

# 基于固定时间模型参考方法的倾转旋翼无人机姿态控制

朱纪洪<sup>1,2</sup> 张骁骏<sup>3</sup> 杨贇杰<sup>1,2</sup> 袁夏明<sup>1,2</sup>

**摘要** 倾转旋翼无人机动力学特性复杂, 过渡过程中的变速变构型特性导致系统具有较大的模型不确定性, 且容易受到阵风扰动等影响, 对姿态控制律设计提出很高要求. 针对该问题, 本文建立一种扰动观测器结合终端滑模补偿器的模型参考姿态控制方法. 基于齐次系统理论设计固定时间收敛扰动观测器, 实现对倾转旋翼无人机未建模动态和外部扰动的准确估计; 基于一种新型非线性饱和函数设计固定时间收敛终端滑模控制器, 结合低通滤波实现对指令的快速高品质跟踪; 为进一步解决控制奇异性问题, 提出在纵轴附近邻域对控制器的改进策略. 仿真结果表明, 所提方法在应对倾转旋翼无人机模型不确定性和外部扰动方面具有较强的鲁棒性, 相比基于有限时间稳定性理论的模型参考姿态控制方法, 固定时间收敛控制提供了更高的控制精度和更平滑的输出.

**关键词** 倾转旋翼无人机, 姿态控制, 固定时间收敛, 模型参考控制, 滑模控制

**引用格式** 朱纪洪, 张骁骏, 杨贇杰, 袁夏明. 基于固定时间模型参考方法的倾转旋翼无人机姿态控制. 自动化学报, 2025, 51(5): 972-984

**DOI** 10.16383/j.aas.c240621

**CSTR** 32138.14.j.aas.c240621

## Attitude Control of Tilt-rotor Unmanned Aerial Vehicle Based on Fixed-time Model Reference Method

ZHU Ji-Hong<sup>1,2</sup> ZHANG Xiao-Jun<sup>3</sup> YANG Yun-Jie<sup>1,2</sup> YUAN Xia-Ming<sup>1,2</sup>

**Abstract** Tilt-rotor unmanned aerial vehicles (UAVs) exhibit complex dynamic characteristics during the transition process. Their variable speed and variable configuration features result in significant model uncertainties. Meanwhile, they are easily affected by disturbances such as gusts of wind, which imposes high demands on the design of attitude control laws. To address this issue, this paper proposes a model reference attitude control method that combines a disturbance observer with a terminal sliding mode compensator. A fixed-time convergent disturbance observer is designed to accurately estimate the unmodeled dynamics and external disturbances of the tilt-rotor UAV based on homogeneous system theory. A fixed-time convergent terminal sliding mode controller is designed by using a novel nonlinear saturation function, achieving fast and high-quality tracking of the reference signal with low-pass filtering. To further address the control singularity issue, an improvement strategy is proposed for the controller in the vicinity of the longitudinal axis. Simulation results show that the proposed method exhibits strong robustness against model uncertainties and external disturbances for tilt-rotor UAVs. Compared to the model reference attitude control method based on finite-time stability theory, the fixed-time convergence control provides higher control accuracy and smoother output.

**Key words** Tilt-rotor unmanned aerial vehicle, attitude control, fixed-time convergent, model reference control, sliding mode control

**Citation** Zhu Ji-Hong, Zhang Xiao-Jun, Yang Yun-Jie, Yuan Xia-Ming. Attitude control of tilt-rotor unmanned aerial vehicle based on fixed-time model reference method. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(5): 972-984

收稿日期 2024-09-09 录用日期 2025-01-17

Manuscript received September 9, 2024; accepted January 17, 2025

国家自然科学基金 (62203259, 62073185), 中航工业成都飞机设计研究所预研项目, 航空科学基金 (20240058058001) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62203259, 62073185), Pre-research Project of AVIC Chengdu Aircraft Design and Research Institute, Aeronautical Science Foundation of China (20240058058001)

本文责任编辑 陈谋

Recommended by Associate Editor CHEN Mou

1. 清华大学精密仪器系 北京 100084 2. 时空信息精密感知技术国家重点实验室 北京 100084 3. 中航工业成都飞机设计研究所 成都 610091

1. Department of Precision Instrument, Tsinghua University,

常规构型的无人机 (Unmanned aerial vehicle, UAV) 可分为固定翼和旋翼两种类型. 固定翼无人机主要依靠机翼产生升力, 具有飞行速度快、效率高、航程长等优点. 然而, 其需要机场跑道或辅助设备起降且无法悬停, 限制了应用范围. 旋翼无人机通过旋翼产生的拉力直接抵抗重力, 具备优异的低速性能, 能够实现垂直起降和低速飞行, 但其

Beijing 100084 2. State Key Laboratory of Precision Space-time Information Sensing Technology, Beijing 100084 3. AVIC Chengdu Aircraft Design and Research Institute, Chengdu 610091

前飞速度慢、效率低、航程短。由此可见, 固定翼和旋翼无人机各有优缺点。因此, 结合两者优势的新构型垂直起降固定翼无人机成为航空领域的研究热点, 其中一种重要构型是倾转旋翼无人机<sup>[1-2]</sup>。

倾转旋翼无人机通过倾转旋翼/短舱合体来改变螺旋桨拉力方向, 实现垂直起降与高速平飞模式的转换。图 1 展示倾转旋翼无人机的全包线飞行过程, 其典型飞行模式包括: 1) 垂直起飞模式: 在该模式下旋翼/短舱处于  $90^\circ$  竖直状态, 螺旋桨拉力垂直于地面向上以平衡重力; 2) 悬停转巡航模式 (“垂转平”模式): 无人机达到一定飞行高度之后, 旋翼/短舱逐渐由垂直状态向水平状态倾转, 无人机逐渐加速至超过最小平飞速度; 3) 巡航飞行模式: 即普通固定翼飞机飞行模式, 无人机可以达到较高的飞行速度和飞行效率; 4) 巡航转悬停模式 (“平转垂”模式): 在此阶段无人机减速, 旋翼/短舱逐渐由水平状态向垂直状态倾转以平衡重力, 最终达到悬停状态; 5) 垂直降落模式: 无人机在悬停状态调整姿态和位置, 在预定地面降落。可以看出, 在连接垂直起降与巡航飞行的“垂转平”及“平转垂”模式, 倾转旋翼无人机的短舱角和飞行速度都会经历大范围的变化, 在此过程中, 自由来流和螺旋桨滑流的耦合使得其动力学特性具有很强的非线性和未知不确定性, 尤其是气动特性的急剧改变、外界阵风的随机干扰等方面<sup>[3-5]</sup>。同时, 推进系统带宽呈现出大范围时变特性, 不同阶段执行器对控制指令的响应快慢差异很大, 给姿态控制律设计带来挑战。

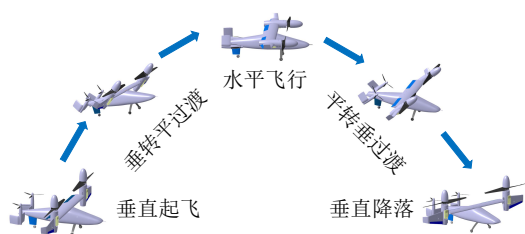


图 1 倾转旋翼无人机全包线典型飞行状态

Fig. 1 Typical flight modes of tilt-rotor unmanned aerial vehicles throughout the entire flight envelope

目前, 多种不同的线性控制律<sup>[6-9]</sup>和非线性控制律<sup>[10-13]</sup>设计方法在倾转旋翼无人机中得到了广泛的理论和应用研究。其中, 模型参考控制是一种通过反馈被控对象与参考模型的输出或者状态误差, 使被控对象的输出跟随参考模型的控制方法<sup>[14-16]</sup>, Anderson 等<sup>[17]</sup>针对倾转旋翼无人机存在未知载荷和惯量不确定问题建立基于障碍李雅普诺夫函数的鲁棒模型参考自适应律, Liu 等<sup>[18]</sup>针对倾转四旋翼飞机设计一种基于预测器的模型参考自适应横滚和偏

航控制器, 用于补偿系统的不确定性和参数变化。然而, 经典的稳定性理论难以确定系统收敛到平衡点的时间, 故而学者们在此基础上发展了有限时间稳定性理论<sup>[19-21]</sup>。其给出与初始状态有关的系统收敛时间上界, 主要有李雅普诺夫理论<sup>[22]</sup>和齐次系统理论<sup>[23]</sup>两个发展方向。固定时间稳定性理论是有限时间稳定性理论的进一步发展, 其收敛时间上界为固定值, 与初始状态无关<sup>[24-25]</sup>。有限/固定时间稳定性理论可以应用于控制器和观测器设计, 由于快速性和鲁棒性, 其在飞行控制<sup>[26-27]</sup>、网络控制<sup>[28]</sup>、制导律设计<sup>[29]</sup>和多智能体控制<sup>[30]</sup>等方面得到广泛应用。

相比于垂直起降和巡航飞行模式, 倾转旋翼无人机在“垂转平”和“平转垂”过渡过程中动力学特性变化快、模型不确定性强。基于固定时间稳定性理论设计观测器可保证在固定的时间上界内得到对扰动的准确估计, 可应用于对强侧风等强时效性扰动的补偿, 提高闭环系统的鲁棒性。本文基于固定时间稳定性理论, 将固定时间滑模控制器和观测器配合使用, 通过状态观测器实现闭环反馈, 通过扰动观测器实现不确定性补偿, 减小切换项增益和滑模控制器的抖振, 同时具有快速收敛特性, 提高倾转旋翼无人机过渡过程阶段飞行控制系统的鲁棒性。

本文内容安排如下: 第 1 节给出倾转旋翼无人机姿态控制问题描述; 第 2 节对有限/固定时间稳定性理论的预备知识作简要介绍; 第 3 节介绍倾转旋翼无人机过渡过程阶段模型参考姿态控制架构; 第 4 节开展固定时间收敛扰动观测器设计, 证明观测器误差可在固定时间上界内收敛到零; 第 5 节开展固定时间收敛终端滑模控制器设计, 证明广义误差系统可在固定时间上界内收敛到原点; 第 6 节开展倾转旋翼无人机过渡过程姿态控制律仿真, 比较有限时间和固定时间收敛模型参考姿态控制方法; 最后, 第 7 节对本文进行总结与展望。

