线性参数 $\boldsymbol{c}_{\tilde{\mathrm{T}}}$ 使用递推最小二乘法求解:

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}_{\tilde{\mathrm{T}}}^{i+1} = \boldsymbol{c}_{\tilde{\mathrm{T}}}^{i} + S_{i+1}\tilde{\boldsymbol{X}}^{i+1}(y^{i+1} - (\tilde{\boldsymbol{X}}^{i+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_{\tilde{\mathrm{T}}}^{i}) \\ S_{i+1} = S^{i} - \dfrac{S_i\tilde{\boldsymbol{X}}^{i+1}(\tilde{\boldsymbol{X}}^{i+1})^{\mathrm{T}}S_i}{1 + (\tilde{\boldsymbol{X}}^{i+1})^{\mathrm{T}}S_i\tilde{\boldsymbol{X}}^{i+1}} \end{cases} \tag{6}$$

$i = 0, 1, \cdots, M-1$, 其中, $\boldsymbol{c}_{\tilde{\mathrm{T}}}^{0} = 0$, $S_0 = \lambda I$, λ 为一个足够大的正数, I 是单位矩阵,

$$\tilde{\boldsymbol{X}}^{i} = \left[\frac{N_{t_1}(\boldsymbol{x}^i)}{\sum\limits_{t_l\in\tilde{\mathrm{T}}} N_{t_l}(\boldsymbol{x}^i)}(\hat{\boldsymbol{x}}^i)^{\mathrm{T}}, \cdots, \frac{N_{t_L}(\boldsymbol{x}^i)}{\sum\limits_{t_l\in\tilde{\mathrm{T}}} N_{t_l}(\boldsymbol{x}^i)}(\hat{\boldsymbol{x}}^i)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

下面给出模糊树模型的建模步骤.

模糊树辨识算法:

1) 给定输入输出数据样本 $(\boldsymbol{x}^i, y^i)$, $i = 1, 2, \cdots, M$, $\boldsymbol{x}^i \in \mathbf{R}^n$, $y^i \in \mathbf{R}$, 期望误差 $ERMSE$ 和最大叶节点数 L.

2) 确定模糊带的宽度 $\alpha > 0$. 初始化根节点, 令 $N_1(\boldsymbol{x}) \equiv 1$, 树的深度 $d = 0$. 根据式 (6) 求解根节点上的线性参数 $\boldsymbol{c}_1$.

3) 依次处理当前深度 d 上的每一个节点: 划分该节点, 根据式 (4) 和 (5), 计算划分后新产生的左右子节点上的隶属度函数, 根据式 (6) 计算划分后所有叶节点上的线性参数. 根据式 (3) 计算所有输入样本对应的划分后的模型输出 $\hat{y}^i$, $i = 1, 2, \cdots, M$. 根据下式计算均方根误差

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{M}(\hat{y}^i - y^i)^2}{M}} \tag{7}$$

如果划分后模型输出的均方根误差小于划分前模型输出的均方根误差, 那么保存此次划分; 否则此次划分无效, 处理当前层的下一个节点.

4) 当前层处理完毕后, 如果模型输出的均方根误差小于期望误差或者叶节点数超过了 L, 则算法结束; 否则, 令 $d = d + 1$, 返回到第 3) 步, 继续算法.

模糊树辨识方法建模精度高, 计算量小, 对输入维数不敏感, 适合处理高维问题, 是一种高效的 T-S 模糊模型建模方法. 模糊树模型作为一种特殊的 T-S 模糊模型, 能够任意逼近定义在闭集上的任意连续函数[15−16].

3 自适应模糊控制器综合

本文用模糊树辨识方法构造模糊系统, 去逼近未知函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g(\boldsymbol{x})$, 再结合反馈线性化方法, 采用文献 [2] 中的自适应律及间接模糊自适应控制器设计思想, 设计自适应模糊控制器.

假设有 L 个叶节点, 模糊树模型的输入输出表达式可以重新整理成

$$\hat{y}(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{L}\mu_{t_l}(\boldsymbol{x})\sum_{i=0}^{n}c_i^{t_l}x_i = \sum_{l=1}^{L}\sum_{i=0}^{n}\hat{\mu}_{li}(\boldsymbol{x})c_i^{t_l} = \sum_{k=1}^{(n+1)L}\theta_k\xi_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

其中, $x_0 = 1$, $\theta_k = c_i^{t_l}$, $\xi_k(\boldsymbol{x}) = \hat{\mu}_{li}(\boldsymbol{x})$, $\hat{\mu}_{li}(\boldsymbol{x}) = \mu_{t_l}(\boldsymbol{x})x_i$. 下标 k, l, i 满足 $k = n(l-1) + l + i$; $i = 0, 1, 2, \cdots, n$; $l = 1, 2, \cdots, L$.

