一类具有复杂执行器动态的双曲线型偏微分方程输出调节

肖 宇 [1] 徐晓东 [1] 阳春华 [1]

摘 要 本文研究了一类具有边界执行器动态特性的双曲线型偏微分方程 (Partial differential equation, PDE) 系统的输出调节问题. 特别地, 执行器由一组非线性常微分方程 (Ordinary differential equation, ODE) 描述, 控制输入出现在执行器的一端而非直接作用在 PDE 系统上, 这使得控制任务变得相当困难. 基于几何设计方法和有限维与无限维反步法, 本文提出了显式表达的输出调节器, 实现了该类系统的扰动补偿及跟踪控制. 并且我们采用 Lyapunov 稳定性理论严格证明了闭环系统及跟踪误差在范数意义上的指数稳定性. 仿真实例对比验证了所提出控制方法的有效性.

关键词 双曲线型偏微分方程, 输出调节, 执行器动态特性, 非线性, 反步法

引用格式 肖宇, 徐晓东, 阳春华. 一类具有复杂执行器动态的双曲线型偏微分方程输出调节. 自动化学报, 2024, **50**(2): 295−307

DOI 10.16383/j.aas.c221007

Output Regulation for a Class of Hyperbolic PDEs With Complex Actuator Dynamics

XIAO Yu[1] XU Xiao-Dong[1] YANG Chun-Hua[1]

Abstract This paper investigates the output regulation problem for a class of hyperbolic partial differential equation (PDE) systems with boundary actuator dynamics. Particularly, the control input appears at one end of the actuator described by a set of ordinary differential equation (ODE) rather than directly in the PDE system, which makes the control task rather difficult. Based on the geometric design method as well as finite and infinite dimensional backstepping methods, an output regulator is explicitly provided in the paper so that the disturbance compensation and tracking control of this system are implemented. Moreover, we rigorously prove the exponential stability of both the closed-loop system and the tracking error in the norm by employing the Lyapunov stability theory. The simulation example comparatively demonstrates the effectiveness of the proposed control method.

Key words Hyperbolic partial differential equation (PDE), output regulation, actuator dynamics, nonlinearity, backstepping

Citation Xiao Yu, Xu Xiao-Dong, Yang Chun-Hua. Output regulation for a class of hyperbolic PDEs with complex actuator dynamics. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(2): 295−307

双曲线型偏微分方程 (Partial differential equation, PDE) 广泛用于描述一类具有传输现象的物理系统, 例如: 热交换器[1], 油井钻探[2] 和管状传输过程[3] 等. 近些年, 这一类系统的输出调节问题已成为学术界及工业界的挑战. 基于几何设计方法和无限维反步法, 一些针对双曲线型 PDE 系统的输出调节理论成果已提出[4−10]. 文献 [11] 研究了 2×2 双曲线型 PDE 系统的有限时间输出调节问题. 然而, 上述输出调节工作只考虑 PDE 系统的直接边界控制. 换言之, 控制输入直接作用在 PDE 系统的边界点上而忽略了执行器动态特性的影响. 这往往不合理, 由于普遍存在于控制系统中的耦合现象, 例如: 电磁耦合[12]、传感器和设备之间的耦合[13] 以及耦合的化学反应过程[14] 等. 在控制系统中, 当执行器动态特性显著时, 忽略执行器的影响将导致控制性能直接下降. 由于动态执行器的存在, 现存的基于直接边界控制的输出调节策略[4−11] 将无效, 考虑执行器动态特性的分布参数系统输出调节策略有待提出.

事实上, 对于具有执行器动态特性的 PDE 系统的稳定控制, 一些试探性的结果已经被提出. 具体地, 文献 [15−17] 允许低阶线性或非线性执行器动态特性在 PDE 系统边界点存在. 在文献 [18−20] 中, 执行器动态特性由线性可控高阶常微分方程 (Ordinary differential equation, ODE) 主导. 文献 [21] 研究了具有高阶非线性执行器动态特性的抛物线型 PDE 系统的稳定控制. 进一步, 文献 [22] 采用神经网络首次解决了具有未知非线性执行器动态特性

收稿日期 2022-12-30 录用日期 2023-05-18
Manuscript received December 30, 2022; accepted May 18, 2023
国家重点研发项目 (2022YFB3304700) 资助
Supported by National Key R&D Program of China (2022YFB3304700)
本文责任编委 王卓
Recommended by Associate Editor WANG Zhuo
1. 中南大学自动化学院 长沙 410083
1. School of Automation, Central South University, Changsha 410083

的双曲线型 PDE 系统的跟踪控制. 我们从上述工作注意到执行器动态特性通常由 ODEs 描述, 因此具有执行器动态特性的 PDE 系统事实上是耦合的 PDE-ODE 系统. 尽管文献 [15−22] 在控制器设计过程中充分考虑了执行器动态特性, 但这些工作并未考虑外界干扰的影响, 无法解决系统受扰动时的信号跟踪问题, 即输出调节问题.

本文考虑了一类由高阶非线性 ODE 执行器驱动的 2×2 双曲线型 PDE 系统输出调节问题, 所研究的系统由非线性 ODEs 串联 PDE 模型描述. 不同于文献 [21−22] 忽略了扰动影响, 本文研究的 ODE 执行器和 PDE 系统均受到外界的干扰, 控制策略需实现全局扰动估计和抑制, 这使得本文的工作更加困难且区别于现有的文献. 为解决高阶执行器动态特性给调节器设计带来的挑战和对控制性能产生的不利影响, 我们拓展了文献 [11] 的输出调节控制器设计框架, 将有限维反步法与非线性观测器设计方法引入并与无限维反步法和几何设计方法相结合, 分别设计了基于状态和输出反馈的调节器. 具体地, 状态反馈调节器包括前馈和反馈两部分, 首先通过构建并求解反步坐标下的调节方程获得前馈增益, 而后采用有限维反步法逐步获得反馈部分的显式表达. 对于输出反馈调节器, 本文分别设计了一个参考观测器和两个扰动观测器. 参考观测器观测参考信号的状态, 两个扰动观测器分别观测 PDE 系统和执行器所受到的扰动及实际状态. 设计输出反馈调节器的关键在于求取观测器增益使得参考及扰动观测误差能够稳定收敛, 为状态反馈调节器提供准确的系统状态. 本文主要贡献包括:

1) 扩展了现有的双曲线型 PDE 系统的直接边界输出调节工作[4−11], 所考虑的执行器动态特性由具有广泛代表性的高阶严格反馈形式非线性 ODEs 描述, 这使得控制器的设计变得更加实际但困难. 此外, 不同于文献 [15−22] 只研究系统的稳定或跟踪控制而未考虑外界干扰, 本文解决了更加复杂的输出调节问题.

2) 针对具有高阶执行器动态特性的 2×2 双曲线型 PDE 系统, 本文建立了一个新的输出调节控制器设计框架, 在有限维和无限维空间中充分利用几何设计方法使得跟踪误差及闭环系统在范数意义上指数稳定. 该框架同样适用于具有相似结构的耦合 PDE-ODE 系统的输出调节器设计.

本文其余部分组织如下: 第 1 节给出了所考虑的被控系统、虚拟外部系统及控制目标, 第 2 节给出了状态反馈调节器的设计过程, 第 3 节设计了参考及扰动观测器, 第 4 节分析了输出反馈控制下闭环系统的稳定性及跟踪误差收敛性, 第 5 节进行数值仿真对比验证了所提出控制方法的有效性和先进性, 第 6 节是总结性评述.

1 问题描述

考虑如下具有高阶执行器动态特性的 2×2 双曲线型 PDE 系统[1]:

$$u_t(x)=\Lambda(x)u_x(x)+A(x)u(x)+G(x)D_1 \tag{1a}$$

$$u_1(0)=qu_2(0)+D_2 \tag{1b}$$

$$u_2(1)=X_1+d_0 \tag{1c}$$

$$\dot{X}_i=X_{i+1}+f_i\left(\bar{X}_i\right)+d_i,\ i=1,\cdots,n-1 \tag{1d}$$

$$\dot{X}_n=U+f_n\left(\bar{X}_n\right)+d_n \tag{1e}$$

$$y(t)=\mathcal{C}[u(t)]+D_3 \tag{1f}$$

其中, $u(x,t)=col(u_1(x,t),u_2(x,t)):[0,1]\times[0,\infty)\to\mathbf{R}^2$ 是 PDE 子系统状态; 对于 $i=1,\cdots,n$, $\bar{X}_i=(X_1,X_2,\cdots,X_i)\in\mathbf{R}^i$ 是执行器状态; $f_i(\bar{X}_i):\mathbf{R}^i\to\mathbf{R}$ 是光滑函数; U 为位于执行器一端的标量控制输入. 式 (1a) 中矩阵 $\Lambda(x)=\begin{bmatrix}-\lambda_1(x) & 0\\ 0 & \lambda_2(x)\end{bmatrix}$ 为 PDE 系统传输系数, 其中 $\lambda_{1,2}(x)>0$ 且 $\lambda_{1,2}(x)\in\mathrm{C}^n[0,1]$; $A(x)=\begin{bmatrix}0 & \bar{a}_1(x)\\ \bar{a}_2(x) & 0\end{bmatrix}$ 为耦合系数 (较大的 $A(x)$ 使 PDE 系统 (1a) ~ (1c) 不稳定), 其中 $\bar{a}_{1,2}(x)\in\mathrm{C}^n[0,1]$; 式 (1b) 中 q 为非 0 的常数. 式 (1a) ~ (1f) 中, D_j $(j=1,2,3)$, d_i $(i=0,\cdots,n)$ 为不可测量扰动, $G(x)=col(G_1(x),G_2(x))\in\mathbf{R}^2$. 式 (1f) 中的被控输出 $y(t)$ 可以代表边界以及分布在 PDE 域中的点或分段的状态, $\mathcal{C}$ 表示如下输出算子:

$$\mathcal{C}[h]=\sum_{i=1}^{l}g_i^{\mathrm{T}}h(x_i)+\int_0^1 c^{\mathrm{T}}(x)h(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

其中 $h(x)\in\mathbf{C}^2$, $g_i\in\mathbf{R}^2$ 且 $x_i\in[0,1]$ $(i=1,\cdots,l)$; $c(x)=[c_i(x)]\in\mathbf{R}^2$ 且 $c_i(x)$, $i=1,2$ 为分段连续函数.

注 1. 如图 1 所示, 在流程工业中, 系统 (1) 可描述一类多反应器串联的被控对象[14, 23]. 如串联的连续搅拌反应釜 (Continuous stirred tank reactor, CSTR) 可被描述成高阶耦合的非线性 ODE 系统 (1d) ~ (1e), 且非线性函数 f_i 代表后续环节对先前环节的反馈. 由于串联 CSTRs 受到非线性反馈及

[1] 本文使用的符号说明如下: $\mathbf{R}$ 为所有实数的集合; $\mathbf{C}$ 为所有复数的集合; C^n 表示 n 阶连续可微; $|\cdot|$ 表示欧几里得范数; 对于一个时变的信号 $\omega(x,t)\in\mathbf{R}$, $x\in[0,1]$, 令 $\|\omega(x)\|_{L_2}=\sqrt{\int_0^1\omega^2(x)\,\mathrm{d}x}$ 表示其 L_2 范数. 此外, 令 $v_x(x,t)$ 和 $v_t(x,t)$ 分别表示偏导 $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$. 为避免混淆, 时间和空间变量在一些函数中常被忽略, 例如: $v(x,t)=v(x)$, $v(x,t)=v$.