## 1 问题描述

图 2 展示了本文所研究的倾转旋翼无人机, 其具有螺旋桨和气动舵面两套执行机构, 机翼分为外段翼和内段翼两大部分, 外段翼与短舱固连, 可在竖直和水平位置之间实现  $90^\circ$  的倾转, 而内段翼则与机身固连且不可倾转<sup>[31]</sup>。在悬停模态, 倾转旋翼无人机的俯仰通道由尾桨拉力控制, 拉力增大产生低头力矩, 反之产生抬头力矩; 滚转通道由左右主桨拉力差控制; 偏航通道由副翼控制。在巡航模态, 倾转旋翼无人机的俯仰通道由升降舵控制; 滚转通道由副翼控制; 偏航通道则由主桨拉力差控制。

倾转旋翼无人机绕质心转动的动力学方程为

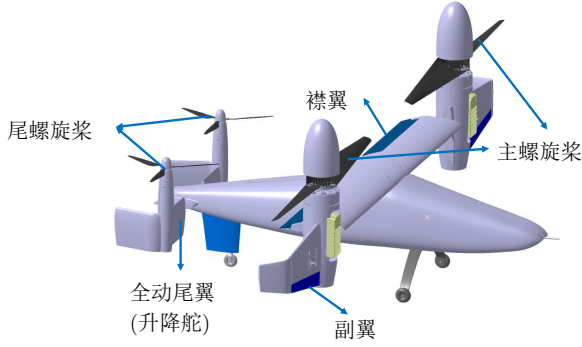


图 2 倾转旋翼无人机布局

Fig. 2 Tilt-rotor unmanned aerial vehicle configuration

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x I_{xx} + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy}) - (\dot{\omega}_z + \omega_z \omega_y) I_{xz} = M_x^b \\ \dot{\omega}_y I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx}) + (\omega_x^2 - \omega_z^2) I_{xz} = M_y^b \\ \dot{\omega}_z I_{zz} + \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx}) + (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) I_{xz} = M_z^b \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  为机体三轴角速度;  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  为机体三轴转动惯量;  $I_{xz}$  为机体  $x$  轴和  $z$  轴惯性积;  $M_x^b, M_y^b, M_z^b$  分别为飞机三轴合力矩, 对于本文所研究的倾转旋翼无人机, 合力矩主要由螺旋桨、机身、机翼、尾翼等部分产生. 改写式 (1), 可得到俯仰通道角速度环控制模型为

$$\dot{\omega}_y = C_y + \frac{M_y^b}{I_{yy}} \quad (2)$$

滚转和偏航通道角速度环控制模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_z \end{bmatrix} + \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} I_{zz} & I_{xz} \\ I_{xz} & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^b \\ M_z^b \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} C_x = \frac{(I_{yy} - I_{zz}) I_{zz} - I_{xz}^2}{\Gamma} \omega_y \omega_z + \frac{(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) I_{xz}}{\Gamma} \omega_x \omega_y \\ C_y = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \omega_x \omega_z - \frac{I_{xz}}{I_{yy}} (\omega_x^2 - \omega_z^2) \\ C_z = \frac{(I_{yy} - I_{zz}) I_{zz} - I_{xz}^2}{\Gamma} \omega_y \omega_z + \frac{(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) I_{xz}}{\Gamma} \omega_x \omega_y \\ \Gamma = I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2 \end{cases} \quad (4)$$

考虑式 (2) 和式 (3) 中存在的确定性干扰, 其可统一描述为

$$\dot{\omega}^b = f_{\omega}(\omega^b) + B_I M^b + f_d \quad (5)$$

其中,  $f_{\omega}(\omega^b) = [C_x, C_y, C_z]^T$ ,  $\omega^b = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  为机体角速度,  $M^b = [M_x^b, M_y^b, M_z^b]^T$ ,  $f_d$  代表无人机因外部扰动带来的角加速度不确定量, 转动惯量相关的控制增益矩阵

$$B_I = \begin{bmatrix} \frac{I_{zz}}{\Gamma} & 0 & \frac{I_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ \frac{I_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{I_{xx}}{\Gamma} \end{bmatrix}$$

记欧拉角为  $\Theta = [\phi, \theta, \psi]^T$ , 则倾转旋翼无人机机体角速度  $\omega^b$  到欧拉角速度  $\Omega$  转换关系为

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = R_{\omega} \omega^b \quad (6)$$

其中,  $R_{\omega}$  为机体角速度到欧拉角速度的变换矩阵. 由机体角速度控制模型式 (5) 可得, 以  $\Theta$  为被控变量, 倾转旋翼无人机姿态环控制模型可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = \Omega = R_{\omega} \omega^b \\ \dot{\Omega} = R_{\omega} f_{\omega}(\omega^b) + R_{\omega} B_I M^b + D \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $D = R_{\omega} f_d + \dot{R}_{\omega} \omega^b + \Delta f_{\omega}(\omega^b)$  为综合等价干扰, 包含了模型不确定性  $\dot{R}_{\omega} \omega^b + \Delta f_{\omega}(\omega^b)$  和外部扰动  $R_{\omega} f_d$ .

为方便控制器建立, 设虚拟输入为  $u = R_{\omega} B_I M^b$ , 将式 (7) 中的姿态模型按滚转、俯仰、偏航各通道独立表示, 可得如下二阶非线性系统形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x, \omega^b) + u + d(x, t) \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $x_1$  为角度,  $x_2$  为角速度,  $f(x, \omega^b)$  为已知模型  $R_{\omega} f_{\omega}(\omega^b)$  的分量,  $d(x, t)$  为各通道所受扰动力矩带来的角加速度变化. 设  $r$  为指令信号, 则本文所研究的控制问题可以描述为: 在存在综合等价干扰  $d(x, t)$  的情况下, 设计虚拟输入  $u$  保证倾转旋翼无人机姿态角  $x_1$  对输入指令  $r$  的跟踪.

## 2 预备知识

本节对有限时间稳定和固定时间稳定的相关知识作简要介绍, 为后文控制器建立做好准备.

### 2.1 有限时间稳定性理论

有限时间稳定强调系统在一个预定的有限时间内迅速并且稳定地收敛到平衡状态, 而不像渐近稳定性那样依赖于无限时间. 其判定方法主要有两种,

分别为李雅普诺夫方法和齐次系统方法, 下面给出主要定义及引理, 详细推导过程可参见具体文献.

**定义 1** (有限时间稳定<sup>[22]</sup>). 若原点是系统的渐近稳定平衡点且存在原点的开邻域  $D^n$  和正定函数  $T(\mathbf{x}_0) : D^n \rightarrow [0, \infty)$  使得对于所有  $\mathbf{x}_0 \in D^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T(\mathbf{x}_0)} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \forall t > T(\mathbf{x}_0) \end{cases} \quad (9)$$

则原点是有限时间稳定的. 当  $D^n = \mathbf{R}^n$  时, 原点是全局有限时间稳定的.

**引理 1** (有限时间李雅普诺夫方法判定准则<sup>[22]</sup>). 若存在连续正定李雅普诺夫函数  $V(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  满足

$$\begin{cases} \dot{V}(\mathbf{x}) + p(V(\mathbf{x}))^\alpha \leq 0 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad (10)$$

其中, 参数  $p > 0, 0 < \alpha < 1$ . 则系统是全局有限时间稳定的, 且收敛时间为  $T(\mathbf{x}_0) \leq \frac{1}{p(1-\alpha)} (V(\mathbf{x}_0))^{1-\alpha}$ .

**定义 2** (齐次系统<sup>[23]</sup>). 对于向量  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , 权重向量  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}_+^n$  的齐次扩张映射为  $\Delta_\eta^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = [\eta^{r_1}x_1, \dots, \eta^{r_n}x_n]^T$ , 其中  $\eta > 0$ . 对于方程  $f(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , 当且仅当其满足

$$f(\Delta_\eta^{\mathbf{r}}(\mathbf{x})) = \eta^k f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (11)$$

时称其关于权重  $\mathbf{r}$  具有齐次度  $k$ . 对于向量域  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 当且仅当其满足每个元  $f_i(\mathbf{x})$  关于权重  $\mathbf{r}$  具有齐次度  $k + r_i$ , 即  $f_i(\Delta_\eta^{\mathbf{r}}(\mathbf{x})) = \eta^{k+r_i} f_i(\mathbf{x})$  时, 称其关于权重  $\mathbf{r}$  具有齐次度  $k$ .

**引理 2** (有限时间齐次系统方法判定准则<sup>[23]</sup>). 若系统方程  $f(\mathbf{x})$  关于权重  $\mathbf{r}$  具有齐次度  $k$ , 则当且仅当原点是  $f(\mathbf{x})$  的渐近收敛平衡点且  $k < 0$  时, 系统在原点是有限时间稳定的. 此时一定存在常数  $c > 0$  和具有齐次度  $\sigma$  的连续正定函数  $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$  使得

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -c(V(\mathbf{x}))^{\frac{\sigma+k}{\sigma}} \quad (12)$$

**引理 3** (不等式关系<sup>[24]</sup>). 若连续实函数  $V_1(\mathbf{x}), V_2(\mathbf{x})$  关于同一权重向量  $\mathbf{r}$  分别具有齐次度  $k_1 > 0$  和  $k_2 > 0$ , 且  $V_1(\mathbf{x})$  是正定的, 则对于所有  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  有

$$\begin{cases} V_2(\mathbf{x}) \geq \left( \min_{v: V_1(v)=1} V_2(v) \right) (V_1(\mathbf{x}))^{\frac{k_2}{k_1}} \\ V_2(\mathbf{x}) \leq \left( \max_{v: V_1(v)=1} V_2(v) \right) (V_1(\mathbf{x}))^{\frac{k_2}{k_1}} \end{cases} \quad (13)$$

## 2.2 固定时间稳定性理论

有限时间稳定的收敛时间依赖于系统的初始状态, 即系统可能需要不同的时间来从不同的初始条

件收敛到平衡点. 固定时间稳定性理论是对有限时间稳定性理论的进一步推广, 其要求系统的收敛时间是恒定的, 与初始状态无关. 因此, 固定时间稳定性提供了一种更加精确和统一的控制保证. 本节也首先给出其定义, 然后介绍基于李雅普诺夫方法和齐次系统方法的判定准则.