由式 (8), T-S 模糊系统也可以写成关于后件参数的线性形式, 类似于 Mamdani 型模糊系统的基函数表达式形式. 因此, 原则上, 文献 [2] 中的方法可以平行地移植到这里. 另外, 还需要知道未知函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g(\boldsymbol{x})$ 的一些先验信息: 即已知函数 $f_{\max}(\boldsymbol{x})$, $g_{\max}(\boldsymbol{x})$ 和 $g_{\min}(\boldsymbol{x})$, 对 $\boldsymbol{x} \in U_c$, 满足 $|f(\boldsymbol{x})| \le f_{\max}(\boldsymbol{x}) < +\infty$, $0 < g_{\min}(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x}) \le g_{\max}(\boldsymbol{x}) < +\infty$.

现在给出所设计的自适应模糊控制器. 通过样本数据集合, 建立形如式 (8) 描述的模糊树模型 $\hat{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})$, $\hat{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})$ 分别逼近 $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$.

令控制量 $u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = u_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) + u_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$, 其中取基本控制量

$$u_c(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\hat{g}(\boldsymbol{x})}\left[-\hat{f}(\boldsymbol{x}) + y_r^{(n)} + \boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}\right] \tag{9}$$

代入式 (1), 经整理可得

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \Lambda_c\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}_c[(\hat{f}(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})) + (\hat{g}(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}))u_c - g(\boldsymbol{x})u_s] \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e(t) \\ \dot{e}(t) \\ \vdots \\ e^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$ 使得 Λ_c 的特征值位于左半平面.

定义 $V_{\boldsymbol{e}} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{e}$, 其中, 正定矩阵 P 是李雅普诺夫方程 $\Lambda_c^{\mathrm{T}}P + P\Lambda_c = -Q$ 的解. 将监督控制取为

$$u_s(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) = I^*\mathrm{sgn}(\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c)\frac{1}{\hat{g}(\boldsymbol{x})}\left[|\hat{f}(\boldsymbol{x})| + f_{\max}(\boldsymbol{x}) + |\hat{g}(\boldsymbol{x})u_c| + |g_{\max}(\boldsymbol{x})u_c|\right] \tag{11}$$

其中, $I^*=\begin{cases}0, & V_{\boldsymbol{e}}\le\bar{V}\\ 1, & V_{\boldsymbol{e}}>\bar{V}\end{cases}$, $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 是符号函数, 当变量是负数时, 函数值取 -1, 否则函数值为 1, 参数 $\bar{V}$ 实际上限制了系统内部状态的界, 可根据系统设计要求确定.

参数的自适应调整律取为[2]

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_f=\begin{cases}-\gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}), & \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2<M_f\ \text{或}\\ & \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2=M_f,\\ & \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})\ge 0\\ P(-\gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})), & \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2=M_f,\\ & \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})<0\end{cases}\tag{12}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_g=\begin{cases}-\gamma_2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c, & \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2<M_g\ \text{或}\\ & \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2=M_g,\\ & \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c\ge 0\\ P(-\gamma_2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c), & \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2=M_g,\\ & \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c<0\end{cases}\tag{13}$$

其中, 学习率 $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$, M_f 和 M_g 分别是参数寻优空间的界, 通常设其为足够大,

$$P(-\gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}))=-\gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})+\gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\frac{\boldsymbol{\theta}_f\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_f\|_2^2}$$

$$P(-\gamma_2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c)=-\gamma_2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c+\gamma_2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\frac{\boldsymbol{\theta}_g\boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_g\|_2^2}u_c$$

控制器设计的具体步骤如下:

1) 根据设计要求, 确定 $\boldsymbol{k}$, 使得多项式 $h(s)=s^n+k_1s^{n-1}+\cdots+k_n$ 的根全部位于左半开平面上; 选取正定矩阵 Q, 通过求解李雅普诺夫方程 $\Lambda_c^{\mathrm{T}}P+P\Lambda_c=-Q$ 得到正定矩阵 P; 根据约束条件确定出 $\bar{V}$;

2) 获取一定数量的样本数据, 使用模糊树辨识算法离线建立 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g(\boldsymbol{x})$ 的模糊树模型, 构造初始的控制器, 如式 (9) 和 (11);

3) 确定参数的寻优空间和学习因子. 可以根据具体情况, 令 $M_f\ge\|\boldsymbol{\theta}_f(0)\|_2$, $M_g\ge\|\boldsymbol{\theta}_g(0)\|_2$. 根据式 (12) 和 (13) 进行在线调参.

定理 1. 采用控制量 (9) 和 (11) 和自适应调整律 (12) 和 (13), 总体控制方案有如下性能:

1) 对 $\forall t\ge 0$, $\|\boldsymbol{\theta}_f(t)\|_2\le M_f$, $\|\boldsymbol{\theta}_g(t)\|_2\le M_g$;

2) 存在 $T\ge 0$, 当 $t\ge T$ 时, 有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|_2\le M_y+\sqrt{\frac{2\bar{V}}{\lambda_{\min}}}$$

其中 $\lambda_{\min}=\min\lambda(P)$;

3) 对 $\forall t\ge 0$, 存在常数 a, b 和函数 $\omega(t)$, 有 $\int_0^t\|\boldsymbol{e}(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau\le a+b\int_0^t|\omega(\tau)|^2\mathrm{d}\tau$;

4) 若 $\hat{g}(\boldsymbol{x})\ge\varepsilon>0$, 且 $\omega(t)$ 平方可积, 则 $\lim_{t\to+\infty}|e(t)|=0$.

