持续扰动下多耦合非线性系统分布式经济模型预测控制

王定超 [1] 何德峰 [1] 谢永芳 [2]

摘 要 针对持续扰动下的分布式状态耦合非线性系统, 提出一种新的多耦合分布式经济模型预测控制 (Economic model predictive control, EMPC) 策略. 由于耦合非线性系统的经济性能函数的非凸性和非正定性, 首先引入关于经济最优平衡点的正定辅助函数和相应的辅助优化问题. 接着, 利用辅助函数的最优值函数构造原始分布式 EMPC 的一类隐式收缩约束. 然后, 建立状态耦合分布式 EMPC 的递推可行性和闭环系统关于最优经济平衡点的输入到状态稳定性 (Input-to-state stability, ISS). 最后, 以耦合的四个连续搅拌釜反应器 (Continuous stirred tank reactors, CSTRs) 为例, 验证本文所提策略的有效性.

关键词 模型预测控制, 分布式控制, 非线性系统, 经济优化, 耦合系统

引用格式 王定超, 何德峰, 谢永芳. 持续扰动下多耦合非线性系统分布式经济模型预测控制. 自动化学报, 2025, **51**(3): 692−704

DOI 10.16383/j.aas.c240295 **CSTR** 32138.14.j.aas.c240295

Distributed EMPC of Multi-coupled Nonlinear Systems With Persistent Disturbances

WANG Ding-Chao[1] HE De-Feng[1] XIE Yong-Fang[2]

Abstract This paper presents a novel multi-coupled distributed economic model predictive control (EMPC) strategy for distributed state-coupled nonlinear systems with persistent disturbances. Due to the non-convex and non-positive-definite of the economic performance functions for coupled nonlinear systems, a positive definite auxiliary function related to the optimal economic equilibrium point and the corresponding auxiliary optimization problem are introduced. Then, the optimal value function of the auxiliary function is used to formulate a class of implicit contractive constraints for the original distributed EMPC. Subsequently, the recursive feasibility of the state-coupled distributed EMPC and the input-to-state stability (ISS) of the closed-loop system with respect to the optimal economic equilibrium point are established. Finally, the effectiveness of the proposed strategy is demonstrated by a simulation example of four coupled continuous stirred tank reactors (CSTRs).

Key words Model predictive control, distributed control, nonlinear systems, economic optimization, coupled systems

Citation Wang Ding-Chao, He De-Feng, Xie Yong-Fang. Distributed EMPC of multi-coupled nonlinear systems with persistent disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(3): 692−704

近年来, 分布式状态耦合非线性系统在工业界和学术界引起了广泛关注[1−12]. 这类系统是指一类由相互作用的动力子系统通过交换物质、能源或信息组成的大型耦合系统[6]. 由于子系统的演化会受到耦合子系统的影响, 一个关键挑战是如何处理和协调子系统之间的动力学、约束和目标中的多种耦合, 以实现整个耦合系统的协调优化控制. 分布式模型预测控制 (Distributed model predictive control, DMPC) 是解决这一问题的主要控制方法之一, 因为它能够有效处理具有约束、多变量、非线性以及子系统状态耦合等因素的优化控制问题.

根据优化控制问题中的耦合关系, DMPC 研究主要可分为状态耦合[11−12]、性能指标耦合[13−14] 和约束耦合[15−16]. 对于状态耦合的分布式系统, 文献 [11] 提出一种基于 Tube 的 DMPC 方法, 通过采用稳定反馈控制律来抑制耦合和外部扰动导致的预测状态和实际状态之间的误差, 从而降低了保守性. 文献 [12] 研究基于压缩理论的 DMPC 方案, 利用压缩理论估计状态预测误差, 与文献 [11] 相比, 子系统之间存在信息交互, 从而提升了控制性能并允许更强的耦合度. 针对性能指标耦合的分布式系统, 文献 [13] 提出一种协作 DMPC 策略, 其中子控制器的优化目标包括局部跟踪项以及子系统与邻居系统状态之间的偏差项, 通过在优化问题中添加一致性约束,

收稿日期 2024-05-27 录用日期 2024-08-05
Manuscript received May 27, 2024; accepted August 5, 2024
国家自然科学基金 (62173303), 中央引导地方科技发展资金项目 (2023ZY1045) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (62173303) and the Central Guidance Project for Local Scientific and Technological Development (2023ZY1045)
本文责任编委 杨涛
Recommended by Associate Editor YANG Tao
1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023 2. 中南大学自动化学院 长沙 410083
1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023 2. School of Automation, Central South University, Changsha 410083

实现了系统的稳定性. 文献 [14] 针对单积分和双积分多智能体系统提出一种 DMPC 算法, 该算法同时优化一致性状态和控制输入, 与固定端点的 DMPC 研究[13] 相比, 该方法具有更大的优化空间. 对于约束耦合的分布式系统, 文献 [15] 提出一种新的通用框架用于离散非线性系统的 DMPC, 该框架解决了在仅允许邻居间通信的情况下, 如何确保系统递推可行性和收敛至合作目标的问题. 文献 [16] 将文献 [15] 的结果拓展到多智能体编队系统, 通过使用兼容性、避障和避碰约束, 从而保证了优化问题的迭代可行性和智能体编队系统的一致性. 尽管各种耦合方式的 DMPC 研究已经取得了一定理论成果, 但同时考虑上述三种耦合的非线性系统 DMPC 研究尚未得到广泛关注.

另一方面, 在实际应用中还需要考虑经济因素, 如利润最大化或最小化用电量等[3, 17−22]. 因此, 设计的控制器必须在满足各种约束条件的同时, 实现最佳的经济性能和系统的稳定性 (系统的经济性目标与稳定性目标具有一定的冲突性[23]). 针对这一挑战, 部分学者研究了分布式经济模型预测控制 (Economic model predictive control, EMPC), 并取得相应的成果[24−27]. 由于这类 DMPC 的性能函数通常与过程的经济 (环保) 性能相关, 故统称为分布式 EMPC. 然而, 这里的"经济"并不特指某个经济性能, 而泛指一类非正定或非凸的任意性能函数[28]. 这种分布式 EMPC 的一个重要优点是将过程实时控制与经济性能优化结合在一个最优控制框架内设计, 并采用滚动时域方式实现系统的闭环状态反馈控制[29].

现有关于分布式状态耦合系统的 EMPC 稳定性研究主要分为以下两类: 基于耗散性的分布式 EMPC[27, 30] 和基于 Lyapunov 函数的分布式 EMPC[31]. 文献 [30] 针对受扰的状态耦合分布式线性系统, 提出一种新的分布式 EMPC 算法. 通过引入耗散性假设和附加惩罚函数将经济性能函数转化为正定性能函数, 并结合终端约束, 得到算法的递推可行性和稳定性结论. 由于系统受到扰动和状态耦合的影响, 状态一旦进入终端集合, 下一时刻的状态需要引导至更小的终端集合[27, 30]. 相应地, 文献 [32] 指出终端集合越小越会对性能函数造成不利影响. 为避免使用终端约束和耗散性条件, 文献 [31] 通过引入一致性约束, 利用切换控制思想和交替方向乘子法 (Alternating direction method of multipliers, ADMM), 提出一种基于 Lyapunov 函数的分布式 EMPC 策略. 该策略在保持闭环系统稳定性的同时, 优化整体性能并提高了系统在扰动下的鲁棒性和并行求解效率. 然而, 该策略需要在线求解三个最优控制问题, 增加了分布式 EMPC 运算的复杂性. 现有研究表明, 约束非线性系统通常不满足耗散性条件[33]. 因此, 针对分布式状态耦合非线性系统, 如何避免上述方法的不足, 并在优化性能的同时确保闭环系统的稳定性, 是耦合分布式 EMPC 研究的一个关键问题.

本文针对具有持续有界扰动的分布式状态耦合非线性系统, 提出一种具有递推可行性和稳定性保证的分布式 EMPC 策略. 首先, 计算每个子系统经济性能指标的最优平衡点, 并定义该平衡点的跟踪型目标函数. 然后, 利用该目标函数的最优值函数构造原始分布式 EMPC 优化问题的收缩约束, 以确保每个子系统的 EMPC 递推可行性和闭环系统关于最优经济平衡点相对于耦合状态和扰动的输入到状态稳定性 (Input-to-state stability, ISS). 最后, 通过四个受扰的状态耦合非线性连续搅拌釜反应器 (Continuous stirred tank reactors, CSTRs) 的仿真实例, 验证了本文提出策略的有效性. 与现有研究相比, 本文的主要创新点如下: 1) 针对分布式状态耦合非线性系统, 提出一种能够处理经济目标的同时确保闭环系统稳定性的分布式 EMPC 策略; 2) 在控制问题中, 能够同时处理状态耦合、约束耦合和性能指标耦合; 3) 利用收缩约束和不变集理论, 证明了算法的递推可行性与 ISS 结论, 此结论无需满足耗散性假设条件, 从而扩大了分布式 EMPC 的适用范围.

符号说明: 集合 $\mathbf{R}^n$ 、$\mathbf{R}_{\geq 0}$ 和 $\mathbf{I}_{\geq 0}$ 分别表示 n 维向量空间、非负实数集和非负整数集; $\mathbf{I}_{a:b}$ 表示集合 $\{i \in \mathbf{I}_{\geq 0} : a \leq i \leq b,\ a \in \mathbf{I}_{\geq 0},\ b \in \mathbf{I}_{\geq 0}\}$; $\boldsymbol{x}^+$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的下一时刻状态; $\boldsymbol{x}(k) = \varphi(k; \boldsymbol{x}(0),\ \boldsymbol{u})$ 为 $k \in \mathbf{I}_{\geq 0}$ 时刻的状态, 其中, $\boldsymbol{x}(0)$ 为系统在零时刻的状态, $\boldsymbol{u}$ 为控制序列. 给定一个向量 $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{s}$ 的转置; $\|\boldsymbol{s}\|$ 表示 $\boldsymbol{s}$ 的欧几里得范数; $\|\boldsymbol{s}\|_{P_i}$ 表示 $\boldsymbol{s}$ 的矩阵范数, 即 $\|\boldsymbol{s}\|_{P_i} = \sqrt{\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} P_i \boldsymbol{s}}$, P_i 为正定矩阵; $\lambda_{i,\max}(P_i)$ 和 $\lambda_{i,\min}(P_i)$ 分别为矩阵 P_i 的最大和最小特征值; $\mathrm{diag}\{\cdots\}$ 表示块对角矩阵或对角矩阵; $\boldsymbol{s}(k+i|k)$ 表示在 k 时刻对第 $k+i$ 时刻的预测变量. 对于集合 A 和 B, $A \oplus B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in A \subseteq \mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{y} \in B \subseteq \mathbf{R}^n\}$ 表示 Minkowski 和集; $A \ominus B = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in A \subseteq \mathbf{R}^n,\ \forall \boldsymbol{y} \in B \subseteq \mathbf{R}^n\}$ 表示 Pontryagin 差集; $B(r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : ||\boldsymbol{x}|| \leq r\}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 空间内半径为 r 的闭球形区域; $(f+g) \circ (\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$ 表示连续函数 $f(\boldsymbol{x})$ 与 $g(\boldsymbol{x})$ 相加的和函数. 若连续函数 $\delta_1(\cdot) : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 单调递增, 且 $\delta_1(0) = 0$, 称其为 K 类函数; 若函数 $\delta_1(\cdot) \in K$ 并且当 $s \to \infty$ 时, 有 $\delta_1(s) \to \infty$, 称其为 K_∞ 类函数; 给定 $t \geq 0$ 时, 函数 $\delta_3(s,\ t)$ 为 K 类函数, 对于给定 $s \geq 0$ 时, 函数 $\delta_3(s,\ t)$ 关于 t 单调递减且满足 $\lim_{t\to\infty} \delta_3(s,\ t) = 0$, 则称其为 KL 类函数.