**定义 3** (固定时间稳定<sup>[24]</sup>). 若原点是系统的全局有限时间稳定平衡点, 且存在一个与初始值无关的收敛时间上界, 即存在  $T_{\max} > 0$  使得  $T(\mathbf{x}_0) < T_{\max}, \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ , 则原点是固定时间稳定的.

**引理 4** (固定时间李雅普诺夫方法判定准则<sup>[24]</sup>). 若存在连续正定李雅普诺夫函数  $V(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  满足

$$\begin{cases} \dot{V}(\mathbf{x}) + p(V(\mathbf{x}))^\alpha + q(V(\mathbf{x}))^\beta \leq 0 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \end{cases} \quad (14)$$

其中, 参数  $p, q > 0; 0 < \alpha < 1; \beta > 1$ . 则系统是全局固定时间稳定的, 且收敛时间上界为

$$T(\mathbf{x}_0) < T_{\max} = \frac{1}{p(1-\alpha)} + \frac{1}{q(\beta-1)} \quad (15)$$

**定义 4** (0-极限齐次性<sup>[25]</sup>). 假设  $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^n$  为权重向量,  $k_0$  为齐次度,  $f_0(\mathbf{x})$  为连续非恒零辅助函数,  $C$  为凸集. 则当且仅当系统  $f(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  满足

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \max_{\mathbf{x} \in C} |\eta^{-k_0} f(\Delta_\eta^{\mathbf{r}_0}(\mathbf{x})) - f_0(\mathbf{x})| &= 0, \\ \forall C \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (16)$$

时称系统  $f(\mathbf{x})$  关于三元组  $(\mathbf{r}_0, k_0, f_0)$  具有 0-极限齐次性. 对于向量域  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 当且仅当其每个元  $f_i(\mathbf{x})$  关于辅助三元组  $(\mathbf{r}_0, k_0 + r_{0,i}, f_{0,i})$  具有 0-极限齐次性时, 称向量域  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  关于三元组  $(\mathbf{r}_0, k_0, \mathbf{f}_0)$  具有 0-极限齐次性.

**定义 5** ( $\infty$ -极限齐次性<sup>[25]</sup>). 假设  $\mathbf{r}_\infty \in \mathbf{R}^n$  为权重向量,  $k_\infty$  为齐次度,  $f_\infty(\mathbf{x})$  为连续非恒零辅助函数,  $C$  为凸集. 则当且仅当函数  $f(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  满足

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{x} \in C} |\eta^{-k_\infty} f(\Delta_\eta^{\mathbf{r}_\infty}(\mathbf{x})) - f_\infty(\mathbf{x})| &= 0, \\ \forall C \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (17)$$

时称函数  $f(\mathbf{x})$  关于三元组  $(\mathbf{r}_\infty, k_\infty, f_\infty)$  具有  $\infty$ -极限齐次性. 对于向量域  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 当且仅当其每个元  $f_i(\mathbf{x})$  关于辅助三元组  $(\mathbf{r}_\infty, k_\infty + r_{\infty,i}, f_{\infty,i})$  具有  $\infty$ -极限齐次性时, 称向量域  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  关于三元组  $(\mathbf{r}_\infty, k_\infty, \mathbf{f}_\infty)$  具有  $\infty$ -极限齐次性.

**定义 6** (双极限齐次性<sup>[25]</sup>). 若函数  $f(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  或向量域  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  关于三元组  $(\mathbf{r}_0, k_0, \mathbf{f}_0)$  具有 0-极限齐次性, 同时关于三元组  $(\mathbf{r}_\infty, k_\infty, \mathbf{f}_\infty)$  具有  $\infty$ -极限齐次性, 则称其具有双极限齐次性.

**引理 5** (固定时间齐次系统方法判定准则<sup>[25]</sup>).

若向量域  $f(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  关于三元组  $(r_0, k_0, f_0)$  和  $(r_\infty, k_\infty, f_\infty)$  具有双极限齐次性, 并且系统  $\dot{x} = f(x)$ ,  $\dot{x} = f_\infty(x)$  的原点均为全局渐近稳定平衡点, 则有:

1) 当  $k_\infty > 0 > k_0$  时, 向量域  $f(x)$  的原点是固定时间稳定的;

2) 若实数  $d_{V_0}$  和  $d_{V_\infty}$  满足

$$d_{V_0} > \max_{1 \leq i \leq n} r_{0,i}, d_{V_\infty} > \max_{1 \leq i \leq n} r_{\infty,i} \quad (18)$$

则存在连续正定函数  $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$  使得  $\frac{\partial V}{\partial x_i}$  对于三元组  $(r_0, d_{V_0} - r_{0,i}, \frac{\partial V_0}{\partial x_i})$  和  $(r_\infty, d_{V_\infty} - r_{\infty,i}, \frac{\partial V_\infty}{\partial x_i})$  具有双极限齐次性, 且函数  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$ ,  $\frac{\partial V_0(x)}{\partial x} f(x)$  和  $\frac{\partial V_\infty(x)}{\partial x} f(x)$  负定.

综上, 李雅普诺夫方法和齐次系统方法是有限/固定时间稳定理论的重要判定方式. 其中, 李雅普诺夫方法侧重于通过构造函数和其导数来分析稳定性, 关注系统的能量衰减, 其需要复杂的数学推导和合适的李雅普诺夫函数选取; 齐次系统方法侧重于通过对非线性系统进行齐次化处理来分析系统的收敛性, 其相对直接, 但需要对系统的非线性进行精确的处理和转化. 总的来说, 两种方法各有优缺点, 在后文观测器和控制器设计中, 将结合两种方法进行分析, 以获得更加准确的稳定性结论.

### 3 倾转旋翼无人机模型参考姿态控制架构

模型参考方法引入参考模型将对输入指令  $r$  跟踪问题转化为广义误差系统的镇定问题, 便于进行稳定性分析和闭环动态特性设计, 在飞行控制中应用广泛. 图 3 展示了本文研究的倾转旋翼无人机过渡过程阶段模型参考姿态控制架构. 本文在传统模

型参考控制结构的基础上, 在补偿控制器通道加入低通滤波器, 在总输入通道加入限幅, 采用有限/固定时间稳定性理论设计滑模补偿控制器和扰动观测器, 保证对扰动的抑制和指令的跟踪.

针对第 1 节所描述的姿态环控制问题, 引入二阶参考模型

$$\begin{cases} \dot{x}_{m1} = x_{m2} \\ \dot{x}_{m2} = f_m(x_m) + u_m \end{cases} \quad (19)$$

为方便分析设计, 本文采用线性定常系统, 即  $f_m(x_m) = [-a_{m1}, -a_{m2}]x_m$ . 其中  $u_m$  为参考模型输入, 则控制目标转化为使系统状态  $x$  跟踪参考模型状态  $x_m$ , 从而实现输入指令  $r$  的期望跟踪. 二阶线性系统能够提供过渡时间、超调量、稳定裕度等直观的设计指标, 便于优化系统性能, 已经在飞行控制中得到广泛应用<sup>[32-34]</sup>.

设计虚拟输入  $u$  为

$$u = \text{sat}(k_g r + C(u_c)) = k_g r + \text{sat}_n(C(u_c)) \quad (20)$$

其中,  $\text{sat}(u)$  为限幅函数, 限幅值为无人机虚拟输入的饱和边界  $u_{\max}$ , 可以根据操纵导数和舵面限幅进行解算;  $k_g = a_{m1}$  为参考模型直流增益的逆;  $C(u_c)$  为对  $u_c$  的低通滤波. 假设参考输入不会达到饱和边界, 引入函数  $\text{sat}_n(u)$  表示施加在补偿信号上的等效限幅函数,  $u_c$  为滑模补偿控制器输出. 设计参考模型输入  $u_m$  为

$$u_m = k_g r + \text{sat}_n(C(u_c)) - u_c \quad (21)$$

当补偿控制量高频成分少且没有达到饱和边界时, 可以得到  $u_m \approx k_g r$ .

将输入量 (20) 和 (21) 分别代入被控对象 (8) 和参考模型 (19) 中, 得到闭环广义误差系统  $\dot{\tilde{x}} = \mathbf{x} -$

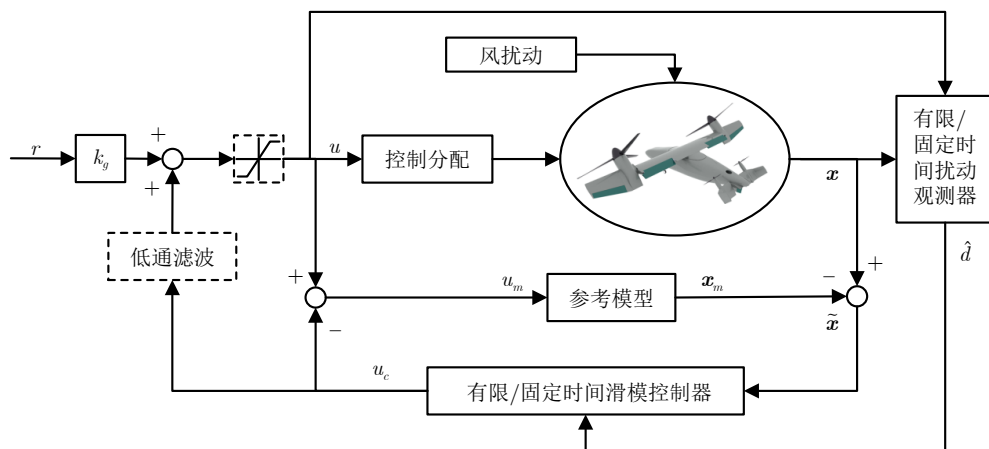


图 3 模型参考姿态控制器架构

Fig. 3 Model reference attitude controller architecture

$\mathbf{x}_m$  可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}^b) - f_m(\mathbf{x}_m) + d(\mathbf{x}, t) + u_c \end{cases} \quad (22)$$

对于闭环广义误差系统而言, 补偿控制量不受限幅和滤波的影响, 不会影响广义误差系统的收敛性. 同时通过限幅函数  $\text{sat}(u)$  和低通滤波器  $C(u)$ , 将超过  $u_{\max}$ 、高频的补偿信号输入到参考模型中, 避免输入长时间饱和及高频补偿信号对系统稳定性的影响. 广义误差系统收敛到原点, 则被控对象实现了对参考模型状态的跟踪. 为提高广义误差系统收敛的快速性, 采用有限/固定时间滑模方法设计补偿控制量  $u_c$ , 使得广义误差系统在给定时间上界内收敛到原点, 保证跟踪效果. 为了避免滑模控制切换项导致的补偿控制量高频抖振, 引入扰动观测器对等价干扰进行估计, 降低滑模切换项增益, 减小抖振效应.