证明. 见附录. □

注 1. 根据定理 1, 要使得跟踪误差为零, 要求在可控域内, 满足 $\hat{g}(\boldsymbol{x})\ge\varepsilon>0$. 由于模糊树模型对非线性函数有很强的逼近能力, 因而附加这一条件是合理的, 进而式 (9) 和 (11) 是有意义的.

4　仿真算例

本节考虑倒摆系统的跟踪控制问题. 倒摆系统的动力学方程为

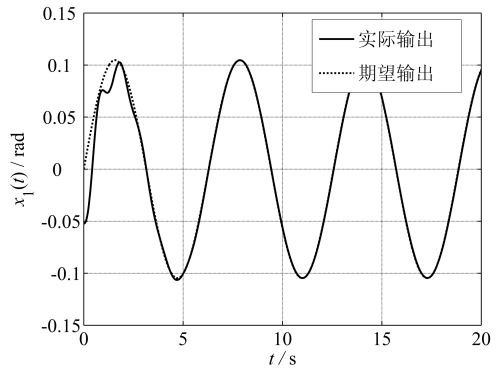
$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=\dfrac{g\sin(x_1)-\dfrac{mlx_2^2\cos(x_1)\sin(x_1)}{m_c+m}}{l(\dfrac{4}{3}-\dfrac{m\cos^2(x_1)}{m_c+m})}+\\ \qquad\dfrac{\dfrac{\cos(x_1)}{m_c+m}}{l(\dfrac{4}{3}-\dfrac{m\cos^2(x_1)}{m_c+m})}u\end{cases}$$

其中, 状态 x_1 表示摆与垂直线的偏角, x_2 表示摆的角速度, $g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$ 是重力加速度. 文献 [2] 使用基于 Mamdani 型模糊系统的间接自适应模糊控制方法对该倒摆系统进行了跟踪正弦信号 $y_r(t)=\pi/30\sin(t)$ 仿真, 取小车质量 $m_c=1\,\mathrm{kg}$, 摆的质量 $m=0.1\,\mathrm{kg}$, $l=0.5\,\mathrm{m}$, $f_{\max}(x_1,x_2)=15.78+0.0366x_2^2$, $g_{\max}(x_1,x_2)=1.46$, $g_{\min}(x_1,x_2)=1.12$. 为了便于比较, 这里也取同样的设置. 即, 仿真时, 令 $Q=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$, $k_1=2$, $k_2=1$, $\bar{V}=0.267$.

用模糊树辨识算法分别离线得到具有 10 条模糊规则的模糊树模型 $\hat{f}(x_1,x_2)$ 和 $\hat{g}(x_1,x_2)$. 在线调参时, 取学习率 $\gamma_1=50$, $\gamma_2=1$, 参数寻优空间的界取为 $M_f=\|\boldsymbol{\theta}_f(0)\|=23.2727$, $M_g=\|\boldsymbol{\theta}_g(0)\|=19.1443$. 图 1 给出了初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=[-\pi/60,0]^{\mathrm{T}}$ 时的仿真结果. 初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=[\pi/60,0]^{\mathrm{T}}$ 时的仿真结果由图 2 给出.

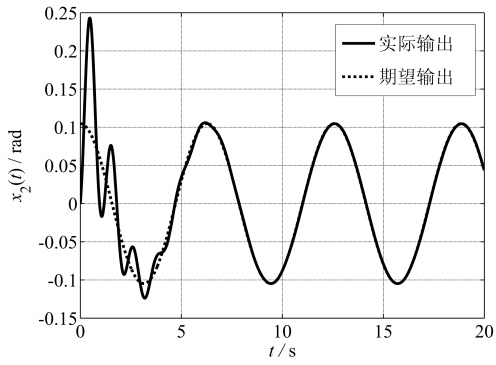
文献 [2] 中, 采用网格划分输入空间, 分别构造了具有 25 条模糊规则的 Mamdani 型模糊模型去逼近未知函数, 在相同的初始参数设置下, 跟踪的仿真结果由图 3 和图 4 给出.