1 问题描述与预备知识

考虑由 M 个子系统组成的非线性系统, 其中子系统之间通过状态耦合. 定义 $\mathcal{M}=\{1,\cdots,M\}$ 为所有子系统的集合. 第 $i\in\mathcal{M}$ 个子系统在 $k\in\mathbf{I}_{\geq 0}$ 时刻的离散状态耦合非线性系统描述为:

$$\boldsymbol{x}_i(k+1)=f_i(\boldsymbol{x}_i(k),\ \boldsymbol{u}_i(k))+\sum_{j\in\mathcal{N}_i}g_{ij}(\boldsymbol{x}_j(k))+\boldsymbol{v}_i(k) \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}_i(k)\in\mathbf{R}_i^{n_i}$、$\boldsymbol{u}_i(k)\in\mathbf{R}_i^{m_i}$ 和 $\boldsymbol{v}_i(k)\in\mathbf{R}_i^{n_i}$ 分别为子系统 i 的状态、输入和扰动变量; $f_i(\cdot,\cdot):\mathbf{R}^{n_i}\times\mathbf{R}^{m_i}\to\mathbf{R}^{n_i}$ 和 $g_{ij}(\cdot):\mathbf{R}_i^{m_i}\to\mathbf{R}_i^{n_i}$ 分别是关于 $(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{u}_i)$ 和 $\boldsymbol{x}_j$ 的连续函数, 并分别满足 $f_i(\mathbf{0},\ \mathbf{0})=\mathbf{0}$ 和 $g_{ij}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$; $\mathcal{N}_i:=\{j\in\mathcal{M}|g_{ij}(\cdot)\neq\mathbf{0},\ j\neq i\}$ 和 Ω_i 分别为子系统 i 的上游和下游邻居集合 (如图 1 所示). 子系统 i 的状态和控制输入分别满足约束 $\boldsymbol{x}_i(k)\in\mathcal{X}_i\subset\mathbf{R}_i^{n_i}$ 和 $\boldsymbol{u}_i(k)\in\mathcal{U}_i\subset\mathbf{R}_i^{m_i}$, 其中 $\mathcal{X}_i$ 和 $\mathcal{U}_i$ 为凸的紧集, 且平衡点 $(\boldsymbol{x}_i(s),\ \boldsymbol{u}_i(s))$ 为其内点.

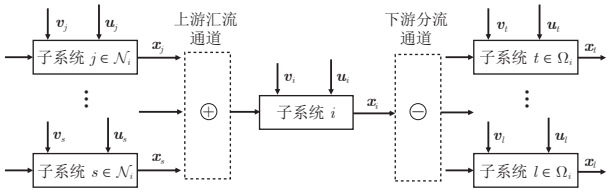

图 1 子系统 i 的上游和下游邻居集合示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the upstream and downstream neighbor sets of subsystem i

假设子系统 i 可以接收到上游邻居系统 $j\in\mathcal{N}_i$ 的信息, 并且自身状态完全可测. 此外, 子系统 i 的扰动输入 $\boldsymbol{v}_i(k)$ 和非线性函数 $f_i(\cdot,\cdot)$, $g_{ij}(\cdot)$ 满足:

假设 1. 扰动输入 $\boldsymbol{v}_i(k)$ 满足如下约束:

$$\boldsymbol{v}_i(k)\in\mathcal{V}_i\subset\mathbf{R}_i^{n_i},\ k\in\mathbf{I}_{\geq 0} \tag{2}$$

其中, 集合 $\mathcal{V}_i=\{\boldsymbol{v}_i\in\mathbf{R}_i^{n_i}:||\boldsymbol{v}_i||\leq\gamma_i,\ \gamma_i>0\}$ 为包含平衡点 $(\boldsymbol{x}_i(s),\ \boldsymbol{u}_i(s))$ 的凸紧集.

假设 2. 非线性函数 $f_i(\cdot,\cdot)$ 和 $g_{ij}(\cdot)$ 分别在 $\mathcal{X}_i\times\mathcal{U}_i$ 和 $\mathcal{X}_j$ 中满足 Lipschitz 条件, 即对于任意 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{X}_i$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{w}\in\mathcal{X}_j$ 和 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}_i$, 存在 Lipschitz 常数 L_{f_i}, L'_{f_i} 和 $L_{g_{ij}}$ 使得以下不等式成立:

$$\|f_i(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})-f_i(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{u})\|\leq L_{f_i}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \tag{3a}$$

$$\|f_i(\boldsymbol{x},\ K\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y},\ K\boldsymbol{y})\|\leq L'_{f_i}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \tag{3b}$$

$$\|g_{ij}(\boldsymbol{z})-g_{ij}(\boldsymbol{w})\|\leq L_{g_{ij}}\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{w}\| \tag{4}$$

通过结合局部子系统的动力学方程和局部约束, 对于 $k\in\mathbf{I}_{\geq 0}$, 全局系统的动态方程可以表述为:

$$\boldsymbol{x}(k+1)=f(\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k))+g(\boldsymbol{x}(k))+\boldsymbol{v}(k) \tag{5}$$

并且满足全局约束为:

$$\boldsymbol{x}(k)\in\mathcal{X},\quad \boldsymbol{u}(k)\in\mathcal{U},\quad k\in\mathbf{I}_{\geq 0} \tag{6}$$

其中, 全局状态 $\boldsymbol{x}(k)=[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k),\cdots,\boldsymbol{x}_M^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{X}\subseteq\mathbf{R}^n$, $\mathcal{X}=\mathcal{X}_1\times\cdots\times\mathcal{X}_M$, $n=\sum_{i\in\mathcal{M}}n_i$; 全局输入 $\boldsymbol{u}(k)=[\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}(k),\cdots,\boldsymbol{u}_M^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{U}\subseteq\mathbf{R}^m$, $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\times\cdots\times\mathcal{U}_M$, $m=\sum_{i\in\mathcal{M}}m_i$; 全局扰动 $\boldsymbol{v}(k)=[\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}(k),\cdots,\boldsymbol{v}_M^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{V}\subseteq\mathbf{R}^n$, $\mathcal{V}=\mathcal{V}_1\times\cdots\times\mathcal{V}_M$. 集合 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{U}$ 为内部包含平衡点 $(\boldsymbol{x}(s),\ \boldsymbol{u}(s))$ 的凸紧集, 其中, 稳态 $\boldsymbol{x}(s)=[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(s),\cdots,\boldsymbol{x}_M^{\mathrm{T}}(s)]^{\mathrm{T}}$ 和对应输入 $\boldsymbol{u}(s)=[\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}(s),\cdots,\boldsymbol{u}_M^{\mathrm{T}}(s)]^{\mathrm{T}}$. 全局函数 $f(\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k))=[f_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_1(k),\ \boldsymbol{u}_1(k)),\cdots,f_M^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_M(k),\ \boldsymbol{u}_M(k))]^{\mathrm{T}}$ 和 $g(\boldsymbol{x}(k))=[\sum_{j\in\mathcal{N}_i}g_{1j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_j(k)),\cdots,\sum_{j\in\mathcal{N}_M}g_{Mj}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_j(k))]^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{v}(k)=0$, 全局名义系统的动态方程为:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)=f(\hat{\boldsymbol{x}}(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}(k))+g(\hat{\boldsymbol{x}}(k)) \tag{7}$$

其中, 名义系统的全局状态和控制输入分别为 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)=[\hat{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}(k),\cdots,\hat{\boldsymbol{x}}_M^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}\in\hat{\mathcal{X}}\subseteq\mathbf{R}^n$, $\hat{\mathcal{X}}=\hat{\mathcal{X}}_1\times\cdots\times\hat{\mathcal{X}}_M$ 和 $\hat{\boldsymbol{u}}(k)=[\hat{\boldsymbol{u}}_1^{\mathrm{T}}(k),\cdots,\hat{\boldsymbol{u}}_M^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}\in\hat{\mathcal{U}}\subseteq\mathbf{R}^n$, $\hat{\mathcal{U}}=\hat{\mathcal{U}}_1\times\cdots\times\hat{\mathcal{U}}_M$, $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)$ 和 $\hat{\boldsymbol{u}}_i(k)$ 分别为非线性系统 (1) 关于 $\boldsymbol{v}_i(k)=0$ 的局部名义状态和控制输入, $\hat{\mathcal{X}}_i$ 和 $\hat{\mathcal{U}}_i$ 为 $\mathcal{X}_i$ 和 $\mathcal{U}_i$ 约束集合的紧缩集合.

考虑子系统 i 的经济性能函数 $Le_i(\cdot,\cdot):\hat{\mathcal{X}}_i\times\hat{\mathcal{U}}_i\to\mathbf{R}_i$, 该函数关于 $(\boldsymbol{x}_i(k),\ \boldsymbol{u}_i(k))$ 连续且有界, 并关于平衡点 $(\boldsymbol{x}_i(s),\ \boldsymbol{u}_i(s))$ 可能非正定. 基于式 (7) 离散计算如下最优经济平衡点:

$$(\boldsymbol{x}^*(s),\ \boldsymbol{u}^*(s))=\arg\min_{(\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{u}})}\sum_{i\in\mathcal{M}}Le_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i,\ \hat{\boldsymbol{u}}_i)$$
$$\text{s.t. }\hat{\boldsymbol{x}}=f(\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{u}})+g(\hat{\boldsymbol{x}}),\ \hat{\boldsymbol{x}}\in\hat{\mathcal{X}},\ \hat{\boldsymbol{u}}\in\hat{\mathcal{U}} \tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{x}^*(s)=[\boldsymbol{x}_1^{*\mathrm{T}}(s),\cdots,\boldsymbol{x}_M^{*\mathrm{T}}(s)]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{u}^*(s)=[\boldsymbol{u}_1^{*\mathrm{T}}(s),\cdots,\boldsymbol{u}_M^{*\mathrm{T}}(s)]^{\mathrm{T}}$. 不失一般性, 下面假设子系统 i 的最优经济平衡点为原点. 接下来, 介绍 ISS 和鲁棒不变集的相关概念.

定义 1[34]**.** 考虑系统 $\boldsymbol{x}^+=f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})$ 和集合 $\Theta\subseteq\mathbf{R}^n$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbf{R}^n$, 如果任意 $\boldsymbol{x}\in\Theta$ 和 $\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}$, 该系统满足 $\boldsymbol{x}^+=f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})\in\Theta$, 则称 Θ 为该系统的一个鲁棒不变集.

定义 2[34]**.** 考虑系统 $\boldsymbol{x}^+=f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})$ 和包含原点的鲁棒不变集 $\Theta\subseteq\mathcal{X}$, 如果对于任意初始状态 $\boldsymbol{x}(0)\in\Theta$ 及 $\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}$, 存在一个 KL 类函数 $\beta(\cdot)$ 和 K 类函数 $\gamma_v(\cdot)$ 使系统满足:

$$|\varphi(k;\boldsymbol{x}(0),\ \boldsymbol{v})|\leq\beta(|\boldsymbol{x}(0)|,\ k)+\gamma_v(||\boldsymbol{v}||) \tag{9}$$

其中, $k\in\mathbf{I}_{\geq 0}$, 则该系统在 Θ 内是 ISS.

引理 1[34]**.** 考虑系统 $\boldsymbol{x}^+ = f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})$ 和包含原点的鲁棒不变集 $\Theta \subseteq \mathcal{X}$. 如果对于任意 $\boldsymbol{x} \in \Theta$ 及 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, 存在连续函数 $V(\cdot): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 满足:

$$\delta_1(||\boldsymbol{x}||) \leq V(\boldsymbol{x}) \leq \delta_2(||\boldsymbol{x}||) + \sigma_1(||\boldsymbol{v}||) \tag{10}$$

$$V(\boldsymbol{x}^+) - V(\boldsymbol{x}) \leq -\delta_3(||\boldsymbol{x}||) + \sigma_2(||\boldsymbol{v}||) \tag{11}$$

其中, $\delta_1(\cdot)$, $\delta_2(\cdot)$ 和 $\delta_3(\cdot)$ 为 K_∞ 类函数; $\sigma_1(\cdot)$ 和 $\sigma_2(\cdot)$ 为 K 类函数, 则该系统在 Θ 内 ISS, 并称函数 $V(\cdot)$ 为该系统的 ISS-Lyapunov 函数.