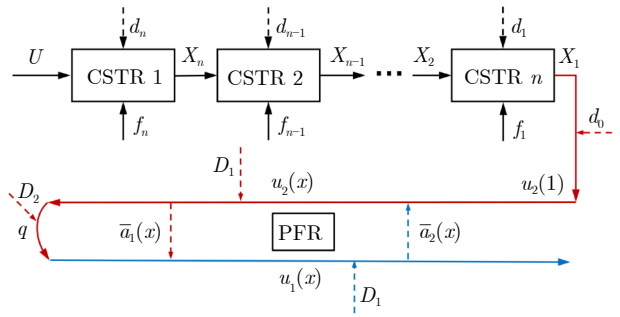


图 1　一类典型的流程工业多反应器串联系统信号流图

Fig. 1　A typical signal flow graph of multi-reactor series system in process industry

外界干扰的影响, 其高阶动态特性将给后续装置带来不稳定的因素. 活塞流反应器 (Plug flow reactor, PFR) 可由耦合双曲线型 PDE (1a) ~ (1c) 建模, 其中 PFR 的输入端 $u_2(1)$ 通过边界条件 (1c) 与 CSTR n 的输出端 X_1 相连. 控制输入 U 代表进料的速率, 为实现 PFR 的精准控制, 控制器 U 既要考虑 PDE 耦合特性带来的不稳定因素, 也应当考虑 ODEs 高阶动态特性及干扰的影响, 这使得控制器的设计更加困难.

系统 (1) 的扰动信号与被 $y(t)$ 跟踪的参考信号 $y_r(t)$ 可由如下有限维虚拟外部系统的解表示:

$$\dot{v}(t) = Sv(t),\ v(0) = v_0 \in \mathbf{R}^{n_v} \tag{3a}$$

$$D_i(t) = P_i^{\mathrm{T}} v(t) = Q_i^{\mathrm{T}} v_{d1}(t),\ i = 1,\ 2,\ 3 \tag{3b}$$

$$d_i(t) = p_i^{\mathrm{T}} v(t) = q_i^{\mathrm{T}} v_{d2}(t),\ i = 0, \cdots, n \tag{3c}$$

$$y_r(t) = p_r^{\mathrm{T}} v(t) = q_r^{\mathrm{T}} v_r(t) \tag{3d}$$

其中 $S = \mathrm{bdiag}\{S_{d1},\ S_{d2},\ S_r\}$ 为分块可对角化矩阵, 并且 S 所有的特征值都位于虚轴上. 将 v 分块为 $v = col(v_{d1},\ v_{d2},\ v_r)$ 可使外部系统分解为三个信号模型: $\dot{v}_{d1} = S_{d1}v_{d1},\ v_{d1}(0) \in \mathbf{R}^{n_{d1}}$, $\dot{v}_{d2} = S_{d2}v_{d2},\ v_{d2}(0) \in \mathbf{R}^{n_{d2}}$ 和 $\dot{v}_r = S_r v_r,\ v_r(0) = v_{r0} \in \mathbf{R}^{n_r}$ 且 $n_r + n_{d1} + n_{d2} = n_v$. 因此外部系统能产生不同的有界持续激励信号, 例如: 正弦信号、斜坡信号和阶跃信号等. 此外, 为实现输出反馈调节器设计, 扰动和参考信号模型需已知并且待跟踪参考信号 y_r 是已知的.

令 $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$, $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{X}_1) \\ \vdots \\ f_n(\bar{X}_n) \end{bmatrix}$, $\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$,

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{R}^n}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{R}^n}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{R}^n}$, 则考虑扰动模型 $\dot{v}_{d2} = S_{d2}v_{d2}$ 的非线性 ODEs (1d) ~ (1e) 重新表述为:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{d2} \\ \dot{\mathcal{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{d2} & 0 \\ \mathcal{Q} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{d2} \\ \mathcal{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{F}(\mathcal{X}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

本文的控制任务是分别设计状态反馈调节器和基于观测器的输出反馈调节器使得被控系统在受到扰动情况下实现输出跟踪误差的准确收敛, 即:

$$\lim_{t\to\infty} e_y(t) = \lim_{t\to\infty} (y(t) - y_r(t)) = 0 \tag{5}$$

并且所产生的闭环系统指数稳定. 为实现控制目标, 我们给出如下必要的假设:

假设 1[11]. S_{d1} 的特征值各自不同.

假设 2[24]. $\left(\begin{bmatrix} q_0^{\mathrm{T}} & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_{d2} & 0 \\ \mathcal{Q} & A \end{bmatrix} \right)$ 可观测.

假设 3[25]. 存在一个 Lipschitz 常数 $c \in \mathbf{R}$, $\forall \mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}} \in \mathbf{R}^n : |\mathcal{F}(\mathcal{X}) - \mathcal{F}(\hat{\mathcal{X}})| < c|\tilde{\mathcal{X}}|$.

注 2. 上述第一个假设不失普遍性, S_{d1} 的特征值由扰动系统 $\dot{v}_{d1} = S_{d1}v_{d1}$ 所考虑的扰动决定. 描述不同频率的扰动时, S_{d1} 的特征值各不相同, 易满足假设 1. 假设 2 强于假设 $(C,\ A)$ 可观测, 然而它同样不失普遍性. 当 $(C,\ A)$ 可观测而假设 2 不成立时, 通过缩小扰动系统 $\dot{v}_{d2} = S_{d2}v_{d2}$ 的状态空间总能使假设 2 满足. 假设 3 常见于非线性系统观测器设计文献中.