不同初始条件下, 仿真结果的跟踪精度见表 1, 表中给出的是仿真最后 10 s 的均方根误差. 根据表 1, 本文提出的基于模糊树模型的间接自适应控制器,



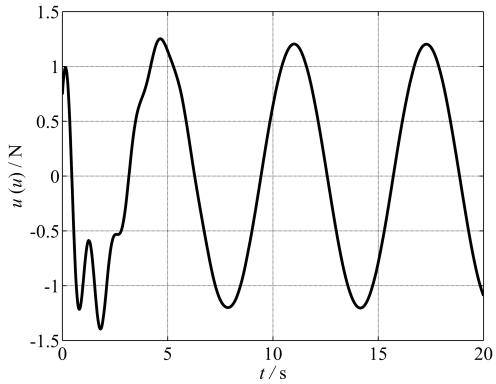
(a) 状态 $x_1(t)$ 的响应

(a) Response of the state $x_1(t)$



(b) 状态 $x_2(t)$ 的响应

(b) Response of the state $x_2(t)$

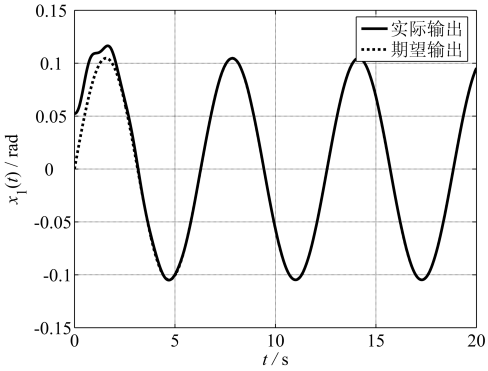


(c) 控制量 $u(t)$

(c) The control $u(t)$

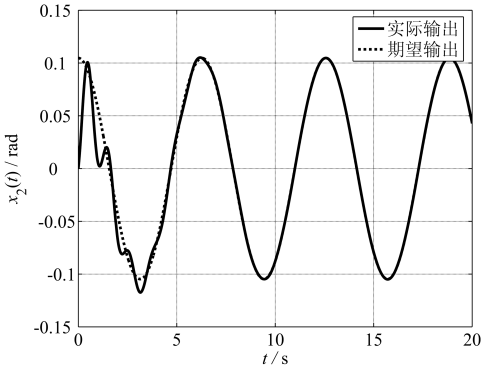
图 1 初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = [-\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$ 时的仿真结果

Fig. 1 Simulation results when $\boldsymbol{x}(0) = [-\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$



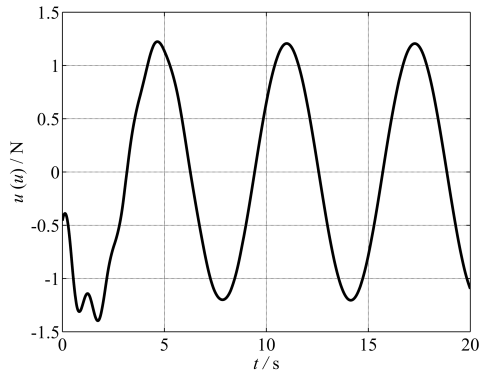
(a) 状态 $x_1(t)$ 的响应

(a) Response of the state $x_1(t)$



(b) 状态 $x_2(t)$ 的响应

(b) Response of the state $x_2(t)$



(c) 控制量 $u(t)$

(c) The control $u(t)$

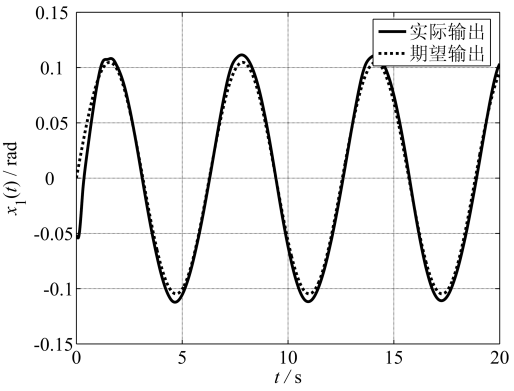
图 2 初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = [\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$ 时的仿真结果

Fig. 2 Simulation results when $\boldsymbol{x}(0) = [\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$