## 4 扰动观测器设计

### 4.1 有限时间收敛扰动观测器

参考任意阶鲁棒微分器<sup>[35]</sup>, 有限时间扰动观测器可表示为

$$\begin{cases} e_{o1} = z_1 - x_2 \\ \dot{z}_1 = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}^b) + u + z_2 - k_1 e_{o1}^{[\alpha_1]} \\ \dot{z}_2 = -k_2 e_{o1}^{[\alpha_2]} \end{cases} \quad (23)$$

其中,  $e^{[q]} = |e|^q \text{sign}(e)$ ,  $\alpha_2 = 2\alpha_1 - 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha \in (1 - \epsilon, 1)$ ,  $\epsilon > 0$  为趋近于 0 的小量,  $k_1, k_2$  为观测器增益, 观测器增益矩阵

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

为霍尔维兹矩阵,  $\mathbf{z}(t) = [z_1, z_2]^T$  为  $[x_2(t), d(\mathbf{x}, t)]^T$  的估计值. 观测器误差  $\mathbf{e}_o = [e_{o1}, e_{o2}]^T$  的动态可以表示为

$$\begin{cases} \dot{e}_{o1} = e_{o2} - k_1 e_{o1}^{[\alpha_1]} \\ \dot{e}_{o2} = -k_2 e_{o1}^{[\alpha_2]} \end{cases} \quad (25)$$

选取权重向量  $\mathbf{r}_o = [1, \alpha]^T$ , 则

$$\begin{bmatrix} \eta^\alpha e_{o2} - k_1 (\eta e_{o1})^{[\alpha_1]} \\ -k_2 (\eta e_{o1})^{[\alpha_2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^{(\alpha-1)+1} (e_{o2} - k_1 e_{o1}^{[\alpha_1]}) \\ \eta^{(\alpha-1)+\alpha} (-k_2 e_{o1}^{[\alpha_2]}) \end{bmatrix} \quad (26)$$

则观测器误差系统关于权重  $\mathbf{r}_o$  具有齐次度  $\alpha - 1$ .

**定理 1.** 系统 (25) 在原点是有限时间稳定的, 即观测器误差在有限时间上界内收敛到零.

**证明.** 对于线性系统  $\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_k \mathbf{e}(t)$ , 选取矩阵  $\mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k$  满足李雅普诺夫方程  $\mathbf{P}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k = -\mathbf{Q}_k$ , 则函数  $V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P}_k \mathbf{e}$  是该线性系统的李雅普诺夫方程, 其导数满足

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k) \mathbf{e} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q}_k \mathbf{e} < 0 \quad (27)$$

由  $V(\mathbf{e}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}_k) \|\mathbf{e}\|^2$  和  $\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_k) \|\mathbf{e}\|^2$  可得

$$\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_k)}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_k)} V(\mathbf{e}) = -c_k V(\mathbf{e}) \quad (28)$$

其中,  $\lambda_{\max}(\cdot)$  和  $\lambda_{\min}(\cdot)$  分别表示矩阵最大特征值和最小特征值. 定义辅助向量  $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{e}_o) = [e_{o1}, e_{o2}^{1/\alpha}]^T \in \mathbf{R}^2$  和标量函数  $V_k(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{e}_o) \mathbf{P}_k \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{e}_o)$ . 当  $\epsilon$  足够小时, 由标量函数对  $\alpha$  的连续性可得式 (27) 和式 (28) 对  $V_k(\boldsymbol{\zeta})$  依然成立<sup>[35]</sup>, 则  $V_k(\boldsymbol{\zeta})$  为系统 (25) 的李雅普诺夫函数, 且该系统是渐近稳定的. 由引理 2 可得系统 (25) 的原点是有限时间稳定的, 即观测器误差在有限时间上界内收敛到零. 辅助变量  $\boldsymbol{\zeta}$  的导数可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \begin{bmatrix} e_{o2} - k_1 e_{o1}^{[\alpha_1]} \\ -\frac{k_2}{\alpha} e_{o2}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e_{o1}^{[\alpha_2]} \end{bmatrix} \quad (29)$$

则对于权重  $\mathbf{r}_o$ , 可以得到  $\boldsymbol{\zeta}$  和  $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$  的齐次扩张映射为  $\Delta_{\eta}^{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{e}_o)) = \eta \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{e}_o)$  和  $\Delta_{\eta}^{\mathbf{r}}(\dot{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{e}_o)) = \eta^\alpha \dot{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{e}_o)$ . 从而可得

$$\begin{cases} V_k(\Delta_{\eta}^{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{e}_o))) = \eta^2 V_k(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{e}_o)) \\ \dot{V}_k(\Delta_{\eta}^{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{e}_o))) = \eta^{1+\alpha} \dot{V}_k(\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{e}_o)) \end{cases} \quad (30)$$

则  $V_k(\boldsymbol{\zeta})$  和  $\dot{V}_k(\boldsymbol{\zeta})$  关于相同的权重变量  $\mathbf{r}$  的齐次度为 2 和  $\alpha + 1$ . 由引理 3 和式 (28) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(\boldsymbol{\zeta}) &\leq \left( \max_{\mathbf{v}: V_k(\mathbf{v})=1} \dot{V}_k(\mathbf{v}) \right) (V_k(\boldsymbol{\zeta}))^{\frac{1+\alpha}{2}} \leq \\ &-c_k (V_k(\boldsymbol{\zeta}))^{\frac{1+\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (31)$$

则由引理 1 可得收敛时间上界为

$$T_k = \frac{2(V(\boldsymbol{\zeta}_0))^{\frac{1-\alpha}{2}}}{c_k(1-\alpha)} \quad (32)$$

□

### 4.2 固定时间收敛扰动观测器

固定时间收敛扰动观测器是有限时间收敛扰动观测器的进一步发展, 其可以表示为

$$\begin{cases} e_{o1} = z_1 - x_2 \\ \dot{z}_1 = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}^b) + u + z_2 - k_1 e_{o1}^{[\alpha_1]} - l_1 e_{o1}^{[\beta_1]} \\ \dot{z}_2 = -k_2 e_{o1}^{[\alpha_2]} - l_2 e_{o1}^{[\beta_2]} \end{cases} \quad (33)$$

其中,  $l_1, l_2$  为固定时间收敛扰动观测器的增益,  $\beta_1 = \beta \in (1, 1 + \epsilon)$ ,  $\beta_2 = 2\beta_1 - 1$ . 观测器增益  $\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_l$  为霍尔维兹矩阵. 观测器误差  $\mathbf{e}_o = [e_{o1}, e_{o2}]^T$  的动态可以表示为

$$\begin{cases} \dot{e}_{o1} = e_{o2} - k_1 e_{o1}^{[\alpha_1]} - l_1 e_{o1}^{[\beta_1]} \\ \dot{e}_{o2} = -k_2 e_{o1}^{[\alpha_2]} - l_2 e_{o1}^{[\beta_2]} \end{cases} \quad (34)$$

简写为  $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}(\mathbf{e}_o)$ .

**定理 2.** 系统 (34) 在固定时间收敛到原点, 且收敛时间上界为

$$T_o \leq T_{\max} = \frac{2}{c_l(\beta - 1)\Upsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{2\lambda_{\max}^{\frac{1-\alpha}{2}}(\mathbf{P}_k)}{c_k(1-\alpha)} \quad (35)$$

其中, 常数  $\Upsilon < \lambda_{\min}(\mathbf{P}_l)$ ,  $c_k = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_k)}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_k)}$ ,  $c_l = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_l)}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_l)}$ ,  $\mathbf{Q}_l, \mathbf{P}_l$  与  $\mathbf{A}_l$  对应, 三者的定义与定理 1 中  $\mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k, \mathbf{A}_k$  类似.

**证明.** 将有限时间扰动观测器误差系统 (25) 记为辅助系统  $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}_0(\mathbf{e}_o)$ , 同时定义辅助系统  $\mathbf{f}_\infty(\mathbf{e}_o)$  为

$$\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}_\infty(\mathbf{e}_o) = \begin{bmatrix} e_{o2} - k_1 e_{o1}^{[\alpha_1]} \\ -k_2 e_{o1}^{[\beta_2]} \end{bmatrix} \quad (36)$$

由于观测器增益矩阵均为霍尔维兹矩阵, 与第 4.1 节相似, 可以得到系统  $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}(\mathbf{e}_o)$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}_0(\mathbf{e}_o)$  和  $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}_\infty(\mathbf{e}_o)$  的原点均为渐近稳定平衡点. 取权重向量  $\mathbf{r}_0 = [1, \alpha]^T$ , 齐次度  $d_0 = \alpha - 1$ , 则有

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \left\| \begin{bmatrix} \eta^{-(\alpha-1+1)}\chi_1 \\ \eta^{-(\alpha-1+\alpha)}\chi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{o2} - k_1 e_{o1}^{[\alpha]} \\ -k_2 e_{o1}^{[2\alpha-1]} \end{bmatrix} \right\| &= \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \left\| \begin{bmatrix} -l_1 \eta^{\beta-\alpha} e_{o1}^{[\beta]} \\ -l_2 \eta^{2(\beta-\alpha)} e_{o1}^{[2\beta-1]} \end{bmatrix} \right\| &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\begin{cases} \chi_1 = \eta^\alpha e_{o2} - k_1 \eta^\alpha e_{o1}^{[\alpha]} - l_1 \eta^\beta e_{o1}^{[\beta]} \\ \chi_2 = -k_2 \eta^{2\alpha-1} e_{o1}^{[2\alpha-1]} - l_2 \eta^{2\beta-1} e_{o1}^{[2\beta-1]} \end{cases} \quad (38)$$

则系统  $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}(\mathbf{e}_o)$  关于三元组  $(\mathbf{r}_0, d_0, \mathbf{f}_0)$  具有 0-极限齐次性. 同理可验证其关于三元组  $(\mathbf{r}_\infty = [1, \beta]^T, d_\infty = \beta - 1, \mathbf{f}_\infty)$  具有  $\infty$ -极限齐次性. 由引理 5 可得系统  $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}(\mathbf{e}_o)$  的原点是固定时间稳定的, 即观测器在固定时间上界内收敛到零.