2　状态反馈调节器

首先, 为简化 PDE 子系统结构以便于控制器设计, 我们采用 Volterra 积分变换形式的坐标映射及其逆映射:

$$w(x,\ t) = u(x,\ t) - \int_0^x K(x,\ y)\, u(y,\ t)\, \mathrm{d}y = \mathcal{T}_c[u(t)](x) \tag{6}$$

$$u(x,\ t) = w(x,\ t) + \int_0^x L(x,\ y)\, w(y,\ t)\, \mathrm{d}y = \mathcal{T}_c^{-1}[w(t)](x) \tag{7}$$

其中 $K(x,\ y) \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ 和 $L(x,\ y) \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ 为定义在三角域 $0 \le y \le x \le 1$ 上的核函数. 用式 (3) 替换原系统 (1) 中的扰动, 变换 (6) 将 PDE 子系统 (1a) ~ (1c), (1f) 映射为目标系统 w:

$$w_t(x,\ t) = \Lambda(x)\, w_x(x,\ t) + H(x)\, v \tag{8a}$$

$$w_1(0) = q w_2(0) + P_2^{\mathrm{T}} v \tag{8b}$$

$$w_2(1) = X_1 - \int_0^1 e_2^{\mathrm{T}} K(1,\ y)\, u(y,\ t)\, \mathrm{d}y + p_0^{\mathrm{T}} v \tag{8c}$$

$$y(t)=\mathcal{CT}_c^{-1}[w(t)]+P_3^{\mathrm{T}}v \tag{8d}$$

其中 $H(x)=K(x,0)\Lambda(0)e_1P_2^{\mathrm{T}}+\mathcal{T}_c[GP_1^{\mathrm{T}}](x)$, $e_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$ 且 $e_2=[0,1]^{\mathrm{T}}$. 由两个系统的等价性, 可以推导得到下列控制核方程:

$$\begin{aligned}&\Lambda(x)\partial_xK(x,y)+\partial_y(K(x,y)\Lambda(y))=\\&\quad K(x,y)A(y)\\&K(x,0)e_2=\frac{q\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)}K(x,0)e_1\\&K(x,x)\Lambda(x)-\Lambda(x)K(x,x)=A(x)\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\Lambda(x)\partial_xL(x,y)+\partial_y(L(x,y)\Lambda(y))=\\&\quad -A(y)L(x,y)\\&L(x,0)e_2=\frac{q\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)}K(x,0)e_1\\&L(x,x)\Lambda(x)-\Lambda(x)L(x,x)=A(x)\end{aligned}\tag{10}$$

(9) 和 (10) 分别为具有四个边界条件的一阶线性偏微分方程. 由于 $\lambda_{1,2}(x)\in\mathrm{C}^n[0,1]$ 且 $\bar{a}_{1,2}(x)\in\mathrm{C}^n[0,1]$, 文献 [26] 采用特征线及逐次逼近的方法证明上述方程存在 C^n 连续的解. 此外, 采用有限差分的方法通过数值计算可以获得其任意精度的数值解.

在式 (1e) 中, 控制器 U 由一个前馈控制器 U_f 和一个反馈控制器 U_b 组成, 即:

$$U(t)=U_f(t)+U_b(t) \tag{11}$$

其中, 前馈控制器 $U_f=\Pi v$ 由前馈增益 $\Pi\in\mathbf{R}^{1\times n_v}$ 及信号 v 组成, 反馈控制器 U_b 将在后续推导中给出详细设计. 为了获得合适的增益 Π, 定义如下有界可逆坐标变换:

$$\varepsilon(x,t)=w(x,t)-\pi(x)v(t) \tag{12a}$$

$$\tilde{e}_i(t)=X_i(t)-\pi_iv(t),\ i=1,\cdots,n \tag{12b}$$

其中: $\pi(x)=[\pi_{ij}(x)]\in\mathbf{R}^{2\times n_v}$ 且 $\pi_{ij}(x)\in\mathrm{C}^{n+1}[0,1]$, $i=1,2$, $j=1,\cdots,n_v$. 将式 (11) 和 (12) 代入式 (8) 和 ODE 系统 (1d) ~ (1e) 中, 可得如下转换后系统:

$$\varepsilon_t=\Lambda(x)\varepsilon_x \tag{13a}$$

$$\varepsilon_1(0)=q\varepsilon_2(0) \tag{13b}$$

$$\varepsilon_2(1)=\tilde{e}_1-\int_0^1e_2^{\mathrm{T}}K(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y \tag{13c}$$

$$\dot{\tilde{e}}_i=\tilde{e}_{i+1}+f_i,\ i=1,\cdots,n-1 \tag{13d}$$

$$\dot{\tilde{e}}_n=U_b+f_n \tag{13e}$$

$$e_y(t)=\mathcal{CT}_c^{-1}[\varepsilon(t)] \tag{13f}$$

为完成式 (13) 的推导, 需满足下列调节方程:

$$\pi(x)S=\Lambda(x)d_x\pi(x)+H(x) \tag{14a}$$

$$e_1^{\mathrm{T}}\pi(0)=qe_2^{\mathrm{T}}\pi(0)+P_2^{\mathrm{T}} \tag{14b}$$

$$\mathcal{CT}_c^{-1}[\pi]=p_r^{\mathrm{T}}-P_3^{\mathrm{T}} \tag{14c}$$

$$e_2^{\mathrm{T}}\pi(1)=\pi_1+p_0^{\mathrm{T}} \tag{14d}$$

$$\pi_iS=\pi_{i+1}+p_i^{\mathrm{T}},\ i=1,2,\cdots,n-1 \tag{14e}$$

$$\pi_nS=\Pi+p_n^{\mathrm{T}} \tag{14f}$$

其中式 (14a) 是一个以式 (14b) 和 (14c) 为边界条件的一阶线性 ODEs. 文献 [11] 讨论了它的可解性及解的存在性条件. 若式 (14a) ~ (14c) 的解 $\pi(x)$ 唯一存在, 则变量 π_i, $i=1,\cdots,n$ 唯一存在且闭环系统 (13) 的表达式也唯一存在. 通过式 (14d) ~ (14e) 可计算得到

$$\pi_i=\left(e_2^{\mathrm{T}}\pi(1)-p_0^{\mathrm{T}}\right)S^{i-1}-\sum_{j=1}^{i-1}p_j^{\mathrm{T}}S^{i-j-1} \tag{15}$$