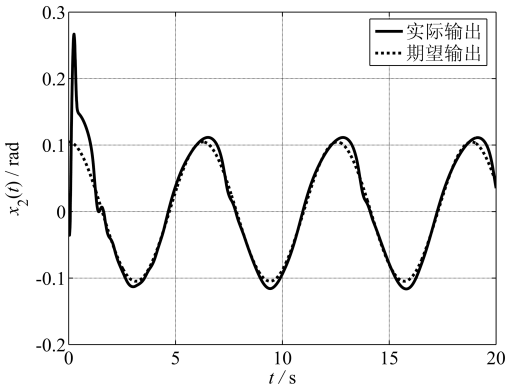
表 1 跟踪精度比较

Table 1 Comparison of tracing precisions

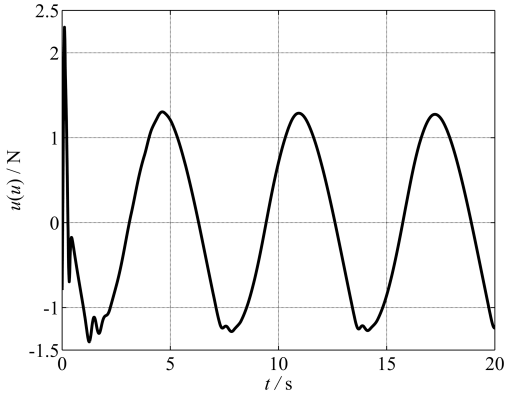
	$\boldsymbol{x}(0) = [-\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$ 跟踪 $x_1(t)$ 的均方根误差	$\boldsymbol{x}(0) = [-\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$ 跟踪 $x_2(t)$ 的均方根误差	$\boldsymbol{x}(0) = [\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$ 跟踪 $x_1(t)$ 的均方根误差	$\boldsymbol{x}(0) = [\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$ 跟踪 $x_2(t)$ 的均方根误差
10 条规则的模糊树模型逼近未知函数	7.81×10^{-4}	8.01×10^{-4}	1.03×10^{-4}	1.77×10^{-4}
25 条规则的 Mamdani 模型逼近未知函数	5.50×10^{-3}	8.03×10^{-3}	6.30×10^{-3}	1.11×10^{-2}



(a) 状态 $x_1(t)$ 的响应
(a) Response of the state $x_1(t)$

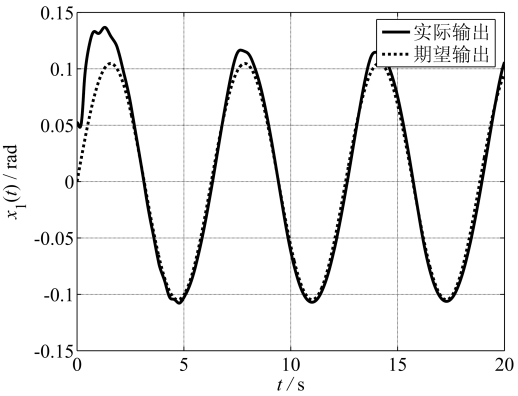


(b) 状态 $x_2(t)$ 的响应
(b) Response of the state $x_2(t)$

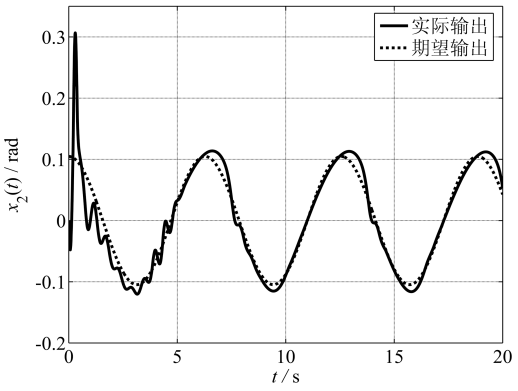


(c) 控制量 $u(t)$
(c) The control $u(t)$

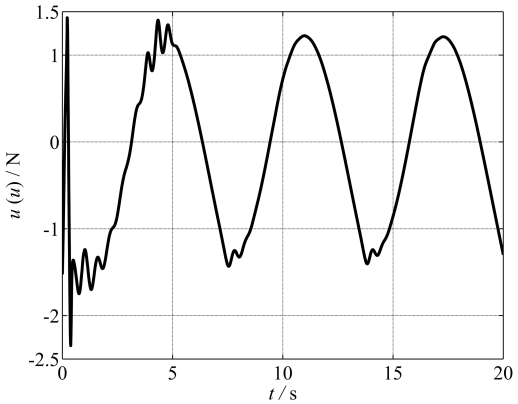
图 3　初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = [-\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$ 时的仿真结果
Fig. 3　Simulation results when $\boldsymbol{x}(0) = [-\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$



(a) 状态 $x_1(t)$ 的响应
(a) Response of the state $x_1(t)$



(b) 状态 $x_2(t)$ 的响应
(b) Response of the state $x_2(t)$



(c) 控制量 $u(t)$
(c) The control $u(t)$

图 4　初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = [\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$ 时的仿真结果
Fig. 4　Simulation results when $\boldsymbol{x}(0) = [\pi/60, 0]^{\mathrm{T}}$

所用的模糊树模型较文献 [2] 中的模糊模型少用了超过一半的模糊规则, 跟踪精度却提高了一个量级.

5　结论

本文基于模糊树模型, 结合经典非线性控制中的反馈线性化和李雅普诺夫稳定性理论, 针对具有标准形的单输入单输出高阶非线性系统, 给出了一种间接的稳定模糊自适应控制器的设计方法. 主要思想是: 离线建立模糊树模型, 逼近系统中的未知非线性函数, 得到初始的控制器, 然后在线调节模糊树

模型中的线性参数, 改善控制器的性能, 最终实现对参考信号的跟踪控制. 通过对控制器性能的分析, 得到了类似于文献 [2] 中的结果. 由于模糊树模型是一种高效的 T-S 模糊模型辨识方法, 可以有效减少模型中模糊规则的数目, 因此, 与文献 [2] 中采用网格法划分输入空间建立 Mamdani 型模糊模型构造自适应模糊控制器的方法相比, 可以用较少的模糊规则达到更好的控制效果, 在一定程度上可以缓解困扰模糊控制应用的 "规则爆炸" 的问题.

附录

定理1的证明. 这里借鉴了文献 [2] 中的方法.

1) 记 $V_f = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_f$, 有 $\|\boldsymbol{\theta}_f(0)\|_2 \le M_f$.