本文目标是针对受扰的分布式状态耦合非线性系统, 通过极小化经济性能函数在线计算分布式 EMPC 控制器, 要求相应的闭环系统满足状态和控制约束, 且闭环系统的最优经济平衡点相对于耦合状态和扰动具有 ISS.

2　多耦合分布式模型预测控制

在耦合分布式 EMPC 框架下, 每个子系统的状态方程会受到相邻系统状态的影响, 但是在每个时刻上游邻居的真实信息并不能同时传送给当前子系统. 为了考虑耦合影响, 在任意时刻 $k \in \mathbf{I}_{\geq 0}$, 每个子系统 i 利用上游邻居系统 j 的假设状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)$, 并将自身信息传送给下游邻居系统, 让下游邻居系统构造假设状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)$.

令 N 为预测时域, 定义 k 时刻的 N 步预测控制序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i(k) = \{\hat{\boldsymbol{u}}_i(k|k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k+1|k),\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k+N-1|k)\}$ 和对应的状态序列 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k) = \{\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1|k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_i(k+2|k),\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k)\}$. 进一步, 考虑系统的一个可行预测控制序列及其对应的预测状态序列, 定义如下经济目标函数:

$$J_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k)) = \sum_{t=0}^{N-1} Le_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k+t|k)) \tag{12}$$

为了计算分布式 EMPC 的控制律, 通过求解如下有限时域最优经济控制问题:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k) = \arg\min_{\hat{\boldsymbol{u}}_i(k)} J_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k))$$

$$\text{s.t. } \hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t+1|k) = f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k+t|k)) + \sum_{j\in\mathcal{N}_i} g_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k)),\ t \in \mathbf{I}_{0:N-1} \tag{13a}$$

$$||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k+t|k)|| \leq \delta_i,\ t \in \mathbf{I}_{0:N} \tag{13b}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) \in \hat{\mathcal{X}}_i,\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k+t|k) \in \hat{\mathcal{U}}_i,\ t \in \mathbf{I}_{0:N-1} \tag{13c}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i(k|k) = \boldsymbol{x}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k) \in X_{i,\,T} \tag{13d}$$

$$V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)) \leq \eta_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \alpha_i) \tag{13e}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k) = \{\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k|k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k+1|k),\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k+N-1|k)\}$ 为经济控制问题 (13) 的最优解; $\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k) = \{\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+1|k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+2|k),\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+N|k)\}$为对应的最优状态序列; $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k) = \{\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k|k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+1|k),\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+N-1|k)\}$ 为上游邻居 j 对应的状态序列, 并且 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k) = \hat{\boldsymbol{x}}_j^*(k+t|k-1)$, $t \in \mathbf{I}_{0:N-2}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+N-1|k) = \hat{\boldsymbol{x}}_j^*(s)$; 式 (13b) 为预测状态与假设状态之间的偏差约束, 并且定义偏差为 $\boldsymbol{e}_i(k+t|k) := \hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k+t|k)$, $t \in \mathbf{I}_{0:N-1}$; 式 (13c) 为状态和控制约束, 集合 $\hat{\mathcal{X}}_i := \mathcal{X}_i \ominus B_i(t)$, 收缩集 $B_i(t)$ 定义为:

$$B_i(t) := \left\{\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^{n_i} : \|\boldsymbol{x}_i\| \leq \frac{L_{f_i}^t - 1}{L_{f_i} - 1}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} L_{g_{ij}}\delta_j + L_{f_i}^t\gamma_i\right\} \tag{14}$$

其中, δ_j 为子系统 j 的经济控制问题中约束 (13b) 的上界. 式 (13d) 中 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k|k) = \boldsymbol{x}_i(k)$ 为初始条件, $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k) \in X_{i,\,T}$ 为终端约束条件, 终端集合定义为 $X_{i,\,T} := \{\hat{\boldsymbol{x}}_i(k) : \|\hat{\boldsymbol{x}}_i(k) - \boldsymbol{x}_i^*(s)\|_{P_i} \leq \varepsilon_i,\ \varepsilon_i > 0\}$ 且 $\boldsymbol{x}_i(s) \in X_{i,\,T} \subset \hat{\mathcal{X}}_i$. 式 (13e) 为保证稳定性的收缩约束, $\eta_i(\cdot,\cdot): \mathcal{X}_i \times \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 为收缩函数, 参数 $\alpha_i \geq 0$, $V_i(\cdot)$ 为关于最优经济平衡点的稳定性目标函数, 且定义如下:

$$V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)) = E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k)) + \sum_{t=0}^{N-1}[l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k+t|k)) + \sum_{j\in\mathcal{N}_i} l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k))] \tag{15}$$

其中, 性能函数为 $l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i,\ \hat{\boldsymbol{u}}_i) = \|\hat{\boldsymbol{x}}_i\|_{Q_i}^2 + \|\hat{\boldsymbol{u}}_i\|_{R_i}^2$; 耦合性能函数为 $l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i,\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}) = \|\hat{\boldsymbol{x}}_i - \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}\|_{Q_{ij}}^2$; 终端惩罚函数为 $E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) = \|\hat{\boldsymbol{x}}_i\|_{P_i}^2$; Q_i, R_i, Q_{ij} 和 P_i 为正定矩阵. 此外, 矩阵 P_i 满足 Lyapunov 方程: $A_{si}^{\mathrm{T}}P_iA_{si} - P_i = -(Q_i^* + \Delta Q_i)$, $Q_i^* = Q_i + K_i^{\mathrm{T}}R_iK_i$, ΔQ_i 是一个正定矩阵.

注 1. 约束 (13b) 中的偏差 $\boldsymbol{e}_i(k)$ 为预测误差, 而该预测误差是由外部扰动所导致, 并且 (13b) 意味着子系统 i 的预测状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k)$ 不会偏离 $\hat{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k+t|k)$ 太远. 通过建立这个约束, 可以将下面构造的可行状态与最优预测状态建立联系, 有利于分析经济控制问题 (13) 的可行性. 式 (14) 中 $B_i(t)$ 是为了保证在外部扰动和耦合影响都存在时, $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k) \in \hat{\mathcal{X}}_i$,

$\forall k \in \mathbf{I}_{\geq 0}$ 仍然满足. 值得注意的是, $B_i(t)$ 利用了 Tube 的思想, 通过定义一个逐步收缩集合 $\hat{\mathcal{X}}_i := \mathcal{X}_i \ominus B_i(t)$, 确保系统状态向目标集合收敛.

注 2. 因为 $l_{i,\,a}(\cdot,\cdot)$, $l_{ij}(\cdot,\cdot)$ 和 $E_i(\cdot)$ 为凸函数, $\hat{\mathcal{X}}_i$, $\hat{\mathcal{X}}_j$, $\hat{\mathcal{X}}_{i,\,T}$ 和 $\hat{\mathcal{U}}_i$ 为凸紧集, 故对于任意 $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}} \in \hat{\mathcal{X}}_i$, $\hat{\boldsymbol{z}}$, $\hat{\boldsymbol{w}} \in \hat{\mathcal{X}}_j$, $\hat{\boldsymbol{s}}$, $\hat{\boldsymbol{t}} \in \hat{\mathcal{X}}_{i,\,T}$ 和 $\hat{\boldsymbol{u}} \in \hat{\mathcal{U}}_i$, 存在 Lipschitz 常数 L_{li}, L_{lx}, L_{ly} 和 L_{E_i}, 满足如下不等式:

$$\|L_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{u}}) - L_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{y}},\ \hat{\boldsymbol{u}})\| \leq L_{li}\|\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}\| \tag{16}$$

$$\|L_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{z}}) - L_{ij}(\hat{\boldsymbol{y}},\ \hat{\boldsymbol{z}})\| \leq L_{lx}\|\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}}\| \tag{17}$$

$$\|L_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{z}}) - L_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{w}})\| \leq L_{ly}\|\hat{\boldsymbol{z}} - \hat{\boldsymbol{w}}\| \tag{18}$$

$$\|E_i(\hat{\boldsymbol{s}}) - E_i(\hat{\boldsymbol{t}})\| \leq L_{E_i}\|\hat{\boldsymbol{s}} - \hat{\boldsymbol{t}}\| \tag{19}$$

为构造收缩函数 $\eta_i(\cdot,\cdot)$, 定义辅助优化问题:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k) = \arg\min_{\hat{\boldsymbol{u}}_i(k)}\{V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k))| \ (13\text{b}) \sim (13\text{d})\} \tag{20}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k) = \{\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k|k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k+1|k),\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k+N-1|k)\}$ 为辅助优化问题 (20) 的最优解. 则函数 $\eta_i(\cdot,\cdot)$ 定义为:

$$\eta_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \alpha_i) = V_i^o(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) + \alpha_i[V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k-1)) - V_i^o(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) + \varphi_i(\boldsymbol{e}_i(k)) + l_j(||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)] \tag{21}$$

其中, 函数 $V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k)) := V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))$; $V_i^o(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) := V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)\ ,\ \hat{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k))$; $\varphi_i(\boldsymbol{e}_i(k)) := 2\sum_{t=0}^{N-1}\tilde{L}_i||\boldsymbol{e}_i(k+t|k)||$ 和 $(\lambda_{i,\,\max}(P_i)+2)\times||\Gamma_i L_{g_{ij}}\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||^2 := l_j(\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k))$, 常数 $\tilde{L}_i = \max\{L_{li},\ \Gamma_i L_{lx},\ L_{E_i}\}$ 和 $\Gamma_i = \max_{i\in\mathcal{M}} Card\{\mathcal{N}_i\}$.

如果经济控制问题 (13) 在 k 时刻是可行的, 则根据滚动时域控制原理, 将 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k)$ 的第一个分量 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k|k)$ 定义为 k 时刻分布式 EMPC 控制律, 即 $\boldsymbol{u}_i(k) = \hat{\boldsymbol{u}}_i^{empc}(k) := \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k|k)$. 非线性系统 (1) 的闭环系统为:

$$\boldsymbol{x}_i(k+1) = f_i(\boldsymbol{x}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^{empc}(k)) + \sum_{j\in\mathcal{N}_i} g_{ij}(\boldsymbol{x}_j(k)) + \boldsymbol{v}_i(k) \tag{22}$$

下面给出多耦合分布式 EMPC 控制律的算法:

算法 1. 多耦合分布式 EMPC 算法

1) 设置参数 N, $\alpha_i \in [0,\ 1)$, 矩阵 Q_i, R_i, Q_{ij}, P_i, 函数 $Le_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i,\ \hat{\boldsymbol{u}}_i)$ 和 $(\boldsymbol{x}_j^*(s),\ \boldsymbol{u}_j^*(s))$;
2) 构造上游邻居系统 $j \in \mathcal{N}_i$ 的假设状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(0) = \{\hat{\boldsymbol{x}}_j^*(s),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^*(s),\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^*(s)\}$;
3) 考虑初始状态 $\boldsymbol{x}_i(0)$, 令 $\eta_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(0),\ \alpha_i)$ 充分大并且 $k=0$;
4) 求解经济控制问题 (13), 得最优控制序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k)$;
5) 将状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k)$ 发送给下游邻居系统, 并接收上游邻居系统状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^*(k)$ 构造 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)$;
6) 将 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k)$ 的首个分量作用于非线性系统 (1); 令 $k = k+1$;
7) 测量 k 时刻状态 $\boldsymbol{x}_i(k)$, 求解辅助优化问题 (20) 得最优控制序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$;
8) 将 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$ 代入式 (21) 更新 $\eta_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \alpha_i)$, 并返回步骤 4).

3 可行性与稳定性

定义 3. 对于任意子系统 $i \in \mathcal{M}$, 考虑初始状态 $\boldsymbol{x}_i \in \hat{\mathcal{X}}_i$ 及边界条件 $\boldsymbol{x}_i(k|k) = \boldsymbol{x}_i(k)$, 如果非线性系统 (1) 存在可行预测控制序列 $\boldsymbol{u}_i(k)$, 则 $\boldsymbol{x}_i$ 称为系统 i 的可行初始状态. 并且全体可行初始状态组成的集合 $\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N}$ 称为非线性系统 (1) 的可行初始集.