参考李雅普诺夫方法的分阶段估计思路估计

收敛时间上界, 对于系统  $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}_\infty(\mathbf{e}_o)$ , 引入辅助向量  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{e}_o) = [e_{o1}, e_{o2}^{1/\beta}]^T \in \mathbf{R}^2$  和标量函数  $V_\infty(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\gamma}^T(\mathbf{e}_\infty) \mathbf{P}_k \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{e}_\infty)$ . 与式 (30) 相似, 可以验证  $V_\infty(\boldsymbol{\gamma})$  和  $\dot{V}_\infty(\boldsymbol{\gamma})$  关于同一权重  $\mathbf{r}_\infty = [1, \beta]^T$  的齐次度为 2 和  $\beta + 1$ . 则由引理 3 和式 (28) 可得

$$\dot{V}_\infty(\boldsymbol{\gamma}) \leq -c_l (V_\infty(\boldsymbol{\gamma}))^{\frac{1+\beta}{2}}, \quad c_l = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_l)}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_l)} \quad (39)$$

设常数  $\Upsilon < \lambda_{\min}(\mathbf{P}_l)$ . 若初始状态满足  $V_\infty(\boldsymbol{\gamma}_0) > \Upsilon$ , 则由式 (39) 可得,  $V_\infty(\boldsymbol{\gamma})$  收敛到  $\Upsilon$  的时间上界为

$$T_\infty = \frac{2}{c_l(\beta - 1)\Upsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} \quad (40)$$

若  $V_\infty(\boldsymbol{\gamma}) \leq \Upsilon$ , 则有

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\gamma}\|^2 &\leq \frac{V_\infty(\boldsymbol{\gamma})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_l)} \leq \frac{\Upsilon}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_l)} \leq 1 \Rightarrow \\ |e_{o2}|^{\frac{1}{\beta}} &\leq 1 \Rightarrow |e_{o2}|^{\frac{1}{\alpha}} \leq |e_{o2}|^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow \\ \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 &\leq \|\boldsymbol{\gamma}\|^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (41)$$

此时考虑系统  $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{f}_0(\mathbf{e}_o)$ , 初始值  $\|\boldsymbol{\zeta}_0\|^2$ , 则由式 (32) 可得该系统收敛到原点的时间上界为

$$T_0 = \frac{2V_0^{\frac{1-\alpha}{2}}(\boldsymbol{\zeta}_0)}{c_k(1-\alpha)} \leq \frac{2\lambda_{\max}^{\frac{1-\alpha}{2}}(\mathbf{P}_k)}{c_k(1-\alpha)} \quad (42)$$

则扰动观测器误差  $\mathbf{e}_o$  收敛到原点的时间上界为

$$T_o \leq T_\infty + T_0 \leq \frac{2}{c_l(\beta - 1)\Upsilon^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{2\lambda_{\max}^{\frac{1-\alpha}{2}}(\mathbf{P}_k)}{c_k(1-\alpha)} \quad (43)$$

□

## 5 终端滑模控制器设计

采用第 4 节所设计的扰动观测器的估计值对广义误差系统 (22) 的等价干扰  $d(\mathbf{x}, t)$  进行补偿, 则补偿控制量  $u_c$  可以分解为扰动估计量  $u_d = -z_2$  和滑模控制量  $u_{sc}$ . 观测器误差在固定时间上界内收敛到原点, 但由于等价干扰为动态扰动, 因此收敛之后仍可能存在较小的估计误差, 假设扰动观测器估计误差  $d_o = d(\mathbf{x}, t) - z_2$  满足  $|d_o| < D_o$ , 则广义误差系统 (22) 可以改写为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{f}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}^b) + d_o + u_{sc} \end{cases} \quad (44)$$

则控制器的设计目标为设计控制输入  $u_{sc}$  使系统 (44) 在有限/固定时间收敛到原点. 本节采用终端滑模方法设计补偿控制器, 用  $s = f_s(\tilde{\mathbf{x}})$  表示滑模变量, 终端滑模方法包含两个阶段: 当  $s \neq 0$  时, 设计趋近律  $\dot{s} = f_r(s)$  使  $s$  收敛到 0; 当  $s = 0$  时, 系统沿着所

设计的滑动模态  $f_s(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$  运动到原点. 若趋近运动时间为  $T_r$ , 系统沿滑模动态运动到原点的时间为  $T_s$ , 则闭环系统收敛时间为  $T = T_r + T_s$ .

### 5.1 有限时间收敛终端滑模控制器

基于传统终端滑模面<sup>[36]</sup>, 采用分数阶非线性函数设计滑动模态和趋近律如下

$$\begin{cases} \dot{s} = f_s(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_2 + p\tilde{x}_1^{[\alpha]} \\ \dot{s} = f_r(s) = -p_s s^{[\alpha_s]} \end{cases} \quad (45)$$

其中,  $p_s$  为滑模控制器的一个可调参数,  $x^{[q]} = |x|^q \text{sign}(x)$ ,  $\alpha, \alpha_s \in (0, 1)$ . 对滑模变量求导, 则有

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f'_s(\tilde{\mathbf{x}}) = \dot{\tilde{x}}_2 + p\alpha |\tilde{x}_1|^{\alpha-1} \tilde{x}_2 = \\ &\tilde{f}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}^b) + d_o + u_{sc} + p\alpha |\tilde{x}_1|^{\alpha-1} \tilde{x}_2 \end{aligned} \quad (46)$$

为实现趋近律  $f_r(s)$ , 控制律设计为

$$u_{sc} = -(u_f + u_s + u_r + u_d) \quad (47)$$

其各项依次为: 逆系统项  $u_f = \tilde{f}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}^b)$  负责抵消系统动态, 滑动模态项  $u_s = p\alpha |\tilde{x}_1|^{\alpha-1} \tilde{x}_2$  负责控制滑动模态, 趋近律项  $u_r = p_s s^{[\alpha_s]}$  负责实现趋近律, 鲁棒切换项  $u_d = D_o \text{sign}(s)$  负责通过高频切换补偿扰动  $d_o$ . 将式 (47) 代入式 (46) 可得

$$\dot{s} = -(p_s |s|^{\alpha_s} + \epsilon) \text{sign}(s) \quad (48)$$

其中,  $\epsilon = (D_o - d_o \text{sign}(s)) \geq 0$ , 选取李雅普诺夫函数  $V_r(s) = s^2$ , 则其导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_r(s) &= 2s\dot{s} = -2|s|(p_s |s|^{\alpha_s} + \epsilon) < 0 \Rightarrow \\ \dot{V}_r(s) &\leq -2p_s (s^2)^{\frac{\alpha_s+1}{2}} = -2p_s V_r^{\frac{\alpha_s+1}{2}}(s) \end{aligned} \quad (49)$$

由引理 1 可得  $s$  有限时间收敛到零, 且时间上界为

$$T_r = \frac{|s_0|^{1-\alpha_s}}{p_s(1-\alpha_s)} \quad (50)$$

其中,  $s_0$  为系统 (45) 的初始状态. 到达滑模面后  $s = 0$ , 由此可以得到  $\tilde{x}_2 = -p\tilde{x}_1^{[\alpha]}$ , 选取李雅普诺夫函数为  $V_s(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1^2$ , 则  $\dot{V}_s(\tilde{x}_1) \leq -2pV_s^{\frac{\alpha+1}{2}}(\tilde{x}_1)$ , 则系统沿滑模面收敛到原点的时间上界为

$$T_s = \frac{|\tilde{x}_{1,0}|^{1-\alpha}}{p(1-\alpha)} \quad (51)$$

其中,  $\tilde{x}_{1,0}$  为系统 (44) 中状态  $\tilde{x}_1$  的初始值. 则总的收敛时间上界为  $T = T_r + T_s$ .

### 5.2 固定时间收敛终端滑模控制器

终端滑模控制方法收敛特性由趋近律和滑动模

态函数的收敛特性决定. 有限时间终端滑模的  $f_s(\tilde{\mathbf{x}})$  和  $f_r(s)$  基于微分方程  $\dot{v} = -pv^{[\eta]}$ ,  $\eta \in (0, 1)$  设计. 定义辅助函数  $h_0(v) = \frac{|v|^{(1-\eta)}}{1-\eta}$ , 则微分方程  $\dot{v} = -pv^{[\eta]}$ ,  $\eta \in (0, 1)$  可以表示为

$$\dot{v} = -p(h'_0(v))^{-1} \quad (52)$$

求解该微分方程, 收敛时间为  $T_v = \frac{h_0(v_0)}{p}$ , 与初始值  $h_0(v_0)$  有关, 则基于微分方程设计的终端滑模方法有限时间收敛.