对 $\forall t > 0$, 根据所设计的自适应调整律, 当 $\|\boldsymbol{\theta}_f(t)\|_2 = M_f$ 时, 若 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}) \ge 0$, 则 $\dot{V}_f = \boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}}_f = -\gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}) \le 0$; 若 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}) < 0$, 则 $\dot{V}_f = \boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}P(-\gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})) = 0$. 即总有 $\dot{V}_f \le 0$. 故 $\forall t \ge 0$, 有 $\|\boldsymbol{\theta}_f(t)\|_2 \le M_f$.

记 $V_g = 1/2\boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_g$, 同理可证 $\forall t \ge 0$, 有 $\|\boldsymbol{\theta}_g(t)\|_2 \le M_g$.

2) $V_{\boldsymbol{e}}$ 沿方程 (10) 的解对时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_{\boldsymbol{e}} = &-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c[(\hat{f}(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})) + \\ &(\hat{g}(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}))u_c - g(\boldsymbol{x})u_s] \le \\ &-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{e} + |\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c|\big[|\hat{f}(\boldsymbol{x})| + |f(\boldsymbol{x})| + \\ &|\hat{g}(\boldsymbol{x})u_c| + |g(\boldsymbol{x})u_c|\big] - \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c g(\boldsymbol{x})u_s\end{aligned}$$

对 $\forall t \ge 0$, 当 $V_{\boldsymbol{e}} > \bar{V}$ 时,

$$\begin{aligned}\dot{V}_{\boldsymbol{e}} \le &-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{e} + |\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c|\big[|f(\boldsymbol{x})| - |f_{\max}(\boldsymbol{x})| + \\ &(|g(\boldsymbol{x})| - |g_{\max}(\boldsymbol{x})|)|u_c|\big] \le 0\end{aligned}$$

所以, 存在时刻 $T \ge 0$, 对 $t \ge T$, 有 $V_{\boldsymbol{e}} \le \bar{V} < +\infty$. 又, $V_{\boldsymbol{e}} = 1/2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{e} \ge 1/2\lambda_{\min}\|\boldsymbol{e}\|_2^2$, 所以 $t \ge T$ 时, $1/2\lambda_{\min}\|\boldsymbol{e}\|_2^2 \le \bar{V}$, 即 $\|\boldsymbol{e}\|_2 \le \sqrt{2\bar{V}/\lambda_{\min}}$. 而 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_r - \boldsymbol{e}$, 所以 $\|\boldsymbol{x}\|_2 \le \|\boldsymbol{y}_r\|_2 + \|\boldsymbol{e}\|_2 \le M_y + \sqrt{2\bar{V}/\lambda_{\min}}$.

3) 记参数寻优空间 $\Omega_f = \{\boldsymbol{\theta}_f \,|\, \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 \le M_f\}$, $\Omega_g = \{\boldsymbol{\theta}_g \,|\, \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2 \le M_g\}$. 最优参数 $\boldsymbol{\theta}_f^* = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}_f \in \Omega_f} \sup|\hat{f}(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})|$, $\boldsymbol{\theta}_g^* = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}_g \in \Omega_g} \sup|\hat{g}(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})|$. 最优逼近模糊树模型为 $\hat{f}^*(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\theta}_f^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})$, $\hat{g}^*(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\theta}_g^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})$.

因为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}} = &\Lambda_c\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}_c[(\hat{f}(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})) + \\ &(\hat{g}(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}))u_c - g(\boldsymbol{x})u_s] = \\ &\Lambda_c\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}_c\left[\boldsymbol{\varphi}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varphi}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c\right] - \\ &\boldsymbol{b}_c g(\boldsymbol{x})u_s + \boldsymbol{b}_c\omega(t)\end{aligned}$$

其中, $\omega(t) = \hat{f}^*(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) + (\hat{g}^*(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}))u_c$, $\boldsymbol{\varphi}_f = \boldsymbol{\theta}_f - \boldsymbol{\theta}_f^*$, $\boldsymbol{\varphi}_g = \boldsymbol{\theta}_g - \boldsymbol{\theta}_g^*$.

记 $V = 1/2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{e} + 1/(2\gamma_1)\boldsymbol{\varphi}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_f + 1/(2\gamma_2)\boldsymbol{\varphi}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_g$, 其对时间的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{e} + \frac{1}{\gamma_1}\boldsymbol{\varphi}_f^{\mathrm{T}}[\dot{\boldsymbol{\theta}}_f + \gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})] + \\ &\frac{1}{\gamma_2}\boldsymbol{\varphi}_g^{\mathrm{T}}[\dot{\boldsymbol{\theta}}_g + \gamma_2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c] - \\ &g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c u_s + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\omega(t)\end{aligned}$$

将自适应调整律重新写为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_f = -\gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}) + I_1^*\gamma_1\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\frac{\boldsymbol{\theta}_f\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_f\|_2^2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_g = -\gamma_2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c + I_2^*\gamma_2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\frac{\boldsymbol{\theta}_g\boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_g\|_2^2}u_c$$