显然, 初始集 $\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N}$ 满足 $X_{i,\,T} \subseteq \hat{\mathcal{X}}_{i,\,N} \subseteq \hat{\mathcal{X}}_i$, 且 $\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N} \subseteq \hat{\mathcal{X}}_{i,\,N+1}$.

为了使得系统能在原点附近稳定, 需要在终端集合 $X_{i,\,T}$ 内使用局部控制器, 其设计依赖于名义系统 (1) 的线性化. 为此, 给出名义系统 (1) 在原点附近的线性化动态方程为:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1) = A_{ii}\hat{\boldsymbol{x}}_i(k) + B_i\hat{\boldsymbol{u}}_i(k) + \sum_{j\in\mathcal{N}_i} A_{ij}\hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{23}$$

其中, $A_{ii} = \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{x}_i(0,\,0)}$; $B_i = \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{u}_i(0,\,0)}$ 和 $A_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}_j(0)}$, $j \in \mathcal{N}_i$.

假设 3. 对于每一个线性化的非线性系统 (1), 存在一个反馈控制器 $\hat{\boldsymbol{u}}_i(k) = K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)$ 使得 $A_{si} = A_{ii} + B_iK_i$ 是舒尔稳定.

为了得到 $X_{i,\,T}$ 内相关性质, 定义 $\psi_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) := f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) - A_{si}\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)$, 并有如下范数:

$$\sup\left\{\frac{||\psi_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))||}{||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)||}|\hat{\boldsymbol{x}}_i(k) \in X_{i,\,T},\ \hat{\boldsymbol{x}}_i(k) \neq 0\right\} := L_{i,\,\psi} \tag{24}$$

引理 2. 若假设 1 ~ 3 成立, 任意子系统 $i \in \mathcal{M}$ 的终端域 $X_{i,\,T}$ 内, $\forall\hat{\boldsymbol{x}}_i(k) \in X_{i,\,T}$, 上游邻居子系统 j 的假设状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k) \in \hat{\mathcal{X}}_j$ 满足如下不等式:

$$||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k) - \boldsymbol{x}_j^*(s)|| \leq \frac{(\sqrt{\lambda_{i,\,\min}(P_i)} - \sqrt{\lambda_{i,\,\max}(P_i)}L'_{f_i})\varepsilon_i}{L_{g_{ij}}\sqrt{\lambda_{i,\,\min}(P_i)\lambda_{i,\,\max}(P_i)}\Gamma_i^2} \tag{25}$$

$$\lambda_{i,\,\min}(\Delta Q_i) \geq ||P_i||L_{i,\,\psi}^2 + 2||P_iA_{si}||L_{i,\,\psi} + (L_{i,\,\psi}||P_i||)^2 + ||P_iA_{si}||^2 \tag{26}$$

那么, $X_{i,\,T}$ 是关于控制律 $K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)\in\hat{\mathcal{U}}_i$ 所对应闭环系统 (22) 的鲁棒不变集, 并且以下不等式成立:

$$E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1))-E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\leq l_j(||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)-l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) \tag{27}$$

证明. 在终端域 $X_{i,\,T}$ 内, 对于任意 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)\in X_{i,\,T}$ 和控制律 $K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)\in\hat{\mathcal{U}}_i$, 下一时刻对应的闭环系统为 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)=f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))+\sum_{j\in\mathcal{N}_i}g_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k))$. 相应地, 由式 (8) 可知, 子系统 i 的最优状态满足 $\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(s)=f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(s),\ K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(s))+\sum_{j\in\mathcal{N}_i}g_{ij}(\boldsymbol{x}_j^*(s))$, 并且 $K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(s)\in\hat{\mathcal{U}}_i$. 由假设 2 可知, 存在 Lipschitz 常数 L'_{f_i} 和 $L_{g_{ij}}$ 使得下式成立:

$$||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)-\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(s)||\leq L'_{f_i}||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)-\boldsymbol{x}_i^*(s)||+\sum_{j\in\mathcal{N}_i}L_{g_{ij}}||\boldsymbol{x}_j^{ref}(k)-\boldsymbol{x}_j^*(s)|| \tag{28}$$

通过应用正定函数的性质, 终端惩罚函数 $E_i(\cdot)$ 可得:

$$(\lambda_{i,\,\min}(P_i))^{\frac{1}{2}}||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)-\boldsymbol{x}_i^*(s)||\leq (E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)-\boldsymbol{x}_i^*(s)))^{\frac{1}{2}}\leq (\lambda_{i,\,\max}(P_i))^{\frac{1}{2}}||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)-\boldsymbol{x}_i^*(s)|| \tag{29}$$

联立式 (28) 和 (29), 可得:

$$\Big(\frac{L'_{f_i}\varepsilon_i}{\sqrt{\lambda_{i,\,\min}(P_i)}}+\sum_{j\in\mathcal{N}_i}L_{g_{ij}}||\boldsymbol{x}_j^{ref}(k)-\boldsymbol{x}_j^*(s)||\Big)\times(\lambda_{i,\,\min}(P_i))^{\frac{1}{2}}\geq(E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)-\boldsymbol{x}_i^*(s)))^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

将式 (25) 代入式 (30), 可得 $||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)-\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(s)||_{P_i}\leq\varepsilon_i$. 这意味着, 对于任意 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)\in X_{i,\,T}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)\in\hat{\mathcal{X}}_j$, 通过控制律 $K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)\in\hat{\mathcal{U}}_i$ 使得 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)$ 不会离开 $X_{i,\,T}$. 因此, 对于满足式 (25) 中的上游邻居系统假设状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)\in\hat{\mathcal{X}}_j$, 集合 $X_{i,\,T}$ 是关于控制律 $K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)$ 对应闭环系统 (22) 的一个鲁棒不变集.

为了得到式 (27), 函数 $E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ 沿着 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)=f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))+\sum_{j\in\mathcal{N}_i}g_{ij}(\boldsymbol{x}_j^{ref}(k))$ 做差分运算, 并利用式 (4) 和平方和不等式, 可得:

$$\begin{aligned}&E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1))-E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\leq\\&||P_i||L_{i,\,\psi}^2||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)||^2+2||P_iA_{si}||L_{i,\,\psi}||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)||^2+\\&(L_{i,\,\psi}\Gamma_i||P_i||\times||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)||)^2+(\Gamma_iL_{g_{ij}}||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)^2+\\&(\Gamma_i||P_iA_{si}||\times||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)||)^2+(\Gamma_iL_{g_{ij}}||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)^2-\\&\hat{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}(k)Q_i^*\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)-\hat{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}(k)\lambda_{i,\,\min}(\Delta Q_i)\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)+\\&\lambda_{i,\,\max}(P_i)(\Gamma_iL_{g_{ij}}||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)^2\end{aligned} \tag{31}$$

利用式 (26), 式 (31) 可变为:

$$E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1))-E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\leq l_j(\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k))-l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) \tag{32}$$

即式 (27) 成立. □

鲁棒不变集合 $X_{i,\,T}$ 和式 (27) 在分析经济控制问题 (13) 的递归可行性和闭环系统稳定性方面起到了关键作用. 为了得到一个低保守的集合 $X_{i,\,T}$, 接下来介绍两种计算方法.

方法 1. 由引理 1 可知, 式 (25) 和 (26) 决定了集合 $X_{i,\,T}$ 的鲁棒不变性和式 (27) 成立. 考虑式 $||P_i||L_{i,\,\psi}^2+2||P_iA_{si}||L_{i,\,\psi}+(L_{i,\,\psi}||P_i||)^2+||P_iA_{si}||^2-\lambda_{i,\,\min}(\Delta Q_i)=0$ 的正解为:

$$\{((||P_i||+||P_i||^2)(\lambda_{i,\,\min}(\Delta Q_i)-||P_iA_{si}||^2)+||P_iA_{si}||^2)^{\frac{1}{2}}-||P_iA_{si}||^2\}(||P_i||+||P_i||^2)=L_{i,\,\psi}^* \tag{33}$$

为了确定集合 $X_{i,\,T}$, 选择一个足够大的参数 ε_i, 使得满足 $L_{i,\,\psi}\leq L_{i,\,\psi}^*$. 这可通过选择不同参数 ε_i, 在终端集合 $X_{i,\,T}$ 内, 求解以下最大化问题:

$$\begin{aligned}&L_{i,\,\psi}=\arg\max_{\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)}\frac{||\psi_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))||}{||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)||}\\&\text{s.t. }(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)-\boldsymbol{x}_i^*(s))^{\mathrm{T}}P_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)-\boldsymbol{x}_i^*(s))\leq\varepsilon_i^2\end{aligned} \tag{34}$$

求得最大的参数 ε_i, 使得 $L_{i,\,\psi}\leq L_{i,\,\psi}^*$ 成立.

方法 2. 为了保证式 (27) 成立, 式 (31) 中 $\Psi_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)):=\psi_i^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))P_i\psi_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))+2\psi_i^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\times P_iA_{si}\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)+\Gamma_iL_{i,\,\psi}\hat{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}(k)P_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)+\Gamma_i\hat{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}(k)P_iA_{si}\times\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)-\hat{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}(k)\lambda_{i,\,\min}(\Delta Q_i)\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)\leq 0$ 需满足. 因此, 选择 ε_i 使得以下优化问题的最优值是负值即可.

$$\begin{aligned}&M_i(\varepsilon_i)=\max_{\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)}\Psi_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\\&\text{s.t. }0<(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)-\boldsymbol{x}_i^*(s))^{\mathrm{T}}P_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)-\boldsymbol{x}_i^*(s))\leq\varepsilon_i^2\end{aligned} \tag{35}$$

为了获得一个大的集合 $X_{i,\,T}$, 可以一直增加 ε_i, 只要保证 $M_i(\varepsilon_i)$ 是负值即可.

注 3. 引理 2 的 $X_{i,\,T}$ 性质是基于闭环系统 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)=f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))+\sum_{j\in\mathcal{N}_i}g_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k))$ 所得. 当子系统 i 只考虑自身状态影响时, 存在辅助集合 $\Omega_i:=\{\hat{\boldsymbol{x}}_i:||\hat{\boldsymbol{x}}_i-\boldsymbol{x}_i^*(s)||_{P_i}\leq c_i\varepsilon_i,\ 0<c_i<1\}$, 使得对于任意子系统 $i\in\mathcal{M}$, 有 $f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\in\Omega_i,\ \forall\hat{\boldsymbol{x}}_i\in X_{i,\,T}$.

接下来, 证明经济控制问题 (13) 的递推可行性和闭环系统的稳定性.

定理 1. 在假设 1 ~ 3 条件下, 对于任意子系统 $i\in\mathcal{M}$, 给定 $\alpha_i\geq 0$, 若下述条件成立:

$$\frac{L_{f_i}^t-1}{L_{f_i}-1}\sum_{j\in\mathcal{N}_i}L_{g_{ij}}\delta_j+L_{f_i}^t\gamma_i\leq\delta_i,\ t\in\mathbf{I}_{0:N} \tag{36}$$

$$\delta_i \le \frac{1-c_i}{(\lambda_{i,\max}(P_i)^{\frac{1}{2}})\varepsilon_i} \tag{37}$$

$$\frac{\varepsilon_i L_{lx}}{\sqrt{\lambda_{i,\min}(P_i)}} + \frac{\varepsilon_j L_{ly}}{\sqrt{\lambda_{j,\min}(P_j)}} + NL_{ly}\delta_j \le L_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)),\ \forall \hat{\boldsymbol{x}}_i(k) \in \hat{\mathcal{X}}_i,\ \forall \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k) \in \hat{\mathcal{X}}_j \tag{38}$$

其中, $k \in \mathbf{I}_{\ge 0}$. 那么经济控制问题 (13) 在集合 $\hat{\mathcal{X}}_{i,N}$ 内具有递推可行性, 进而 $\hat{\mathcal{X}}_{i,N}$ 是闭环系统 (22) 的一个鲁棒不变集.