进一步通过式 (14f) 可得前馈增益

$$\Pi=\left(e_2^{\mathrm{T}}\pi(1)-p_0^{\mathrm{T}}\right)S^n-\sum_{j=1}^{n-1}p_j^{\mathrm{T}}S^{n-j}-p_n^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

式 (13f) 表明被控输出的跟踪误差 e_y 是关于 $\varepsilon(x,t)$ 的线性映射, 因此设计反馈控制器 U_b 使得 $\varepsilon(x,t)$ 稳定能够保证 e_y 收敛到 0. 首先, 定义如下状态转换变量:

$$\gamma_1=\tilde{e}_1-t_u \tag{17a}$$

$$\gamma_i=\tilde{e}_i-\alpha_{i-1},\ i=2,\cdots,n \tag{17b}$$

其中 $t_u=\int_0^1e_2^{\mathrm{T}}K(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y$, α_i, $i=1,\cdots,n-1$ 为虚拟控制器. 利用有限维反步设计方法, 实际控制器 U_b 和虚拟控制器 α_i 将在如下推导步骤中给出:

步骤 1. 由于式 (13a) 的状态是空间分布的, 采用如下积分形式的 Lyapunov 函数:

$$V_1=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-ax}\varepsilon_1^2(x)}{\lambda_1(x)}\mathrm{d}x+\beta\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{ax}\varepsilon_2^2(x)}{\lambda_2(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\gamma_1^2 \tag{18}$$

其中 $a>0$, $\beta>q^2$ 为正的设计参数. 由式 (13d) 和 (17) 可得 $\dot{\gamma}_1=\dot{\tilde{e}}_1-\dot{t}_u=\tilde{e}_2+f_1-\dot{t}_u=\gamma_2+\alpha_1+f_1-\dot{t}_u$. 对式 (18) 求导并代入式 (13a) ~ (13b), 再分部积分得到

$$\dot{V}_1=-\Theta(x)+\beta\mathrm{e}^a\varepsilon_2^2(1)+\gamma_1\left(\gamma_2+\alpha_1+f_1-\dot{t}_u\right) \tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}\Theta(x)=&\left(\beta-q^2\right)\varepsilon_2^2(0)+a\int_0^1\mathrm{e}^{-ax}\varepsilon_1^2(x)\mathrm{d}x+\\&a\beta\int_0^1\mathrm{e}^{ax}\varepsilon_2^2(x)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-a}\varepsilon_1^2(1)\end{aligned} \tag{20}$$

由于 $\varepsilon_2(1)=\gamma_1$, 选择虚拟控制器如下

$$\alpha_1=-\beta \mathrm{e}^a\varepsilon_2(1)-k_1\gamma_1-f_1+\dot{t}_u \tag{21}$$

其中 $k_1>0$ 是正的设计参数, 由于 $\gamma_1=X_1-\pi_1 v-t_u$ 且 $\gamma_1=\varepsilon_2(1)$, α_1 是一个关于 X_1, t_u, $\dot{t}_u$, v 的函数. 将式 (21) 代入式 (19) 中得到

$$\dot{V}_1=-\Theta(x)-k_1\gamma_1^2+\gamma_1\gamma_2 \tag{22}$$

步骤 2. 定义如下 Lyapunov 函数:

$$V_2=V_1+\frac{1}{2}\gamma_2^2 \tag{23}$$

注意到 $\dot{\gamma}_2=\dot{\tilde{e}}_2-\dot{\alpha}_1=\tilde{e}_3+f_2-\dot{\alpha}_1=\gamma_3+\alpha_2+f_2-\dot{\alpha}_1$, 对式 (23) 求导并将 $\dot{\gamma}_2$ 和式 (22) 代入结果中得到

$$\dot{V}_2=-\Theta(x)-k_1\gamma_1^2+\gamma_2(\gamma_3+\gamma_1+\alpha_2+f_2-\dot{\alpha}_1) \tag{24}$$

其中

$$\dot{\alpha}_1=\frac{\partial\alpha_1}{\partial X_1}\left(X_2+f_1+p_1^{\mathrm{T}}v\right)+\sum_{j=0}^{1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t_u^{(j)}}t_u^{(j+1)}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}Sv \tag{25}$$

选择虚拟控制器 α_2 如下:

$$\alpha_2=-k_2\gamma_2-\gamma_1-f_2+\sum_{j=0}^{1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t_u^{(j)}}t_u^{(j+1)}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial X_1}\left(X_2+f_1+p_1^{\mathrm{T}}v\right)+\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}Sv \tag{26}$$

其中 $k_2>0$ 为正的设计参数且 α_2 是一个关于 X_1, X_2, t_u, $\dot{t}_u$, $t_u^{(2)}$, v 的函数, 由此得到

$$\dot{V}_2=-\Theta(x)-\sum_{j=1}^{2}k_j\gamma_j^2+\gamma_2\gamma_3 \tag{27}$$

步骤 l ($l=3,\cdots,n-1$). 定义如下 Lyapunov 函数:

$$V_l=V_{l-1}+\frac{1}{2}\gamma_l^2 \tag{28}$$

从递推步骤 1 到步骤 $l-1$, 可得

$$\dot{V}_{l-1}=-\Theta(x)-\sum_{j=1}^{l-1}k_j\gamma_j^2+\gamma_{l-1}\gamma_l \tag{29}$$