本节提出一种新的固定时间收敛终端滑模面设计方法, 引入非线性有界函数

$$h(v) = \frac{|v|^\mu}{c + |v|^\mu} \in (0, 1) \quad (53)$$

其中,  $c > 0$ ,  $\mu \in (0, 1)$ , 则式 (52) 可以表示为

$$\dot{v} = -p(h'(v))^{-1} = \frac{-p(c + |v|^\mu)^2 |v|^{1-\mu} \text{sign}(v)}{c\mu} \quad (54)$$

令  $V = |v|$ , 则有

$$\dot{V} = \frac{-p(c + V^\mu)^2 V^{1-\mu}}{c\mu} = -p(h'(V))^{-1} \quad (55)$$

则收敛时间上界为

$$T_{\max} = \frac{h(V_0)}{p} = \frac{h(v_0)}{p} < \frac{1}{p} \quad (56)$$

当  $v$  足够小时有

$$h(v) \approx \frac{|v|^\mu}{c} \quad (57)$$

此时  $h(v)$  等价于  $h_0(v)$ , 则基于式 (54) 设计的终端滑模面在接近原点时收敛特性与传统有限时间终端滑模相似. 该方法可以调整的参数有  $p, \mu, c$ : 参数  $p$  决定收敛时间上界, 对收敛特性影响最大,  $p$  越大收敛速度越快; 参数  $\mu$  主要决定收敛的曲率,  $\mu$  越小, 则接近原点时等效终端滑模方法的参数  $\alpha$  越大, 收敛速度越慢, 曲率越平缓, 相应地, 当远离原点时,  $\mu$  越小, 下降速度越快; 参数  $c$  主要影响接近平衡点时的收敛速度,  $c$  越大, 靠近平衡点时收敛速度越快.

采用式 (54) 设计滑动模态和趋近律为

$$\begin{cases} \dot{s} = f_s(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_2 + p(h'(\tilde{x}_1, c, \mu))^{-1} \\ \dot{s} = f_r(s) = -p_s(h'(s, c_s, \mu_s))^{-1} \end{cases} \quad (58)$$

其中,  $c_s, \mu_s$  均为控制器参数, 对应式 (53) 中的  $c$  和  $\mu$ . 则对应的滑动模态项控制输入  $u_s$ , 趋近律项控制输入  $u_r$  分别为

$$u_s = -p \frac{h''(\tilde{x}_1, c, \mu)}{(h'(\tilde{x}_1, c, \mu))^2} \tilde{x}_2 = -p \left( \frac{(\mu - 1)(c + |\tilde{x}_1|^\mu)^2}{c\mu_1 |\tilde{x}_1|^\mu} - \frac{2(c + |\tilde{x}_1|^\mu)}{c} \right) \tilde{x}_2 \quad (59)$$

$$u_r = p_s (h'(s, c_s, \mu_s))^{-1} \quad (60)$$

**定理 3.** 采用式 (59) 和式 (60) 所述非线性控制律的二阶广义误差系统固定时间稳定, 且收敛时间上界为

$$T_{\max} = T_r + T_s = \frac{1}{p_s} + \frac{1}{p} \quad (61)$$

**证明.** 结合逆系统项  $u_f = \tilde{f}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}^b)$  和鲁棒切换项  $u_d = D\text{sign}(s)$ , 设计控制输入

$$u_{sc} = -(u_f + u_s + u_r + u_d) \quad (62)$$

则滑模变量的导数为

$$\dot{s} = -p_s (h'(s, c_s, \mu_s))^{-1} - \epsilon \text{sign}(s) \quad (63)$$

其中,  $\epsilon = (D_o - d_o \text{sign}(s)) \geq 0$ , 则李雅普诺夫函数  $V_r(s) = s^2$  的导数为

$$\dot{V}_r(s) = 2|s| \left( \frac{-p_s (c_s + |s|^{\mu_s})^2 |s|^{1-\mu_s}}{c_s \mu_s} - \epsilon \right) < 0 \quad (64)$$

则原点是滑模变量  $s$  的渐近收敛平衡点, 又由式 (54) 的固定时间收敛特性可得趋近运动的收敛时间上界为  $T_r = 1/p_s$ . 到达滑模面后  $s = 0$ , 可得  $\tilde{x}_2 = -p (h'(\tilde{x}_1, c, \mu))^{-1}$ , 则系统收敛到原点的的时间上界为  $T_s = 1/p$ , 故广义误差系统在固定时间上界  $T_{\max}$  内收敛到原点.

$$T_{\max} = T_r + T_s = \frac{1}{p_s} + \frac{1}{p} \quad (65)$$

□

式 (54) 设计的终端滑模控制器存在奇异性问题, 即控制器 (62) 的  $u_s$  控制量的第一项在  $\tilde{x}_1 \rightarrow 0, \tilde{x}_2 \neq 0$  时会出现输入过大的情况. 针对该问题, 本文在纵轴附近邻域  $A_\epsilon = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^2 : \tilde{x}_1 \in (-\epsilon_1, \epsilon_1), |\tilde{x}_2| > \epsilon_2\}$  修改控制量为

$$u_\sigma = -(u_f + u_d + \tilde{x}_2) \quad (66)$$

容易验证此时  $\tilde{x}_2 \dot{\tilde{x}}_2 \geq 0$  且  $|\dot{\tilde{x}}_1| \geq |\tilde{x}_2(t_0)|$ , 则  $\tilde{\mathbf{x}}$  会在  $T_\epsilon \leq \frac{2\epsilon_1}{|\dot{\tilde{x}}_2(t_0)|} \leq \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2}$  时间上界内离开  $A_\epsilon$ , 之后继续沿终端滑模轨迹运动.  $T_\epsilon$  是在减小奇异性时带入的小的时间增量, 不会改变全局的固定时间收敛特性. 闭环系统相平面图如图 4 所示.

**注 1.** 为了减弱非线性切换项导致的抖振现象,

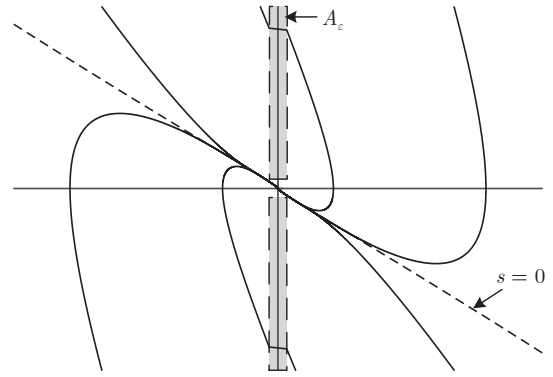


图 4 闭环系统相平面图

Fig. 4 Closed-loop system phase plane diagram

可采用连续饱和函数代替符号函数  $\text{sign}(s)$ :

$$\psi_s(q, s) = \frac{qs}{1 + |qs|}, q > 0 \quad (67)$$

**注 2.** 本文对固定时间收敛扰动观测器和终端滑模控制器分别开展了稳定性分析, 在分析终端滑模控制器稳定性时考虑了观测器可能还存在的估计误差, 并假设误差有界, 这是一种比较典型的做法. 但将扰动观测器和终端滑模控制器综合成一个更高阶系统进行稳定性证明是一种更理想的途径, 然而由于其强耦合、互相影响等原因, 使得该工作存在诸多挑战, 将是未来的研究重点.

## 6 仿真验证

将所设计的滑模控制器和扰动观测器应用到第 3 节设计的倾转旋翼无人机模型参考姿态控制结构中, 得到有限/固定时间模型参考控制方法. 考虑到倾转旋翼无人机在过渡模式低速阶段迎风面积较大, 容易受到阵风干扰, 因此在仿真中加入幅值为 6 m/s、方向为  $10^\circ$  的梯形阵风扰动验证本文所设计控制器的抗扰能力, 如图 5 所示.

本文参考模型选取二阶线性系统, 通过调整自然角频率  $\omega_n$  和阻尼比  $\zeta$ , 可以灵活表征动态响应需

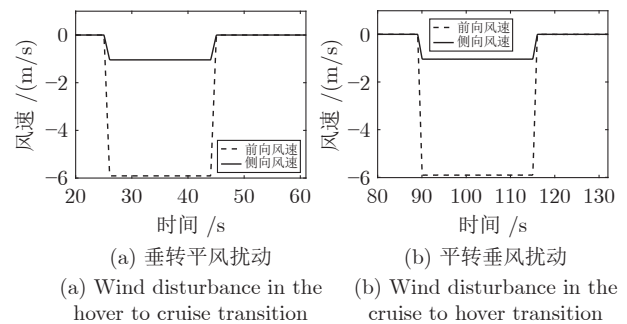


图 5 仿真中加入的风扰动

Fig. 5 Wind disturbance added to the simulation

求. 考虑到随着速度增加, 飞行器固有模态的自然角频率增加, 采用定阻尼比、变自然角频率的参考模型设计方法, 以二元组  $(\omega_n, \zeta)$  表示参考模型参数. 其中, 俯仰通道参与纵向力控制, 对过渡模态飞行性能影响较大, 因此要求动态特性较高, 参考模型参数选为  $(2 + V_x^b/10, 0.8)$ ; 滚转通道用于横侧向位置控制, 动态特性要求弱于俯仰通道, 模型参数选为  $(1 + V_x^b/15, 0.9)$ ; 偏航通道不参与力控制分配, 动态特性要求较低, 模型参数选为  $(1 + V_x^b/60, 1.0)$ ;  $V_x^b$  为无人机前向飞行速度. 对应于参考模型 (19), 其参数如表 1 所示.

表 1 参考模型参数

Table 1 Reference model parameters

通道	$a_{m1}$	$a_{m2}$
滚转	$(1 + V_x^b/15)^2$	$1.8 + 0.12V_x^b$
俯仰	$(2 + V_x^b/10)^2$	$3.2 + 0.16V_x^b$
偏航	$(1 + V_x^b/60)^2$	$2.0 + V_x^b/30$

### 6.1 有限时间模型参考控制仿真

应用有限时间收敛扰动观测器和终端滑模控制器得到有限时间收敛模型参考控制方法, 控制参数如表 2 所示, 仿真结果如图 6 和图 7 所示.