证明. 为了证明经济控制问题 (13) 在 $\hat{\mathcal{X}}_{i,N}$ 内具有递推可行性, 即需证明经济控制问题 (13) 在 $k-1$ 时刻成立时, k 时刻也成立. 考虑子系统 i 在 $k-1$ 时刻的状态 $\boldsymbol{x}_i(k-1)$ 及经济控制问题 (13) 的最优解 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k)$. 构造 k 时刻的 N 步候补输入序列和相对应的状态序列:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_i(k) = \{\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k|k-1),\ \cdots,\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k+N-1|k-1),\ K_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k))\} \tag{39}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k) = \{\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+1|k),\ \cdots,\ \tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+N-1|k),\ \tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k)\} \tag{40}$$

为了更清晰的表述, 将证明分为以下几个部分证明.

1) $||\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k+t|k)|| \le \delta_i,\ t \in \mathbf{I}_{0:N}$: 因子系统 i 接收到上游邻居系统 j 假设状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k) = \hat{\boldsymbol{x}}_j^*(k+t|k-1)$, 并在 $k-1$ 时刻子系统 j 的经济控制问题 (13) 中约束 $||\hat{\boldsymbol{x}}_j^*(k+t|k-1) - \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k-1)|| \le \delta_j,\ t \in \mathbf{I}_{0:N}$ 成立, 则在 $k-1$ 与 k 时刻状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k-1)$ 与可行状态 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k)$ 误差为:

$$\begin{aligned}
&||\boldsymbol{x}_i(k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k|k-1)|| \le \\
&\quad \sum_{j\in\mathcal{N}_i} L_{g_{ij}} ||\boldsymbol{x}_j^*(k-1) - \boldsymbol{x}_j^{ref}(k-1|k-1)|| + \\
&\quad ||\boldsymbol{v}_i(k-1)|| \le \sum_{j\in\mathcal{N}_i} L_{g_{ij}}\delta_j + \gamma_i \\
&||\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+1|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+1|k-1)|| \le \\
&\quad \sum_{j\in\mathcal{N}_i} L_{g_{ij}}\delta_j + L_{f_i}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} L_{g_{ij}}\delta_j + L_{f_i}\gamma_i \\
&\qquad \vdots \\
&||\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k-1)|| \le \\
&\quad \frac{L_{f_i}^t - 1}{L_{f_i} - 1}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} L_{g_{ij}}\delta_j + L_{f_i}^t\gamma_i
\end{aligned} \tag{41}$$

考虑式 (36), 则 $||\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k+t|k)|| \le \delta_i,\ t \in \mathbf{I}_{0:N}$ 成立.

2) $\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) \in \mathcal{X}_i \ominus B_i(t),\ \forall t \in \mathbf{I}_{1:N-1}$: 由式 (41) 可得:

$$||\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k)|| \le ||\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k-1)|| + L_{f_i}^t\gamma_i + \frac{L_{f_i}^t - 1}{L_{f_i} - 1}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} L_{g_{ij}}\delta_j \tag{42}$$

因为 $\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k-1) \in \mathcal{X}_i \ominus B_i(t+1)$, 结合 $B_i(t)$ 的定义, 可得:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) \in \mathcal{X}_i \ominus B_i(t+1) \oplus (L_{f_i}^t\gamma_i + \frac{L_{f_i}^t - 1}{L_{f_i} - 1}\sum_{j\in\mathcal{N}_i} L_{g_{ij}}\delta_j) \subset \mathcal{X}_i \ominus B_i(t) \tag{43}$$

3) $\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k) \in X_{i,T}$: 由式 (41) 可知, 对于任意 $t \in \mathbf{I}_{0:N}$, 约束 (13b) 成立. 故存在假设状态 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k+N|k) \in \Omega_i$, 使得下式成立:

$$\begin{aligned}
&||\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k) - \boldsymbol{x}_i^*(s)||_{P_i} \le \\
&\quad ||\hat{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k+N|k) - \boldsymbol{x}_i^*(s)||_{P_i} + \\
&\quad ||\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^{ref}(k+N|k)||_{P_i} \le \\
&\quad (\lambda_{i,\max}(P_i))^{\frac{1}{2}}\delta_i + c_i\varepsilon_i
\end{aligned} \tag{44}$$

将式 (37) 代入式 (44), 可得 $||\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k) - \boldsymbol{x}_i^*(s)||_{P_i} \le \varepsilon_i$, 即终端约束满足.

4) $\tilde{\boldsymbol{u}}_i(k+t|k) \in \hat{\mathcal{U}}_i$: 从控制输入构造式 (39) 可知, 当 $t \in \mathbf{I}_{1:N-1}$ 时, $\boldsymbol{u}_i^*(k-1+t|k-1) \in \hat{\mathcal{U}}_i$. 当 $t = N$ 时, 因为 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k) \in X_{i,T}$, 则在终端集合 $X_{i,T}$ 内存在局部控制律 $K_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k) \in \hat{\mathcal{U}}_i$. 因此, 控制输入约束满足.

结合 1) ~ 4), 控制序列 (39) 满足约束 (13b) ~ (13d), 从而辅助优化问题 (20) 在 k 时刻存在可行解, 即辅助优化问题 (20) 在 $\hat{\mathcal{X}}_i$ 内具有递推可行性, 所以辅助优化问题 (20) 在 k 时刻存在最优解, 并设为 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$, 则 $V_i^o(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) \le V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \tilde{\boldsymbol{u}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k))$.

5) $V_i^o(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) \le \eta_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \alpha_i)$: 因为辅助优化问题 (20) 的最优解 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$ 满足约束 (13b) ~ (13d), 需进一步证明最优解 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$ 满足式 (13e). 将序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$ 代入式 (15) 并与收缩函数 (21) 做差分运算, 可得:

$$\begin{aligned}
&V_i^o(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) - \eta_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \alpha_i) \le \\
&\quad \alpha_i[V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \tilde{\boldsymbol{u}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)) - V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) - \\
&\quad \varphi_{i,e}(\boldsymbol{e}_i(k)) - l_j(\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k))]
\end{aligned} \tag{45}$$

其中, 式 (45) 中第一部分函数差为:

$$
\begin{aligned}
&V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \tilde{\boldsymbol{u}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)) - V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k-1)) = \\
&\quad \sum_{t=0}^{N-2} (l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k),\ \tilde{\boldsymbol{u}}_i(k+t|k)) - \\
&\quad l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k-1),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k+t|k-1))) + \\
&\quad \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{j\in\mathcal{N}_i} \Big[l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k)) - \\
&\quad l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k-1),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k-1)) \Big] - \\
&\quad l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k-1|k-1),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k-1|k-1)) - \\
&\quad \sum_{j\in\mathcal{N}_i} l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k-1|k-1),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k-1|k-1)) + \\
&\quad l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(\tau|k),\ K_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_i(\tau|k))) + \\
&\quad \sum_{j\in\mathcal{N}_i} l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(\tau|k-1),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(\tau|k-1)) + \\
&\quad E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k)) - E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(\tau|k-1)) \qquad (46)
\end{aligned}
$$

其中, $\tau = k+N-1$. 因为 $\tilde{\boldsymbol{u}}_i(k+t-1|k) = \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k+t-1|k-1)$, $t\in\mathbf{I}_{1:N-1}$, 利用式 (16), 阶段成本函数 $l_{i,\,a}(\cdot,\cdot)$ 的差值可为:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{N-2} (l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k),\ \tilde{\boldsymbol{u}}_i(k+t|k)) - \\
&\quad l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_{ii}^*(k+t|k-1),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k+t|k-1))) \le \\
&\quad L_{li} \sum_{t=0}^{N-2} ||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k-1)|| \qquad (47)
\end{aligned}
$$

相似地, 耦合函数 $l_{ij}(\cdot,\cdot)$ 的差值为:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{N-1} \sum_{j\in\mathcal{N}_i} [l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k)) - \\
&\quad l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k-1),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k-1))] \le \\
&\quad \sum_{j\in\mathcal{N}_i} \Big[\sum_{t=0}^{N-1} L_{lx} ||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+t|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k-1)|| + \\
&\quad L_{ly} ||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k-1)|| \Big] \qquad (48)
\end{aligned}
$$

利用引理 2 中式 (27), 函数 $E_i(\cdot)$ 的差值为:

$$
\begin{aligned}
&E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+N|k)) - E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(\tau|k-1)) \le \\
&\quad L_{E_i} ||\hat{\boldsymbol{x}}_i(\tau|k) - \hat{\boldsymbol{x}}_i^*(\tau|k-1)|| - \\
&\quad l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(\tau|k),\ K_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i(\tau|k)) + l_j(\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)) \qquad (49)
\end{aligned}
$$

因为状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(l|k-1)\in X_{i,\,T}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_j(l|k-1)\in X_{j,\,T}$, 并且 $X_{i,\,T}$ 和 $X_{j,\,T} := \{\hat{\boldsymbol{x}}_j(k) : \|\hat{\boldsymbol{x}}_j(k) - \boldsymbol{x}_j^*(s)\|_{P_i} \le \varepsilon_j,\ \varepsilon_j > 0\}$ 为鲁棒不变集, 则

$$
\begin{aligned}
&l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(\tau|k-1),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(\tau|k-1)) \le \\
&\quad \frac{\varepsilon_i L_{lx}}{(\lambda_{i,\,\min}(P_i))^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varepsilon_j L_{ly}}{(\lambda_{j,\,\min}(P_j))^{\frac{1}{2}}} \qquad (50)
\end{aligned}
$$

将式 (47) ~ (50) 代入式 (46), 并且利用式 (38), 整理可得:

$$
\begin{aligned}
&V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k), \tilde{\boldsymbol{u}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)) - V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k-1)) \le \\
&\quad l_j(\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)) + \varphi_{i,\,e}(\boldsymbol{e}_i(k)) - \\
&\quad l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k-1),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k-1)) \qquad (51)
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha_i \ge 0$ 和 $l_{i,\,a}(\cdot,\cdot)$ 为正定函数, 故式 (51) 代入式 (45), 整理可得:

$$
\begin{aligned}
&\eta_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \alpha_i) - V_i^o(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) \ge \\
&\quad \alpha_i l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k-1),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k-1)) \ge 0 \qquad (52)
\end{aligned}
$$

因此, 序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$ 满足约束 (13b) ~ (13e), 则证明辅助优化问题 (20) 的最优控制序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$ 为经济控制问题 (13) 的一个可行解, 所以经济控制问题 (13) 具有递推可行性. 此时, 对于任意 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)\in\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N}$, 上游邻居子系统 j 的假设状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)\in\hat{\mathcal{X}}_{j,\,N}$ 并满足式 (25), 则状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k+1)\in\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N}$. 考虑经济控制问题 (13) 的初始条件, 并根据定义 3 可知 $\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N}$ 是闭环系统 (22) 的鲁棒不变集. □

注 4. 由定理 1 可知, 候补输入序列 $\tilde{\boldsymbol{u}}_i(k)$ 只是辅助优化问题 (20) 的一个可行控制序列, 但不一定是经济控制问题 (13) 的可行序列, 因为输入序列 $\tilde{\boldsymbol{u}}_i(k)$ 不一定满足收缩约束 (13e). 由于辅助优化问题 (20) 的最优控制序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$ 满足收缩约束 (13e), 故序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k)$ 为经济控制问题 (13) 的可行序列 (通常不是最优序列), 从而 $J_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k)) \le J_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{u}}_i^o(k))$, $k\in\mathbf{I}_{\ge 0}$ 成立. 同理, 经济控制问题 (13) 的最优控制序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k)$ 只是辅助优化问题 (20) 的可行解, 从而 $V_i^o(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) \le V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))$, $\forall k\in\mathbf{I}_{\ge 0}$ 成立.

定理 2. 若假设 1 ~ 3 成立, 对于任意子系统 $i\in\mathcal{M}$ 的经济控制问题 (13) 在初始时刻存在可行解, 给定 $\alpha_i\in[0,\ 1)$, 则闭环系统 (22) 在鲁棒不变集 $\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N}$ 内是 ISS.