注意到 $\dot{\gamma}_l=\dot{\tilde{e}}_l-\dot{\alpha}_{l-1}=\tilde{e}_{l+1}+f_l-\dot{\alpha}_{l-1}=\gamma_{l+1}+\alpha_l+f_l-\dot{\alpha}_{l-1}$, 对式 (28) 求导并将 $\dot{\gamma}_l$ 和式 (29) 代入结果中得到

$$\dot{V}_l=-\Theta(x)-\sum_{j=1}^{l-1}k_j\gamma_j^2+\gamma_{l-1}\gamma_l+\gamma_l(\gamma_{l+1}+\alpha_l+f_l-\dot{\alpha}_{l-1}) \tag{30}$$

选择虚拟控制器 α_l 如下:

$$\alpha_l=-k_l\gamma_l-\gamma_{l-1}-f_l+\sum_{j=0}^{l-1}\frac{\partial\alpha_{l-1}}{\partial t_u^{(j)}}t_u^{(j+1)}+\sum_{j=0}^{l-2}\frac{\partial\alpha_{l-1}}{\partial v}Sv+\sum_{j=1}^{l-1}\frac{\partial\alpha_{l-1}}{\partial X_j}\left(X_{j+1}+f_j+p_j^{\mathrm{T}}v\right) \tag{31}$$

其中 $k_l>0$ 为正的设计参数且 α_l 是一个关于 $X_1,\cdots,X_l$, $t_u,\cdots,t_u^{(l)}$, v 的函数. 将 α_l 代入式 (30) 中得到

$$\dot{V}_l=-\Theta(x)-\sum_{j=1}^{l}k_j\gamma_j^2+\gamma_l\gamma_{l+1} \tag{32}$$

步骤 n. 定义如下 Lyapunov 函数:

$$V_n=V_{n-1}+\frac{1}{2}\gamma_n^2 \tag{33}$$

由于 $\dot{\gamma}_n=\dot{\tilde{e}}_n-\dot{\alpha}_{n-1}=U_b+f_n-\dot{\alpha}_{n-1}$, 对式 (33) 求导并代入 $\dot{\gamma}_n$ 到结果中可得

$$\dot{V}_n=-\Theta(x)-\sum_{j=1}^{n-1}k_j\gamma_j^2+\gamma_{n-1}\gamma_n+\gamma_n(U_b+f_n-\dot{\alpha}_{n-1}) \tag{34}$$

对式 (31) 求导得到

$$\dot{\alpha}_l=\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial\alpha_l}{\partial X_j}\left(X_{j+1}+f_j+p_j^{\mathrm{T}}v\right)+\sum_{j=0}^{l-1}\frac{\partial\alpha_l}{\partial v}Sv+\sum_{j=0}^{l}\frac{\partial\alpha_l}{\partial t_u^{(j)}}t_u^{(j+1)} \tag{35}$$

令式 (35) 的 $l=n-1$ 并将 $\dot{\alpha}_{n-1}$ 代入式 (34) 中, 由此选择实际控制器 U_b 如下:

$$U_b=-k_n\gamma_n-\gamma_{n-1}-f_n+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial t_u^{(j)}}t_u^{(j+1)}+\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial v}Sv+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial X_j}\left(X_{j+1}+f_j+p_j^{\mathrm{T}}v\right) \tag{36}$$

其中 $k_n>0$ 为正的设计参数且 U_b 是一个关于 $X_1,\cdots,X_n$, $t_u,\cdots,t_u^{(n)}$, v 的函数. 将式 (36) 代入式 (34) 得到

$$\dot{V}_n=-\Theta(x)-\sum_{j=1}^{n}k_j\gamma_j^2 \tag{37}$$

注 3. 需注意, 控制器 (36) 只需要 PDE 系统的状态及边界状态的空间导数而不需要任何 PDE 状态的时间导数, 尽管式 (36) 中存在 t_u 的高阶时间导数. 由于 $D_1=P_1^{\mathrm{T}}v$, 令 $h_1(u_x,u,v)$ 抽象表示式 (1a) 的最后三项, 易得 $\partial_t u=h_1(u_x,u,v)$, $\partial_t\partial_t u=\partial_t h_1(u_x,$

$u, v) = h_1(\partial_x\partial_t u, \partial_t u, \dot{v}) = h_2(\partial_x h_1, h_1, Sv)$. 由于 $\partial_x h_1$ 中包含 u_{xx} 项, 因此 h_2 是关于 u, u_x, u_{xx}, v 的函数. 以此类推, $\partial_t^j u$ 可以抽象表示为 $\partial_t^j u = h_j \times (\partial_x h_{j-1}, h_{j-1}, S^{j-1}v)$, $j = 2, \cdots, n$. 由于 $\partial_x h_{j-1}$ 包含了 $\partial_x^j u$ 项, 因此 h_j 是关于 u, u_x, $\cdots$, $\partial_x^{j-1}u$, $\partial_x^j u$, v 的函数. 进而 $t_u^{(j)}$ 可重新表示为 $t_u^{(j)} = \int_0^1 e_2^{\mathrm{T}} K(1, y) \times \partial_t^j u(y, t)\mathrm{d}y = \int_0^1 e_2^{\mathrm{T}} K(1, y) h_j(u, u_y, \cdots, \partial_y^j u, v)\mathrm{d}y$. 此外, 由于 $K(x, y)$ 在 $0 \le y \le x \le 1$ 域上 n 阶可导, 对上述积分式进行分部积分易得 $t_u^{(j)}$ 由 PDE 系统状态 u 、边界状态的空间各阶导数 $\partial_y^i u(1)$, $\partial_y^i u(0)$, $i = 0, \cdots, j-1$ 、外部系统状态 v 和 $\partial_y^i K(1, y)$, $i = 0, \cdots, j$ 组成. $t_u^{(j)}$ 中存在的状态空间导数可采用有限差分方法进行数值计算, 例如空间一阶导可采用前项或后项差分格式计算, 二阶导可采用中心差分格式计算等. 综上, $t_u^{(j)}$ 不需要 PDE 系统状态的时间导数, 这使得控制器的设计更加实际.