表 2 有限时间模型参考控制器参数

Table 2 Finite-time model reference controller parameters

通道	$p$	$\alpha$	$p_s$	$\alpha_s$	$D_o$	$\alpha_o$	$k_1$	$k_2$
滚转	0.6	1.2	1	5/9	0.8	0.95	20	100
俯仰	0.8	1.2	1	1/3	3.0	0.95	20	100
偏航	0.3	1.2	1	5/9	0.8	0.95	20	100

垂转平过程中阵风扰动时间为 25 s 到 55 s, 平转垂过程中阵风扰动时间为 90 s 到 115 s. 姿态角响应如图 6(a) 和图 7(a) 所示. 可以看出, 有限时间模型参考控制方法具有较好的闭环动态特性和跟踪精度, 避免了俯仰角振荡, 说明该控制方法对模型不确定性具有较强的鲁棒性. 高度响应如图 6(b) 和图 7(b) 所示, 得益于姿态环控制精度较高, 高度响应平稳, 垂转平阶段变化小于 1.5 m, 平转垂阶段变化小于 3 m.

有限时间扰动观测器响应如图 6(c) 和图 7(c) 所示, 为了显示更加直观, 将滚转和偏航通道的扰动进行缩放,  $\bar{d}$  表示扰动估计值,  $d$  表示实际扰动. 可以看出, 在出现阵风扰动时, 扰动观测器能够快

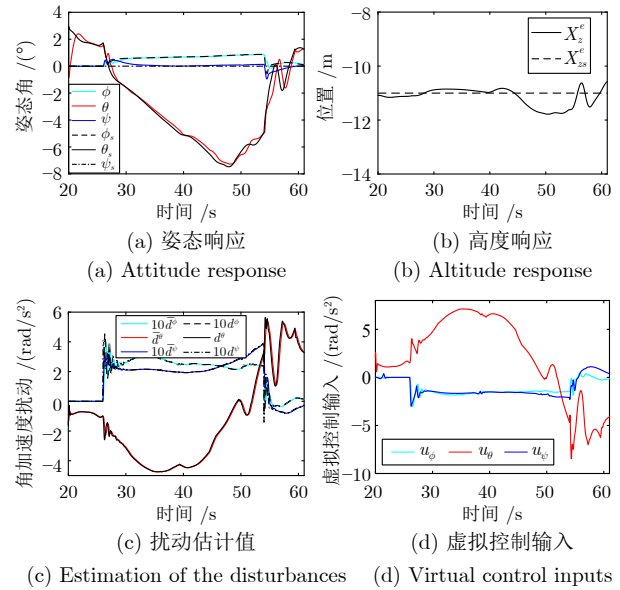


图 6 有限时间模型参考控制垂转平仿真结果

Fig. 6 Simulation results during the hover to cruise transition flight under the finite-time model reference control

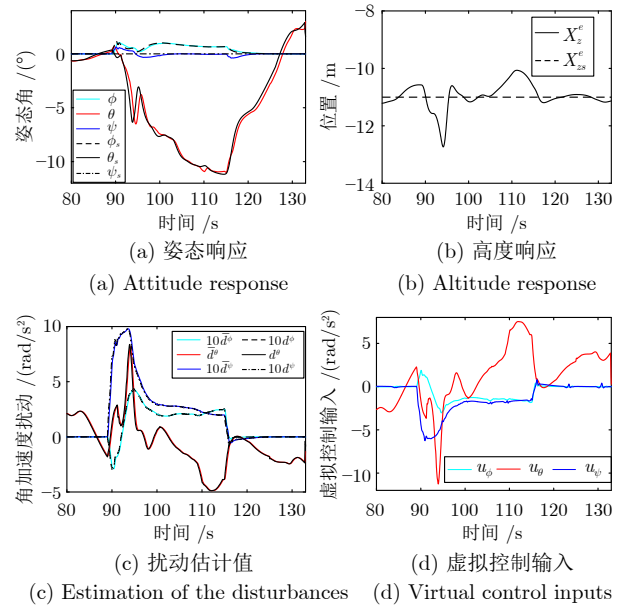


图 7 有限时间模型参考控制平转垂仿真结果

Fig. 7 Simulation results during the cruise to hover transition flight under the finite-time model reference control

速估计姿态环扰动, 降低了切换项增益, 使得虚拟控制输入 (图 6(d) 和图 7(d)) 更加平稳, 避免了控制量抖振. 综上所述, 仿真结果表明有限模型参考控制器对模型不确定性和外部扰动均具有较好的鲁棒性, 提高了倾转旋翼无人机姿态控制精度和动态特性.

### 6.2 固定时间模型参考控制仿真

应用固定时间收敛扰动观测器和终端滑模控制器得到固定时间收敛模型参考控制方法, 控制器参数如表 3 所示, 仿真中加入了与有限时间模型参考控制相同的阵风扰动, 仿真结果如图 8 和图 9 所示. 与有限时间收敛模型参考控制方法相比, 固定时间收敛模型参考控制方法对扰动的估计收敛速度更快, 姿态控制精度更高 (图 8(a) 和图 9(a)), 控制输入更加平稳 (图 8(d) 和图 9(d)).

为更直观地比较两种方法, 定义累积误差  $T_E$  衡量跟踪精度, 总变化  $T_V$  衡量控制量抖动程度

$$T_E = \sum_{i=1}^N |x - x_s| \Delta t, T_V = \sum_{i=1}^{N-1} |u_{i+1} - u_i| \quad (68)$$

分别考察两段过渡过程中高度的累积误差  $T_E^z$ , 角度跟踪累积误差  $T_E^{\phi(\theta, \psi)}$ , 扰动观测器累积误差  $T_E^{\phi(\theta, \psi)}$ , 虚拟控制量总变化  $T_V^{\phi(\theta, \psi)}$ , 得到性能指标如表 4 所示.

表 3 固定时间模型参考控制器参数  
Table 3 Fixed-time model reference controller parameters

通道	$p$	$\mu$	$c$	$p_s$	$\mu_s$	$c_s$	$D_o$	$\alpha_o$	$k_1$	$k_2$	$\beta_o$	$l_1$	$l_2$
滚转	0.5	2/9	1	1.0	3/9	2	0.5	0.94	20	100	1.06	20	100
俯仰	1.0	2/9	2	1.5	4/9	2	2.0	0.94	20	100	1.06	30	225
偏航	0.5	2/9	1	1.0	3/9	2	0.5	0.94	20	100	1.06	20	100

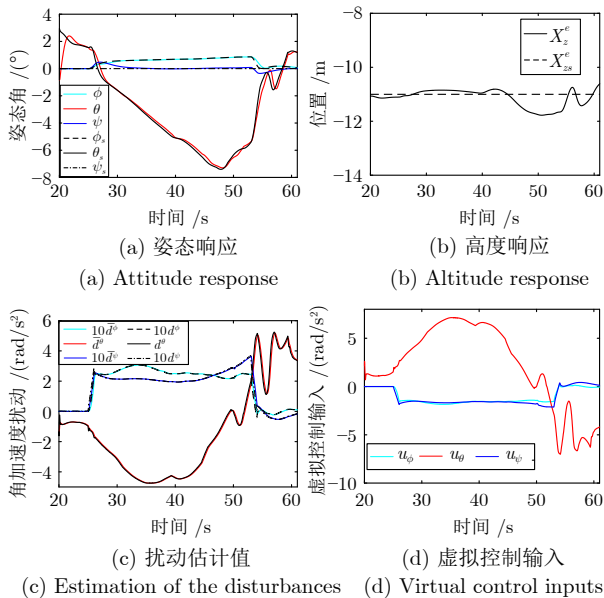


图 8 固定时间模型参考控制垂转平仿真结果  
Fig.8 Simulation results during the hover to cruise transition flight under the fixed-time model reference control

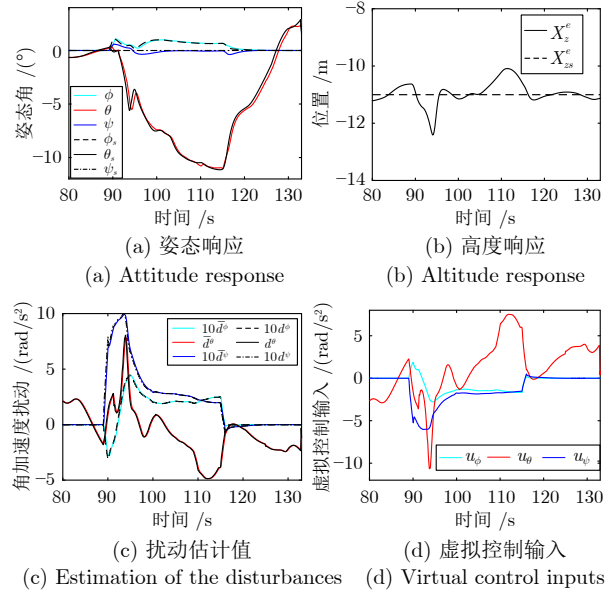


图 9 固定时间模型参考控制平转垂仿真结果  
Fig.9 Simulation results during the cruise to hover transition flight under the fixed-time model reference control

表 4 有限/固定时间模型参考控制方法性能指标对比  
Table 4 Comparison of performance indexes of finite-time/fixed-time model reference control methods

设计方法	$T_E^z$	$T_E^{\phi}$	$T_E^{\psi}$	$T_E^{\theta}$	$T_E^{\psi\theta}$	$T_E^{\phi\theta}$	$T_E^{\phi\psi}$	$T_V^{\phi}$	$T_V^{\psi}$	$T_V^{\psi}$
有限时间	26.57	0.06	0.55	0.08	0.44	11.42	0.56	125.73	598.62	147.77
固定时间	23.73	0.05	0.38	0.06	0.41	9.65	0.56	87.76	520.64	120.94

结果表明, 固定时间模型参考方法在高度累积误差、姿态角累积误差、观测器累积误差方面均不差于有限时间模型参考控制方法, 具有更高的姿态控制精度和扰动观测精度, 同时各通道输入量的总变化更小, 控制输出更加平稳.