证明. 令 $V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))$ 为闭环系统 (22) 的候选 ISS-Lyapunov 函数. 因为 $l_{i,\,a}(\cdot,\cdot)$, $l_{ij}(\cdot,\cdot)$ 和 $E_i(\cdot)$ 是有界非负函数, 则

$$
\begin{aligned}
&\delta_{i,\,1}(||\boldsymbol{x}_i(k)||) \le l_{i,\,a}(\boldsymbol{x}_i(k),\ \boldsymbol{u}_i^*(k)) \le \\
&\quad V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)) \qquad (53)
\end{aligned}
$$

其中, $\delta_{i,\,1}(||\boldsymbol{x}_i(k)||) = \lambda_{i,\,\min}(Q_i)||\boldsymbol{x}_i(k)||^2$ 为 K_∞ 类函数. 接下来, 考虑 $V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))$ 的上界, 并分为以下两种情形:

1) 当 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)\in X_{i,\,T}$ 时, 因为 $X_{i,\,T}$ 是一个鲁棒不变集, 由引理 2 可知, 在 $X_{i,\,T}$ 内存在局部控制律 $\hat{\boldsymbol{u}}_i(k+t|k)=K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k)\in\hat{\mathcal{U}}_i$ 使得下式成立:

$$\begin{aligned}&E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t+1|k))-E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k))\leq\\&\quad l_j(\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k))-l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k),\\&\quad\hat{\boldsymbol{u}}_i(k+t|k))\end{aligned}\tag{54}$$

其中, $t\in\mathbf{I}_{0:N-1}$. 相应地, 耦合函数存在上界:

$$\begin{aligned}&\Gamma_i(L_{lx}||\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k)||+L_{ly}||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k)||)\geq\\&\quad\sum_{j\in\mathcal{N}_i}l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k))\end{aligned}\tag{55}$$

将式 (54) 和 (55) 分别从 $t=0$ 到 $N-1$ 累加并结合, 整理可得:

$$\begin{aligned}&V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\leq V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ K_i\hat{\boldsymbol{x}}_i(k),\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k))\leq\\&\quad\delta_{i,\,1}^{'}(||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)||)+\sigma_{i,\,1}(||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)\end{aligned}\tag{56}$$

其中, $\delta_{i,\,1}^{'}(||\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)||):=2\sum_{t=0}^{N-1}\tilde{L}_i||\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k+t|k)||$ 为 K_∞ 类函数, $\sum_{t=0}^{N-1}(l_j+L_{ly})\circ(||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k+t|k)||):=\sigma_{i,\,1}(||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)$ 为 K 类函数.

2) 当 $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)\in\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N}\backslash X_{i,\,T}$ 时, 因 $l_{i,\,a}(\cdot,\cdot)$ 和 $E_i(\cdot)$ 是有界函数, $\hat{\mathcal{X}}$ 为凸紧集, 令 $\tilde{l}_i=\max\{l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i,\ \hat{\boldsymbol{u}}_i)+\sum_{j\in\mathcal{N}_i}l_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i,\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref})|\hat{\boldsymbol{x}}_i\in\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N},\ \hat{\boldsymbol{u}}_i\in\hat{\mathcal{U}}_i,\ \hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}\in\hat{\mathcal{X}}_{j,\,N}\}$ 和 $\tilde{E}_i=\max\{E_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)|\hat{\boldsymbol{x}}_i\in X_{i,\,T}\}$. 故 $V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))$ 在 $\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N}$ 和 $\hat{\mathcal{U}}_i$ 内对应的上界为 $V_{i,\,\max}:=\tilde{E}_i+N\tilde{l}_i$. 若函数的上界满足 $V_{i,\,\max}\leq\mu_{i,\,3}(||\boldsymbol{x}_i(k)||)$, 其中 $\mu_{i,\,3}(\cdot)$ 为 K_∞ 类函数, 则 $V_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\leq\mu_{i,\,3}(||\boldsymbol{x}_i(k)||)$; 否则, 满足 $V_{i,\,\max}\leq c\mu_{i,\,3}(||\boldsymbol{x}_i(k)||)$, 其中, c 为一个非负常数. 令 $\delta_{i,\,2}^{'}(\cdot)=\max\{1,\ c\}\mu_{i,\,3}(\cdot)$, 则

$$V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\leq\delta_{i,\,2}^{'}(||\boldsymbol{x}_i(k)||)\tag{57}$$

联立式 (53)、(56) 和 (57), 存在 K_∞ 类函数 $\delta_{i,\,1}(\cdot)$ 和 $\delta_{i,\,2}(\cdot)$, K 类函数 $\sigma_{i,\,1}(\cdot)$, 使得下式成立:

$$\begin{aligned}&\delta_{i,\,1}(||\boldsymbol{x}_i(k)||)\leq V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\leq\\&\quad\delta_{i,\,2}(||\boldsymbol{x}_i(k)||)+\sigma_{i,\,1}(||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)\end{aligned}\tag{58}$$

其中, $\delta_{i,\,2}(\cdot)=\max\{\delta_{i,\,1}^{'}(\cdot),\ \delta_{i,\,2}^{'}(\cdot)\}$.

选择经济控制问题 (13) 在 $k-1$ 和 k 时刻对应的序列 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k-1)$ 和 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^*(k)$ 代入式 (21), 沿着闭环系统 (22) 做差分运算, 并结合式 (13e)、(51) 和参数 $\alpha_i\in[0,\ 1)$, 整理可得:

$$\begin{aligned}&V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))-V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k-1))\leq\\&\quad(1-\alpha_i)(V_i^o(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))-V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k-1)))+\\&\quad\alpha_i(\varphi_{i,\,e}(\boldsymbol{e}_i(k))+l_j(||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||))\leq\\&\quad(\alpha_i-1)l_{i,\,a}(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k-1),\ \boldsymbol{u}_i^*(k-1))+\\&\quad2(1+\alpha_i)\max\{\varphi_{i,\,e}(\boldsymbol{e}_i(k)),\ l_j(||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)\}\end{aligned}\tag{59}$$

则存在 K_∞ 类函数 $\delta_{i,\,3}(\cdot)$, K 类函数 $\sigma_{i,\,e}(\cdot)=2(1+\alpha_i)\varphi_{i,\,e}(\cdot)$ 和 $\sigma_{ij}(\cdot)=2(1+\alpha_i)l_j(\cdot)$, 使得下式

$$\begin{aligned}&V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))-V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k-1))\leq\max\{\sigma_{i,\,e}(||\boldsymbol{e}_i(k)||),\\&\quad\sigma_{ij}(||\hat{\boldsymbol{x}}_j^{ref}(k)||)\}-\delta_{i,\,3}(||\boldsymbol{x}_i(k-1)||)\end{aligned}\tag{60}$$

成立. 联立式 (58) 和 (60), 由引理 1 可知, $V_i^*(\hat{\boldsymbol{x}}_i^*(k))$ 为闭环系统 (22) 的一个 ISS-Lyapunov 函数, 并且闭环系统 (22) 在鲁棒不变集 $\hat{\mathcal{X}}_{i,\,N}$ 内是 ISS. □

4 实例仿真

考虑四个连续的 CSTRs[35], 其动态聚合过程描述为:

$$\begin{aligned}\dot{C}_{A1}&=\frac{F_{01}}{V_1}(C_{A01}-C_{A1}+\triangle C_1)+\frac{F_{r1}}{V_1}(C_{A2}-\\&\quad C_{A1})+\frac{F_{r2}}{V_1}(C_{A4}-C_{A1})-\sum_{i=1}^{3}k_{i0}\mathrm{e}^{\frac{-E_i}{RT_1}}C_{A1}\\\dot{T}_1&=\frac{F_{01}}{V_1}(T_{01}-T_{A1})+\frac{F_{r1}}{V_1}(T_2-T_1)+\frac{F_{r2}}{V_1}(T_4-\\&\quad T_1)+\frac{UA}{pc_pV_1}(T_{c1}-T_1)-\sum_{i=1}^{3}\frac{\triangle H_i}{pc_p}k_{i0}\mathrm{e}^{\frac{-E_i}{RT_1}}C_{A1}\\\dot{C}_{A2}&=\frac{F_1}{V_2}(C_{A1}-C_{A2}+\triangle C_2)+\frac{F_{02}}{V_2}(C_{A02}-\\&\quad C_{A2})-\sum_{i=1}^{3}k_{i0}\mathrm{e}^{\frac{-E_i}{RT_2}}C_{A2}\\\dot{T}_2&=\frac{F_1}{V_2}(T_1-T_2)+\frac{F_{02}}{V_2}(T_{02}-T_2)+\frac{UA}{pc_pV_2}(T_{c2}-\\&\quad T_2)-\sum_{i=1}^{3}\frac{\triangle H_i}{pc_p}k_{i0}\mathrm{e}^{\frac{-E_i}{RT_2}}C_{A2}\\\dot{C}_{A3}&=\frac{F_2-F_{r1}}{V_3}(C_{A2}-C_{A3}+\triangle C_3)+\\&\quad\frac{F_{03}}{V_3}(C_{A03}-C_{A3})-\sum_{i=1}^{3}k_{i0}\mathrm{e}^{\frac{-E_i}{RT_3}}C_{A3}\\\dot{T}_3&=\frac{F_2-F_{r1}}{V_3}(T_2-T_3)+\frac{F_{03}}{V_3}(T_{03}-T_3)+\\&\quad\frac{UA}{pc_pV_3}(T_{c3}-T_3)-\sum_{i=1}^{3}\frac{\triangle H_i}{pc_p}k_{i0}\mathrm{e}^{\frac{-E_i}{RT_3}}C_{A3}\\\dot{C}_{A4}&=\frac{F_3}{V_4}(C_{A3}-C_{A4}+\triangle C_4)+\\&\quad\frac{F_{04}}{V_4}(C_{A04}-C_{A4})-\sum_{i=1}^{3}k_{i0}\mathrm{e}^{\frac{-E_i}{RT_4}}C_{A4}\\\dot{T}_4&=\frac{F_3}{V_4}(T_3-T_4)+\frac{F_{04}}{V_4}(T_{04}-T_4)+\\&\quad\frac{UA}{pc_pV_4}(T_{c4}-T_4)-\sum_{i=1}^{3}\frac{\triangle H_i}{pc_p}k_{i0}\mathrm{e}^{\frac{-E_i}{RT_4}}C_{A4}\end{aligned}\tag{61}$$

其中, C_{Ai}, C_{A0i}, T_{0i}, F_{0i}, $\triangle H_i$, E_i 和 $\triangle C_i$ $(i=1,\ 2,$

3, 4) 分别为第 i 个反应器反应物的内部浓度、入口浓度、入口温度、入口流量、反应热、活化能和浓度不确定波动; T_i, T_{ci} 和 F_i 分别为第 i 个反应器的反应器温度、冷却剂温度和流出物流量; F_{r1} 和 F_{r2} 分别为 CSTR2 和 CSTR4 到 CSTR1 的循环流量; c_p, R, p, V 和 k_0 分别为热容、气体常数、溶液密度、体积和反应动力学参数; U 为储罐反应器与护套之间的传热系数; A 为相应的传热面积, 并假设进料中反应物的浓度波动有界. 选取模型参数[28, 35]: $F_{01}=50\,\mathrm{L/min}$, $F_{02}=80\,\mathrm{L/min}$, $F_{03}=100\,\mathrm{L/min}$, $F_{04}=110\,\mathrm{L/min}$, $F_{r1}=25\,\mathrm{L/min}$, $F_{r2}=20\,\mathrm{L/min}$, $F_1=25\ \mathrm{L/min}$, $F_2=50\ \mathrm{L/min}$, $F_3=35\ \mathrm{L/min}$, $V_1=85\ \mathrm{L}$, $V_2=100\ \mathrm{L}$, $V_3=115\ \mathrm{L}$, $V_4=130\ \mathrm{L}$, $C_{A0i}=1\ \mathrm{mol/L}$, $UA=5\times10^4\ \mathrm{J/min{\cdot}K}$, $p=1\,000\ \mathrm{g/L}$, $c_p=0.239\ \mathrm{J/g{\cdot}K}$, $E_1/R=E_2/R=8\,750\,\mathrm{K}$, $E_3/R=9\,000\,\mathrm{K}$, $k_1=2\times10^{10}\ \mathrm{min}^{-1}$, $k_2=2.5\times10^{10}\ \mathrm{min}^{-1}$, $k_3=3\times10^{10}\ \mathrm{min}^{-1}$, $T_{0i}=350\,\mathrm{K}$, $\triangle H_i=-5\times10^4\ \mathrm{J/mol}$. 定义状态变量 $\boldsymbol{x}_i=[C_{Ai},\ T_i]^{\mathrm{T}}$ 和控制变量 $\boldsymbol{u}_i=T_{ci}$, 及状态和控制约束 $\mathcal{X}_i=[0,\ 1]\times[300,\ 370]$, $\mathcal{U}_i=[280,\ 350]$, 扰动上界为 $\gamma_i=0.025$.