定理 1. 考虑被控系统 (1), 令 π_i, $i = 1, \cdots, n$ 和 $\pi(x)$ 为调节方程 (14) 的解, 则虚拟控制器 (21), (26), (31) 和实际控制器 (11) 确保输出跟踪误差 (5) 指数收敛到 0.

证明. 由 V_1, V_2, V_l, V_n 的定义可得

$$V_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ax}\varepsilon_1^2(x)}{\lambda_1(x)}\mathrm{d}x + \beta\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ax}\varepsilon_2^2(x)}{\lambda_2(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^2 \tag{38}$$

根据式 (37) 易得

$$\dot{V}_n \le -\mu V_n \tag{39}$$

其中 $\mu = \min\{a, k_j,\ j = 1, \cdots, n\}$, 因此 γ_j, $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-ax}\varepsilon_1^2(x)}{\lambda_1(x)}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ax}\varepsilon_2^2(x)}{\lambda_2(x)}\mathrm{d}x$ 指数收敛. 又因为 $\gamma_1 = \varepsilon_2(1)$ 为 ε 子系统的输入端且指数收敛, 由 ε 子系统的线性传输性质易知 $\forall x \in [0, 1]$, $\varepsilon_{1,2}(x, t)$ 指数收敛. 由于核函数 $L(x, y)$ 是有界的, 式 (7) 表明 $\mathcal{T}_c^{-1}[\varepsilon]$ 是 ε 的有界线型变换, 因此 $\mathcal{T}_c^{-1}[\varepsilon]$ 指数收敛. 进一步, 式 (2) 表明 $\mathcal{C}[h]$ 是 h 的有界线型变换, 因此跟踪误差 $e_y = \mathcal{C}\mathcal{T}_c^{-1}[\varepsilon(t)]$ 最终指数收敛到 0. □

在全状态反馈控制器的设计中, 参考模型 $\dot{v}_r = S_r v_r$ 和扰动模型 $\dot{v}_{d1} = S_{d1}v_{d1}$, $\dot{v}_{d2} = S_{d2}v_{d2}$ 需要准确的参考及扰动信号初始状态 $v_r(0)$, $v_{d1}(0)$ 和 $v_{d2}(0)$ 从而精确地描述参考信号及外界扰动的未来状态. 由于实际扰动往往不可测, 这是不现实的. 此外, 全状态反馈需要获取整个 PDE 及执行器的状态, 这在实际中同样难以实现. 为解决这些问题, 我们在下一节给出参考及扰动观测器用于准确估计系统状态和参考及扰动信号, 进一步实现输出反馈调节器的设计.

3 参考及扰动观测器设计

首先假设 (q_r^{T}, S_r) 可观测, 由此给出参考观测器:

$$\dot{\hat{v}}_r = S_r\hat{v}_r + l_r\left(y_r - q_r^{\mathrm{T}}\hat{v}_r\right) \tag{40}$$

其中初始状态 $\hat{v}_r(0) \in \mathbf{R}^{n_r}$. 由于 (q_r^{T}, S_r) 可观测, 存在观测器增益 l_r 使得观测误差 $e_r = v_r - \hat{v}_r$ 渐进收敛[27]. 假设 $u_1(1, t)$ 和 $u_2(1, t)$ 可测量, 为准确估计扰动信号 v_{d1} 和 v_{d2} 、PDE 子系统状态和执行器状态, 我们分别构造 PDE 子系统扰动观测器以及执行器扰动观测器.

3.1 PDE 子系统扰动观测器

构建如下 PDE 子系统扰动观测器:

$$\dot{\hat{v}}_{d1} = S_{d1}\hat{v}_{d1} + l_{d1}\tilde{u}_1(1) \tag{41a}$$

$$\hat{u}_t(x, t) = \Lambda(x)\hat{u}_x(x, t) + A(x)\hat{u}(x, t) + G(x)Q_1^{\mathrm{T}}\hat{v}_{d1}(t) + l_u(x)\tilde{u}_1(1) \tag{41b}$$

$$\hat{u}_1(0) = q\hat{u}_2(0) + Q_2^{\mathrm{T}}\hat{v}_{d1}(t) \tag{41c}$$

$$\hat{u}_2(1) = u_2(1) \tag{41d}$$

其中 $\tilde{u}_1(1) = u_1(1) - \hat{u}_1(1)$ 为观测误差反馈值, $\hat{u}(x, t)$ 为 PDE 状态估计值, $\hat{v}_{d1}$ 为扰动 v_{d1} 估计值. 定义观测误差 $e_{d1} = v_{d1} - \hat{v}_{d1}$, $e_u(x, t) = u(x, t) - \hat{u}(x, t) = [e_{u_i}]$, 将 $\dot{v}_{d1} = S_{d1}v_{d1}$ 和式 (1a) ~ (1c) 分别减去式 (41a) ~ (41d) 得到:

$$\dot{e}_{d1} = S_{d1}e_{d1} - l_{d1}e_{u_1}(1) \tag{42a}$$

$$\partial_t e_u(x) = \Lambda(x)\partial_x e_u(x) + A(x)e_u(x) + G(x)Q_1^{\mathrm{T}}e_{d1} - l_u(x)e_{u_1}(1) \tag{42b}$$

$$e_{u_1}(0) = qe_{u_2}(0) + Q_2^{\mathrm{T}}e_{d1} \tag{42c}$$

$$e_{u_2}(1) = 0 \tag{42d}$$

首先采用如下坐标变换以简化式 (42b) ~ (42d):

$$e_u(x, t) = \tilde{e}_u(x, t) - \int_x^1 K_I(x, y)\tilde{e}_u(y, t)\mathrm{d}y = \mathcal{T}_o^{-1}[\tilde{e}_u(t)](x) \tag{43}$$

$$\tilde{e}_u(x, t) = e_u(x, t) + \int_x^1 L_I(x, y)e_u(y, t)\mathrm{d}y = \mathcal{T}_o[e_u(t)](x) \tag{44}$$