其中,

$$I_1^* = \begin{cases}0, & \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 < M_f \quad \text{或} \\ & \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 = M_f, \quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}) \ge 0 \\ 1, & \|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 = M_f, \quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}) < 0\end{cases}$$

$$I_2^* = \begin{cases}0, & \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2 < M_g \quad \text{或} \\ & \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2 = M_g, \quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c \ge 0 \\ 1, & \|\boldsymbol{\theta}_g\|_2 = M_g, \quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})u_c < 0\end{cases}$$

代入上式得, $\dot{V} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{e} + I_1^*\boldsymbol{\varphi}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\frac{\boldsymbol{\theta}_f\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_f\|_2^2} + I_2^*\boldsymbol{\varphi}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\frac{\boldsymbol{\theta}_g\boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_g\|_2^2}u_c - g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c u_s + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\omega(t)$.

当 $I_1^* = 1$ 时, 有 $\|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 = M_f$ 且 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x}) < 0$. 另一方面, $\boldsymbol{\varphi}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_f = (\boldsymbol{\theta}_f - \boldsymbol{\theta}_f^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_f = \frac{1}{2}[\|\boldsymbol{\theta}_f\|_2^2 + \|\boldsymbol{\theta}_f - \boldsymbol{\theta}_f^*\|_2^2 - \|\boldsymbol{\theta}_f^*\|_2^2] \ge 0$, 所以, $\boldsymbol{\varphi}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\frac{\boldsymbol{\theta}_f\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_f\|_2^2} = \boldsymbol{\varphi}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_f\frac{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\boldsymbol{\theta}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_f(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_f\|_2^2} \le 0$.

同理可得, $I_2^* = 1$ 时, $\boldsymbol{\varphi}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\frac{\boldsymbol{\theta}_g\boldsymbol{\theta}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_g(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\theta}_g\|_2^2}u_c \le 0$.

又由 u_s 的定义可得 $g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c u_s$, 所以, $\dot{V} \le -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}_c\omega \le -\frac{\lambda_{\min}(Q)-1}{2}\|\boldsymbol{e}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|P\boldsymbol{b}_c\|_2^2|\omega|^2$.

可以选择 Q, 使得 $\lambda_{\min}(Q) > 1$. 两边从 0 到 t 积分, 有 $\int_0^t\|\boldsymbol{e}(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau \le a + b\int_0^t|\omega(\tau)|^2\mathrm{d}\tau$, 其中, $a = \frac{2}{\lambda_{\min}(Q)-1}(|V(0)| + \sup_{t>0}|V(t)|)$, $b = \frac{1}{\lambda_{\min}(Q)-1}$.

4) 若 ω 平方可积, 即 $\int_0^{+\infty}|\omega(\tau)|^2\mathrm{d}\tau < +\infty$, 则由 3) 得, $\boldsymbol{e}$ 也是平方可积的. 进而 $e(t)$ 平方可积而且 $e(t) \in L_\infty(0, +\infty)$.

由条件 $\hat{g}(\boldsymbol{x}) \ge \varepsilon > 0$, 所以 $|u_c| \le 1/\varepsilon\big[|\hat{f}(\boldsymbol{x})| + |y_r^{(n)}| + \|\boldsymbol{k}\|_2 + \|\boldsymbol{e}\|_2\big]$. 又 $|\hat{f}(\boldsymbol{x})| = |\sum_{t_l\in\tilde{\mathrm{T}}}\mu_{t_l}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}_{t_l}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}| \le \sum_{t_l\in\tilde{\mathrm{T}}}|\boldsymbol{c}_{t_l}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}| \le \sum_{t_l\in\tilde{\mathrm{T}}}\|\boldsymbol{c}_{t_l}\|_2\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_2$.

由 2), 当 $t \ge T$ 时, $\|\boldsymbol{x}(t)\|_2 \le M_y + \sqrt{\frac{2\bar{V}}{\lambda_{\min}}}$, 所以 $\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_2 < +\infty$. 再由 1), $\|\boldsymbol{\theta}_f\|_2 \le M_f$, 所以 $\hat{f}(\boldsymbol{x})$ 是有界的, 进而 u_c 是有界的, u_s 有界.