在聚合反应过程中, 需要根据经济性能指标合理调节冷却温度, 将反应温度稳定在期望区域, 以降低 CSTRs 能源消耗. 假设第 i 个 CSTRs 的经济性能指标如下经济目标函数:

$$Le_i(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{u}_i)=0.5\sin(0.5(u+(\boldsymbol{x}_2-350)^2)) \tag{62}$$

由式 (8) 计算经济平衡点 $(\boldsymbol{x}_i^*(s),\ \boldsymbol{u}_i^*(s))$ 分别为 0.434 3, 350.182 6, 319.285 4), (0.478 1, 350.353 8, 309.856), (0.499 2, 350.415 4, 301.601) 和 (0.515 5, 349.275 5, 295.979 8). 设置关于 $(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{u}_i)$ 稳定性目标函数的矩阵为 $Q_i=\mathrm{diag}\,\{1,\ 1\}$, $R_i=\mathrm{diag}\,\{0.1,\ 0.1\}$, $Q_{ij}=\mathrm{diag}\,\{0.01,\ 0.01\}$ 和 $\triangle Q_i=\mathrm{diag}\,\{0.1,\ 0.1\}$. 使用 LQR (Linear quadratic regulator) 方法设置反馈增益 K_i 分别为 [86.321, 4.744], [108.105 7, 5.409 4], [131.022 2, 6.116 3] 和 [154.811 7, 6.858], 终端矩阵 P_i 分别为 [171.538 2, 3.507 2, 3.507 2, 0.192 7], [257.169 7, 5.167 5, 5.167 5, 0.259 0], [359.845, 7.202, 7.202, 0.336] 和 [478.515, 9.620, 9.620, 0.426]. 因此, 可计算出系统的 Lipschitz 常数分别为 $L_{f_1}=1.117\,6$, $L_{f_2}=1.05$, $L_{f_3}=1.087$, $L_{f_4}=1.115\,4$, $L_{g_{12}}=0.294$, $L_{g_{14}}=0.235\,3$, $L_{g_{21}}=0.25$, $L_{g_{32}}=0.434\,8$ 和 $L_{g_{43}}=0.269\,2$. 根据引理 2, 控制参数分别设计为 $\varepsilon_1=4.758\,9$, $\varepsilon_2=5.544\,9$, $\varepsilon_3=6.351\,4$ 和 $\varepsilon_4=7.176\,8$.

在仿真中, 采用欧拉差分法对系统 (61) 进行离散化, 取采样周期为 0.1 min, 预测步长为 7, 仿真总步长为 80, 其他参数为 $\delta_1=0.015$, $\delta_2=0.02$, $\delta_3=0.025$ 和 $\delta_4=0.025$. 采用 Matlab R2022a 的 fmincon 函数优化计算最优经济控制问题 (13) 和辅助优化问题 (20). 下面通过以下仿真实验验证本文所提算法的有效性.

选取子系统的初始状态 $\boldsymbol{x}_i(0)$ 都为 (0.7, 310), 系统的外部持续扰动 $\triangle C_i$ 分别为 $0.015\sin(t/2)$, $0.025\sin(t/2)$, $0.02\sin(t/2)$ 和 $0.025\sin(t/2)$. 运行算法 1, 仿真结果如图 2 ~ 图 17 所示. 其中, 实线为参数 $\alpha=0.1$ 的仿真结果; 虚线为参数 $\alpha=0.5$ 的仿真结果; 点线为参数 $\alpha=0.8$ 的仿真结果.

通过分析图 2 ~ 图 17 可以得出, 对于系数 $\alpha\in[0,\ 1)$, 在持续扰动下, 闭环子系统最终在最优经济平衡点 $(\boldsymbol{x}_i^*(s),\ \boldsymbol{u}_i^*(s))$ 附近有界稳定. 然而, 不同系数 α 对应不同的闭环状态轨迹. 具体而言, 从系统的状态图可以看出, 参数 α 越小, 闭环系统的收敛速度越慢; 从性能函数可以看出, 参数 α 越大, 系统的性能函数越好. 这表明系统的经济最优性和稳定性是互相冲突的控制目标. 利用本文所提的策略,