## 7 结束语

针对倾转旋翼无人机飞行过程中模型不确定性大、易受外部扰动影响的问题, 研究基于固定时间稳定性理论的模型参考姿态控制方法. 通过滤波和限幅模块保证被控对象输入的平稳, 基于齐次系统理论设计固定时间扰动观测器, 基于非线性饱和函数提出固定时间终端滑模控制器设计方法. 仿真结果表明, 所提方法对模型不确定性和外部扰动具有较强的鲁棒性, 被控对象状态能够快速准确地跟踪参考模型, 保证了闭环动态特性和跟踪精度; 相对于有限时间方法, 固定时间模型参考控制方法具有更高的控制精度和更平滑的控制输出. 在未来研究工作中, 将对倾转旋翼无人机姿态控制中有限时间

方法的系统收敛性和稳定性方面开展更深入的理论研究; 同时, 还将通过倾转旋翼无人机飞行试验, 对研究成果做系统性应用验证。

## References

- 1 Misra A, Jayachandran S, Kenche S, Katoch A, Suresh A, Gundabattini E, et al. A review on vertical take-off and landing (VTOL) tilt-rotor and tilt wing unmanned aerial vehicles (UAVs). *Journal of Engineering*, 2022, **2022**(1): Article No. 1803638
- 2 Hegde N T, George V I, Nayak C G, Kumar K. Design, dynamic modelling and control of tilt-rotor UAVs: A review. *International Journal of Intelligent Unmanned Systems*, 2019, **8**(3): 143–161
- 3 Eskandarpour A, Mehrandezh M, Gupta K, Ramirez-Serrano A, Soltanshah M. A constrained robust switching MPC structure for tilt-rotor UAV trajectory tracking problem. *Nonlinear Dynamics*, 2023, **111**(18): 17247–17275
- 4 Govdeli Y, bin Muzaffar S M, Raj R, Elhadidi B, Kayacan E. Unsteady aerodynamic modeling and control of pusher and tilt-rotor quadplane configurations. *Aerospace Science and Technology*, 2019, **94**: Article No. 105421
- 5 Wang Z G, Wang Q N, Yu H R, Duan D Y, Ding Z W, Li J B. Trimming analysis method of quad tilt rotor based on aerodynamic interference model. *Journal of Aircraft*, 2021, **58**(2): 253–265
- 6 Li W, Shi S, Chen M, Wu Q X. Adaptive tracking control for the conversion mode of tilt-rotor aircraft with switched fuzzy modeling. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2024, **26**(4): 1203–1214
- 7 Comer A M, Chakraborty I. Full envelope flight control system design and optimization for a tilt-wing aircraft. *Journal of the American Helicopter Society*, 2024, **69**(3): 1–18
- 8 Bauersfeld L, Spannagl L, Ducard G J J, Onder C H. MPC flight control for a tilt-rotor VTOL aircraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2021, **57**(4): 2395–2409
- 9 Zhu Bin, Chen Qing-Wei. Trajectory tracking controller design of vertical or short takeoff and landing aircraft. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(6): 1166–1176  
(朱斌, 陈庆伟. 垂直/短距起降飞机的轨迹跟踪控制器设计. *自动化学报*, 2019, **45**(6): 1166–1176)
- 10 Lv Z Y, Zhao Q, Sun X M, Wu Y H. Finite-time control design for a coaxial tilt-rotor UAV. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2024, **71**(12): 16132–16142
- 11 Panza S, Lovera M, Sato M, Muraoka K. Structured  $\mu$ -synthesis of robust attitude control laws for quad-tilt-wing unmanned aerial vehicle. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2020, **43**(12): 2258–2274
- 12 Yu Z L, Zhang J J, Wang X Y. Thrust vectoring control of a novel tilt-rotor UAV based on backstepping sliding model method. *Sensors*, 2023, **23**(2): Article No. 574
- 13 Liu Shuang-Xi, Lin Ze-Huai, Liu Wei, Yan Bin-Bin, Huang Wei. Research on transition mode control scheme of tilt rotor UAV based on INDI. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2024, **45**(17): 236–250  
(刘双喜, 林泽淮, 刘伟, 闫斌斌, 黄伟. 基于 INDI 的倾转旋翼无人机过渡模式控制方案. *航空学报*, 2024, **45**(17): 236–250)
- 14 Zhong J Y, Wang C, Zhang H. Transition control of a tail-sitter unmanned aerial vehicle with L1 neural network adaptive control. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2023, **36**(7): 460–475
- 15 Zhang D, Wei B. A review on model reference adaptive control of robotic manipulators. *Annual Reviews in Control*, 2017, **43**: 188–198
- 16 Hou Z S, Xiong S S. On model-free adaptive control and its stability analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(11): 4555–4569
- 17 Anderson R B, Marshall J A, L’Afflitto A. Constrained robust model reference adaptive control of a tilt-rotor quadcopter pulling an unmodeled cart. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2021, **57**(1): 39–54
- 18 Liu N J, Cai Z H, Zhao J, Wang Y X. Predictor-based model reference adaptive roll and yaw control of a quad-tiltrotor UAV. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, **33**(1): 282–295
- 19 Liu Y, Li H Y, Lu R Q, Zuo Z Y, Li X D. An overview of finite/fixed-time control and its application in engineering systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2022, **9**(12): 2106–2120
- 20 Sun Z Y, Shao Y, Chen C C. Fast finite-time stability and its application in adaptive control of high-order nonlinear system. *Automatica*, 2019, **106**: 339–348
- 21 Song Y D, Ye H F, Lewis F L. Prescribed-time control and its latest developments. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, **53**(7): 4102–4116
- 22 Bhat S P, Bernstein D S. Lyapunov analysis of finite-time differential equations. In: Proceedings of the American Control Conference (ACC). Seattle, USA: IEEE, 1995. 1831–1832
- 23 Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of homogeneous systems. In: Proceedings of the American Control Conference (ACC). Albuquerque, USA: IEEE, 1997. 2513–2514
- 24 Polyakov A, Fridman L. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, **351**(4): 1831–1865
- 25 Andrieu V, Praly L, Astolfi A. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, **47**(4): 1814–1850
- 26 Sun H B, Hou L L, Zong G D, Yu X H. Fixed-time attitude tracking control for spacecraft with input quantization. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2019, **55**(1): 124–134
- 27 Wang J H, Alattas K A, Bouteraa Y, Mofid O, Mobayen S. Adaptive finite-time backstepping control tracker for quadrotor UAV with model uncertainty and external disturbance. *Aerospace Science and Technology*, 2023, **133**: Article No. 108088
- 28 Xiao J, Zeng Z G, Wen S P, Wu A L, Wang L M. A unified framework design for finite-time and fixed-time synchronization of discontinuous neural networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, **51**(6): 3004–3016
- 29 Wang C Y, Dong W, Wang J N, Shan J Y, Xin M. Guidance law design with fixed-time convergent error dynamics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2021, **44**(7): 1389–1398
- 30 Cheng W L, Zhang K, Jiang B. Fixed-time and prescribed-time fault-tolerant optimal tracking control for heterogeneous multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2024, **21**(4): 7275–7286
- 31 Zhu J H, Yang Y J, Wang X Y, Yuan X M, Yang X. Attitude control of a novel tilt-wing UAV in hovering flight. *Science China Information Sciences*, 2023, **66**(5): Article No. 154201
- 32 Ding S H, Mei K Q, Yu X H. Adaptive second-order sliding mode control: A Lyapunov approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(10): 5392–5399
- 33 Abdul Ghaffar A F, Richardson T, Greatwood C. A combined model reference adaptive control law for multirotor UAVs. *IET Control Theory & Applications*, 2021, **15**(11): 1474–1487
- 34 Marshall J A, Carter G I, L’Afflitto A. Model reference adaptive control for prescribed performance and longitudinal control of a tail-sitter UAV. In: Proceedings of the AIAA SCITECH 2022 Forum. San Diego, USA: AIAA, 2022. Article No. 1380
- 35 Basin M, Yu P, Shtessel Y. Finite- and fixed-time differentiators utilising HOSM techniques. *IET Control Theory & Applications*, 2017, **11**(8): 1144–1152

- 36 Venkataraman S T, Gulati S. Control of nonlinear systems using terminal sliding modes. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1993, **115**(3): 554-560

**朱纪洪** 清华大学精密仪器系、时空信息精密感知技术全国重点实验室教授。主要研究方向为先进飞行器动力学与智能控制技术。

E-mail: [jhzhu@tsinghua.edu.cn](mailto:jhzhu@tsinghua.edu.cn)

(**ZHU Ji-Hong** Professor in the Department of Precision Instrument,

Tsinghua University, and the State Key Laboratory of Precision Space-time Information Sensing Technology.

His research interest covers advanced aircraft dynamics and intelligent control technology.)



**张骁骏** 中航工业成都飞机设计研究所工程师。主要研究方向为飞行器设计及飞行控制技术。

E-mail: [xj-zhang31@foxmail.com](mailto:xj-zhang31@foxmail.com)

(**ZHANG Xiao-Jun** Engineer at AVIC Chengdu Aircraft Design and Research Institute. His research interest covers aircraft design and flight control technology.)



His research interest covers aircraft design and flight control technology.)



**杨贇杰** 清华大学精密仪器系、时空信息精密感知技术全国重点实验室助理研究员。主要研究方向为飞行动力学与非线性控制技术。本文通信作者。

E-mail: [yangyunjie@tsinghua.edu.cn](mailto:yangyunjie@tsinghua.edu.cn)

(**YANG Yun-Jie** Assistant researcher in the Department of Precision Instrument, Tsinghua University, and the State Key Laboratory of Precision Space-time Information Sensing Technology. His research interest covers flight dynamics and nonlinear control technology. Corresponding author of this paper.)

His research interest covers flight dynamics and nonlinear control technology. Corresponding author of this paper.)



**袁夏明** 清华大学精密仪器系、时空信息精密感知技术全国重点实验室助理研究员。主要研究方向为无人系统及智能控制技术。

E-mail: [xmyuan@tsinghua.edu.cn](mailto:xmyuan@tsinghua.edu.cn)

(**YUAN Xia-Ming** Assistant researcher in the Department of Precision Instrument, Tsinghua University, and the State Key Laboratory of Precision Space-time Information Sensing Technology. His research interest covers unmanned system and intelligent control technology.)

His research interest covers unmanned system and intelligent control technology.)