由 $\dot{\boldsymbol{e}} = \Lambda_c\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}_c[(\hat{f}(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})) + (\hat{g}(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}))u_c] - \boldsymbol{b}_c g(\boldsymbol{x})u_s + \boldsymbol{b}_c\omega$ 得 $\dot{\boldsymbol{e}}$ 有界. 所以 $\dot{\boldsymbol{e}} \in L_\infty(0, +\infty)$, 进而 $\dot{e}(t) \in L_\infty(0, +\infty)$. 由 Barbalat 定理, 有 $\lim_{t\to+\infty}|e(t)| = 0$. □

References

1 Datta A, Ioannou P A. Performance analysis and improvement in model reference adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(12): 2370−2387

2 Wang L X. Stable adaptive fuzzy controllers with application to inverted pendulum tracking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 1996, **26**(5): 677−691

3 Zhang Nai-Yao, Jin Hui. Study and modification on stable adaptive fuzzy control. *Acta Automatica Sinica*, 1997, **23**(2): 160−166

(张乃尧, 金晖. 对稳定的模糊自适应控制方案的研究与改进. 自动化学报, 1997, **23**(2): 160−166)

4 Zhang Tian-Ping. Design and analysis of indirect adaptive fuzzy controller. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(6): 977−983
(张天平. 间接自适应模糊控制器的设计与分析. 自动化学报, 2002, **28**(6): 977−983)

5 Shi Wu-Xi, Huo Wei. Indirect adaptive fuzzy control based on reference error adjustment. *Control and Decision*, 2000, **15**(3): 282−285
(师五喜, 霍伟. 基于参考误差调节的间接自适应模糊控制. 控制与决策, 2000, **15**(3): 282−285)

6 Tong S C, Li Q G, Chai R Y. Fuzzy adaptive control for a class of nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, **101**(1): 31−39

7 Wang Jian, Song Shen-Min, Zhang Fu-En, Ji Jun-Hong. An indirect adaptive fuzzy controller based on hyperstability theory. *Journal of Harbin Engineering University*, 2006, **27**(2): 238−242, 247
(王舰, 宋申民, 张福恩, 纪军红. 基于超稳定理论的间接自适应模糊控制器. 哈尔滨工程大学学报, 2006, **27**(2): 238−242, 247)

8 Tong S C, Li H X. Fuzzy adaptive sliding-mode control for MIMO nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003, **11**(3): 354−360

9 Wu Yu-Xiang, Wang Hao, Mao Zong-Yuan, Tam P K S. Fuzzy indirect adaptive controller for manipulator trajectory tracking applications. *Control Theory and Applications*, 2004, **21**(5): 748−756, 764
(吴玉香, 王灏, 毛宗源, Tam P K S. 机器人轨迹跟踪的间接自适应模糊控制. 控制理论与应用, 2004, **21**(5): 748−756, 764)

10 Golea N, Golea A, Benmahammed K. Stable indirect fuzzy adaptive control. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, **137**(3): 353−366

11 Li Li, Li Yong-Ming. The design and stability analysis of an adaptive system based on linear T-S fuzzy system. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(6): 815−820
(李莉, 李永明. 基于线性 T-S 模糊系统的自适应系统的设计和稳定性分析. 自动化学报, 2003, **29**(6): 815−820)

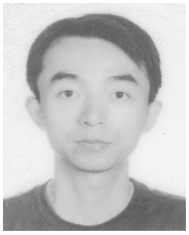
12 Ying H. Sufficient conditions on general fuzzy systems as function approximators. *Automatica*, 1994, **30**(3): 521−525

13 Zeng K, Zhang N Y, Xu W L. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, **8**(6): 773−780

14 Zhang Jian-Gang, Mao Jian-Qin, Xia Tian, Wei Ke-Hui. Fuzzy-tree model and its applications to complex system modeling. *Acta Automatica Sinica*, 2000, **26**(3): 378−381
(张建刚, 毛剑琴, 夏天, 魏可惠. 模糊树模型及其在复杂系统辨识中的应用. 自动化学报, 2000, **26**(3): 378−381)

15 Mao J Q, Zhang J G, Yue Y F, Ding H S. Adaptive-tree-structured-based fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, **13**(1): 1−12

16 Mao Jian-Qin, Yue Yu-Fang, Zhang Jian-Gang, Dai Ji-Yang, Li You-Ping. Fuzzy-tree method for complex system fuzzy modeling. *Control Theory and Applications*, 2002, **19**(2): 153−156
(毛剑琴, 岳玉芳, 张建刚, 代冀阳, 李幼平. 复杂系统模糊建模的模糊树方法. 控制理论与应用, 2002, **19**(2): 153−156)



丁海山 中国空空导弹研究院工程师. 2007 年获得北京航空航天大学博士学位. 主要研究方向为红外制导技术. 本文通信作者.
E-mail: chinodhs@ss.buaa.edu.cn
(**DING Hai-Shan** Engineer in China Airborne Missile Academy. He received his Ph. D. degree from Beijing University of Aeronautics and Astronautics in 2007. His main research interest is infrared guidance technology. Corresponding author of this paper.)

毛剑琴 北京航空航天大学理学院教授. 主要研究方向为鲁棒和最优控制及应用、模糊建模和控制及应用、智能结构动力学与控制.
E-mail: jqmao@buaa.edu.cn
(**MAO Jian-Qin** Professor at School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics. Her research interest covers robust and optimal control with applications, fuzzy modeling and control with applications, and smart structure dynamics and control.)

林 岩 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院教授. 主要研究方向为鲁棒控制、自适应控制理论及应用.
E-mail: linyanee2@yahoo.com.cn
(**LIN Yan** Professor at School of Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics. His research interest covers robust control, adaptive control theory and applications.)