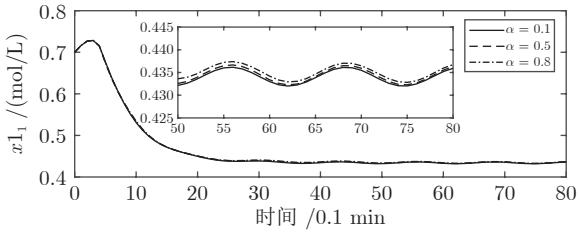

图 2　子系统 1 的状态 $x1$ 轨迹

Fig. 2　State $x1$ trajectories of subsystem 1

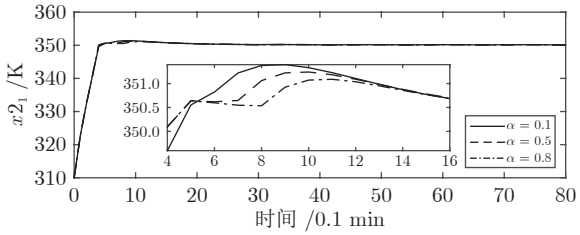

图 3　子系统 1 的状态 $x2$ 轨迹

Fig. 3　State $x1$ trajectories of subsystem 2

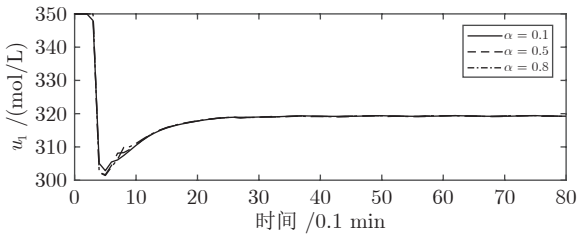

图 4　子系统 1 的控制输入

Fig. 4　Control input of subsystem 1

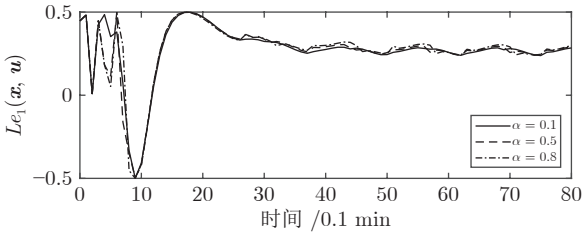

图 5 子系统 1 的性能函数

Fig. 5 Performance function of subsystem 1

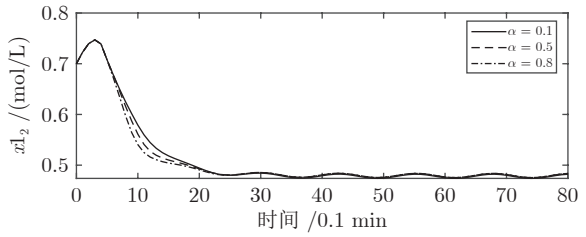

图 6 子系统 2 的状态 $x1$ 轨迹

Fig. 6 State $x1$ trajectories of subsystem 2

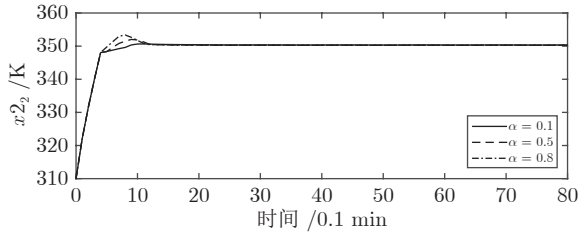

图 7 子系统 2 的状态 $x2$ 轨迹

Fig. 7 State $x2$ trajectories of subsystem 2

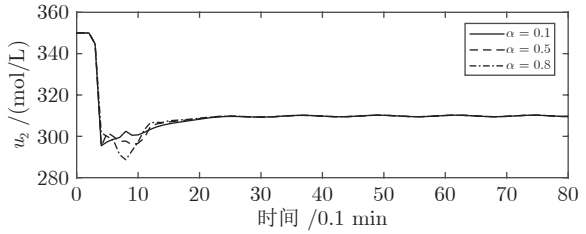

图 8 子系统 2 的控制输入

Fig. 8 Control input of subsystem 2

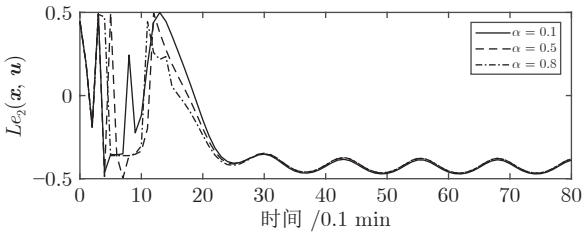

图 9 子系统 2 的性能函数

Fig. 9 Performance function of subsystem 2

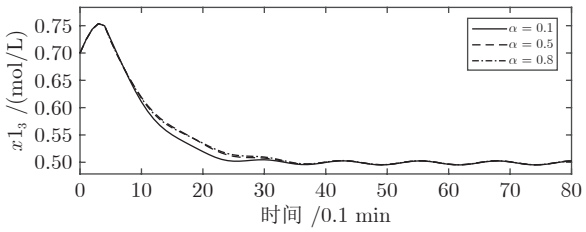

图 10 子系统 3 的状态 $x1$ 轨迹

Fig. 10 State $x1$ trajectories of subsystem 3

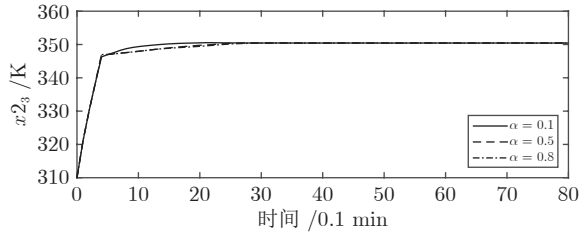

图 11 子系统 3 的状态 $x2$ 轨迹

Fig. 11 State $x2$ trajectories of subsystem 3

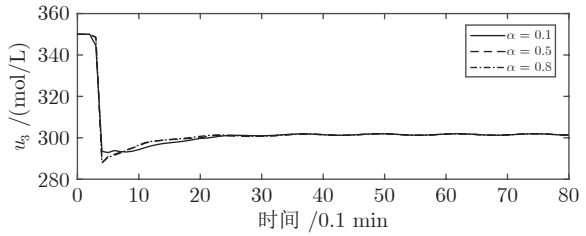

图 12 子系统 3 的控制输入

Fig. 12 Control input of subsystem 3

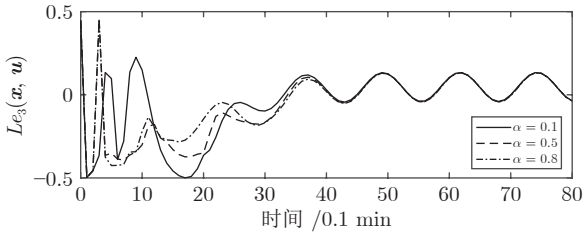

图 13 子系统 3 的性能函数

Fig. 13 Performance function of subsystem 3

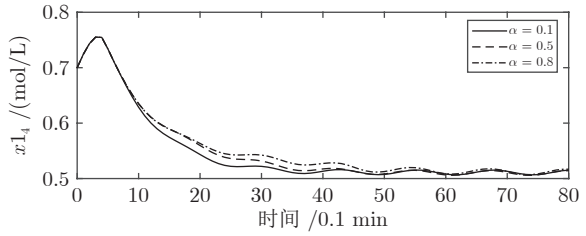

图 14 子系统 4 的状态 $x1$ 轨迹

Fig. 14 State $x1$ trajectories of subsystem 4

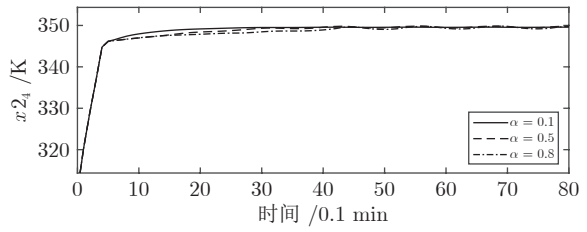

图 15　子系统 4 的状态 $x2$ 轨迹

Fig. 15　State $x2$ trajectories of subsystem 4

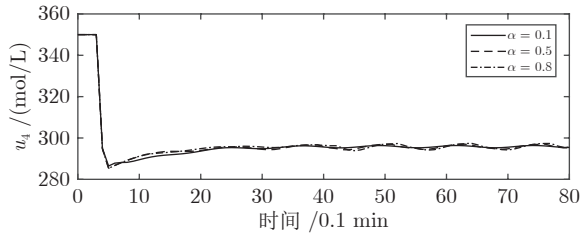

图 16　子系统 4 的控制输入

Fig. 16　Control input of subsystem 4

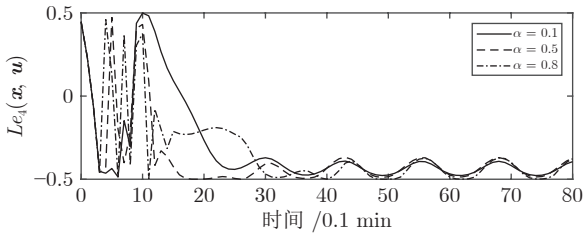

图 17　子系统 4 的性能函数

Fig. 17　Performance function of subsystem 4

可以通过调节收缩参数 α, 权衡系统的经济性目标和稳定性目标, 从而实现经济性和稳定性综合控制效果.

由于耦合子系统相互影响, 并且系统异构, 因此, 从图 2、图 6、图 10 和图 14 中, 分别选取实线 $\alpha = 0.1$ 的仿真结果进行对比, 可以得出以下结论: 在外部持续扰动影响下, 子系统 2 收敛到有界区域的速度快于其他子系统. 这是因为子系统 2 只受到子系统 1 的影响, 并且子系统 2 的体积小于子系统 3 和子系统 4. 相反, 子系统 4 的收敛速度最慢, 因为子系统 4 的体积最大, 并且间接地受到其他子系统的影响.

从图 5、图 9、图 13 和图 17 中, 分别选取实线 $\alpha = 0.1$ 的仿真结果进行对比, 可以得出以下结论: 在外部持续扰动的影响下, 子系统 4 的经济性能是最好的, 而子系统 2 的经济性能相对比较差 (子系统 2 的经济性能函数图波动比较大). 这进一步证明了系统的经济性能和稳定性是互相冲突的.

综上所述, 多耦合分布式系统中, 每个子系统收敛到平衡点的速度会受到相邻耦合子系统数量和相关参数的影响. 耦合子系统越多, 收敛速度可能越慢; 参数越大, 收敛速度也会越慢. 本文通过调节收缩参数, 可以在一定程度上对动态耦合系统的经济性能和稳定性能进行调整, 从而实现经济性和稳定性的综合控制效果. 进一步验证了本文所提出的分布式 EMPC 策略能够保证闭环系统的有界稳定性, 证明了该策略的有效性.

5　结束语

针对受扰的分布式状态耦合非线性系统, 提出一种新的具有稳定性保证的多耦合分布式 EMPC 策略. 首先, 引入辅助优化问题, 并利用其最优值函数构造原始分布式 EMPC 优化问题的一类稳定性约束, 以确保优化问题在经济性和稳定性控制目标下的递推可行性. 然后, 提出两种计算终端域上界的方法, 并建立闭环系统在最优经济平衡点相对于持续扰动的输入到状态稳定性结论. 最后, 通过四个相互耦合的受扰非线性 CSTRs 的仿真实验结果, 验证了所提策略的有效性.

References

1　Liu M, Shi Y, Liu X. Distributed MPC of aggregated heterogeneous thermostatically controlled loads in smart grid. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, **63**(2): 1120−1129

2　Chilin D, Liu J, Chen X, Christofides P. Fault detection and isolation and fault tolerant control of a catalytic alkylation of benzene process. *Chemical Engineering Science*, 2012, **78**: 155−166

3　Zhang A, Yin X, Liu S, Zeng J, Liu J. Distributed economic model predictive control of wastewater treatment plants. *Chemical Engineering Research and Design*, 2019, **141**: 144−155

4　Leirens S, Zamora C, Negenborn R, De S. Coordination in urban water supply networks using distributed model predictive control. In: Proceedings of the 29th American Control Conference. Baltimore, Maryland, USA: IEEE, 2010. 3957−3962

5　Ma S, Zou Y, Li S. Distributed model predictive control with priority coordination for limited supply multi-zone HVAC systems. *Journal of Process Control*, 2022, **117**: 157−168

6　Kang Y, Wang T, Li P, Xu Z, Zhao Y. Compound event-triggered distributed MPC for coupled nonlinear systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(9): 5572−5584

7　Wang T, Kang Y, Li P, Zhao Y, Tang H. Rolling self-triggered distributed MPC for dynamically coupled nonlinear systems. *Automatica*, 2024, **160**: Article No. 111444

8　Ma A, Liu K, Zhang Q, Xia Y. Distributed MPC for linear discrete-time systems with disturbances and coupled states. *Systems and Control Letters*, 2020, **135**: Article No. 104578

9　Farina M, Scattolini R. Distributed predictive control: A non-cooperative algorithm with neighbor-to-neighbor communication for linear systems. *Automatica*, 2012, **48**(6): 1088−1096

10　Liu C, Li H, Shi Y, Xu D. Distributed event-triggered model predictive control of coupled nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2020, **58**(2): 714−734

11　Riverso S, Farina M, Ferrari G. Plug-and-play decentralized model predictive control for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(10): 2608−2614

12　Long Y, Liu S, Xie L, Johansson K. Distributed nonlinear mod-

el predictive control based on contraction theory. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, **28**(2): 492−503

13 Gao Y, Dai L, Xia Y, Liu Y. Distributed model predictive control for consensus of nonlinear second-order multi-agent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, **27**(5): 830−842

14 Wang Q, Duan Z, Lv Y, Wang Q, Chen G. Distributed model predictive control for linear-quadratic performance and consensus state optimization of multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, **51**(6): 2905−2915

15 Müller M, Reble M, Allgöwer F. Cooperative control of dynamically decoupled systems via distributed model predictive control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(12): 1376−1397

16 Dai L, Cao Q, Xia Y, Gao Y. Distributed MPC for formation of multi-agent systems with collision avoidance and obstacle avoidance. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, **354**(4): 2068−2085

17 Chen X, Heidarinejad M, Liu J, Christofides P. Distributed economic MPC: Application to a nonlinear chemical process network. *Journal of Process Control*, 2012, **22**: 689−699

18 Jia Y, Dong Z Y, Sun C, Chen G. Distributed economic model predictive control for a wind-photovoltaic-battery microgrid power system. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 2020, **11**(2): 1089−1099

19 Albalawi F, Durand H, Christofides P. Distributed economic model predictive control with safeness-index based constraints for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 2017, **110**: 21−28

20 Huang M, Zheng Y, Li S. Distributed economic model predictive control for an industrial fluid catalytic cracking unit ensuring safe operation. *Control Engineering Practice*, 2022, **126**: Article No. 105263

21 Jia Y, Meng K, Wu K, Sun C, Dong Z. Optimal load frequency control for networked power systems based on distributed economic MPC. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, **51**(4): 2123−2133

22 Bian Y, Du C, Hu M, Li S, Liu H, Li C. Fuel economy optimization for platooning vehicle swarms via distributed economic model predictive control. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2022, **19**(4): 2711−2723

23 Köhler P, Müller M, Allgöwer F. A distributed economic MPC framework for cooperative control under conflicting objectives. *Automatica*, 2018, **96**: 368−379

24 Luo J, He D, Zhu W, Du H. Multiobjective platooning of connected and automated vehicles using distributed economic model predictive control. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2022, **23**(10): 19121−19135

25 He D, Qiu T, Luo R. Fuel efficiency-oriented platooning control of connected nonlinear vehicles: A distributed economic MPC approach. *Asian Journal of Control*, 2020, **22**(4): 1628−1638

26 Li A, Sun J. Stability of nonlinear system under distributed Lyapunov-based economic model predictive control with time-delay. *ISA Transactions*, 2020, **99**: 148−153

27 Dai L, Qiang Z, Sun Z, Zhou T, Xia Y. Distributed economic MPC for dynamically coupled linear systems with uncertainties. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(6): 5301−5310

28 He De-Feng. Stabilizing economic model predictive control of constrained nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(11): 1680−1690
(何德峰. 约束非线性系统稳定经济模型预测控制. 自动化学报, 2016, **42**(11): 1680−1690)

29 Ellis M, Durand H, Christofides P. A tutorial review of economic model predictive control methods. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(8): 1156−1178

30 Zhou T, Dai L, Li Q, Xia Y. Distributed economic MPC for dynamically coupled systems with stochastic disturbances. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2023, **70**(12): 5442−5455

31 Dai L, Zhou T, Qiang Z, Sun Z, Xia Y. Distributed economic MPC for dynamically coupled linear systems: A Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, **53**(3): 1408−1419

32 Darivianakis G, Eichler A, Lygeros J. Distributed model predictive control for linear systems with adaptive terminal sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, **65**(137): 1044−1056

33 Angeli D, Amrit R, Rawlings J. On average performance and stability of economic model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(7): 1615−1626

34 He De-Feng, Han Ping, Wang Qing-Song. Robust economic MPC of constrained nonlinear systems with bounded disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(2): 572−581
(何德峰, 韩平, 王青松. 有界扰动下约束非线性系统鲁棒经济模型预测控制. 自动化学报, 2022, **48**(2): 572−581)

35 Yin X, Qin Y, Liu J, Huang B. Data-driven moving horizon state estimation of nonlinear processes using Koopman operator. *Chemical Engineering Research and Design*, 2023, **200**: 481−492

王定超 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 2019 年获得浙江师范大学硕士学位. 主要研究方向为非线性系统分布式经济模型预测控制.
E-mail: 1112103015@zjut.edu.cn
(**WANG Ding-Chao** Ph.D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. He received his master degree from Zhejiang Normal University in 2019. His main research interest is distributed economic model predictive control for nonlinear systems.)

何德峰 浙江工业大学信息工程学院教授. 2008 年获得中国科学技术大学博士学位. 主要研究方向为智能预测与最优控制和网络系统优化控制. 本文通信作者.
E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn
(**HE De-Feng** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. He received his Ph.D. degree from University of Science and Technology of China in 2008. His research interest covers intelligent prediction and optimal control, optimization control of network systems. Corresponding author of this paper.)

谢永芳 中南大学自动化学院教授. 1999 年获得中南大学博士学位. 主要研究方向为分散控制与鲁棒控制, 过程控制, 工业大数据和知识自动化.
E-mail: yfxie@csu.edu.cn
(**XIE Yong-Fang** Professor at the School of Automation, Central South University. He received his Ph.D. degree from Central South University in 1999. His research interest covers decentralized control and robust control, process control, industrial big data and knowledge automation.)