其中 $K_I(x, y) \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ 和 $L_I(x, y) \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ 是定义在三角域 $0 \le x \le y \le 1$ 上 C^n 连续的核函数. 在 (43) 坐标下, 系统 (42) 被映射为目标系统 $\tilde{e}_u$:

$$\dot{e}_{d1} = S_{d1}e_{d1} - l_{d1}\tilde{e}_{u_1}(1) \tag{45a}$$

$$\partial_t \tilde{e}_u(x) = \Lambda(x)\partial_x \tilde{e}_u(x) + \tilde{G}(x) e_{d1} - \tilde{l}_u(x)\tilde{e}_{u_1}(1) \tag{45b}$$

$$\tilde{e}_{u_1}(0) = q\tilde{e}_{u_2}(0) + Q_2^{\mathrm{T}} e_{d1} \tag{45c}$$

$$\tilde{e}_{u_2}(1) = 0 \tag{45d}$$

其中 $\tilde{l}_u(x) = \mathcal{T}_o[l_u](x) - L_I(x,1)\Lambda(1)e_1$ 为辅助增益, $\tilde{G}(x) = \mathcal{T}_o\left[GQ_1^{\mathrm{T}}\right](x)$. 由两系统等价性可推导得到下列观测核方程

$$\begin{aligned}
&\Lambda(x)\partial_x K_I(x,y) + \partial_y\left(K_I(x,y)\Lambda(y)\right) = \\
&\quad -A(x)K_I(x,y) \\
&e_1^{\mathrm{T}} K_I(0,y) = q e_2^{\mathrm{T}} K_I(0,y) \\
&K_I(x,x)\Lambda(x) - \Lambda(x)K_I(x,x) = A(x)
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
&\Lambda(x)\partial_x L_I(x,y) + \partial_y\left(L_I(x,y)\Lambda(y)\right) = \\
&\quad L_I(x,y)A(y) \\
&e_1^{\mathrm{T}} L_I(0,y) = q e_2^{\mathrm{T}} L_I(0,y) \\
&L_I(x,x)\Lambda(x) - \Lambda(x)L_I(x,x) = A(x)
\end{aligned} \tag{47}$$

与式 (9) 和 (10) 可解性证明类似, 可以采用有限差分方法获得其数值解. 系统 (45) 等同于 PDE 子系统与 ODE 子系统相互耦合的系统, 为实现两系统之间的解耦, 引入如下坐标变换:

$$\tilde{\varepsilon}_u(x,t) = \tilde{e}_u(x,t) - M(x)e_{d1}(t) \tag{48}$$

其中 $M(x) \in \mathbf{R}^{2\times n_{d1}}$. 将式 (48) 代入式 (45) 中易得

$$\dot{e}_{d1} = \left(S_{d1} - l_{d1}e_1^{\mathrm{T}}M(1)\right)e_{d1} - l_{d1}\tilde{\varepsilon}_{u_1}(1) \tag{49a}$$

$$\partial_t \tilde{\varepsilon}_u(x) = \Lambda(x)\partial_x \tilde{\varepsilon}_u(x) \tag{49b}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{u_1}(0) = q\tilde{\varepsilon}_{u_2}(0) \tag{49c}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{u_2}(1) = 0 \tag{49d}$$

若 $\tilde{l}_u(x) = M(x)l_{d1}$ 且 $M(x)$ 满足如下方程

$$\tilde{G}(x) = M(x)S_{d1} - \Lambda(x)d_x M(x) \tag{50a}$$

$$e_1^{\mathrm{T}} M(0) = q e_2^{\mathrm{T}} M(0) + Q_2^{\mathrm{T}} \tag{50b}$$

$$e_2^{\mathrm{T}} M(1) = 0 \tag{50c}$$

由于 $\tilde{G}(x)$是连续函数, 式 (50) 唯一可解, 因此 $\tilde{l}_u(x) = M(x)l_{d1}$唯一存在. 进一步可得 PDE 观测器增益

$$\begin{aligned}
l_u(x) &= \mathcal{T}_o^{-1}[M](x)l_{d1} + \mathcal{T}_o^{-1}[L_I(\cdot,1)](x)\Lambda(1)e_1 = \\
&\quad \mathcal{T}_o^{-1}[M](x)l_{d1} + K_I(x,1)(x)\Lambda(1)e_1
\end{aligned} \tag{51}$$

为使误差系统 (49) 稳定, 需选择合适的观测器增益 l_{d1} 使得 $S_{d1} - l_{d1}e_1^{\mathrm{T}}M(1)$ 为赫尔维茨矩阵 (若 $(S_{d1}, e_1^{\mathrm{T}}M(1))$ 可观 (由于假设 1 成立, 可观条件参见文献 [11])).

定理 2. 考虑观测器 (41), 在假设 1 的前提下, 选择合适的观测器增益 l_{d1} 使得 $S_{d1} - l_{d1}e_1^{\mathrm{T}}M(1)$ 为赫尔维茨矩阵且 $l_u(x)$ 由式 (51) 给定, 则观测误差 $e_{ce} = col(e_{d1}, e_{u1}, e_{u2})$ 在范数 $\|\cdot\|_{ce} = (|\cdot|^2_{\mathbf{C}^{n_{d1}}} + \|\cdot\|^2_{L_2} + \|\cdot\|^2_{L_2})^{\frac{1}{2}}$ 意义上指数收敛.

证明. 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned}
V_{obe} &= e_{d1}^{\mathrm{T}} P_1 e_{d1} + \frac{\beta_1}{2}\int_0^1 \frac{2-x}{\lambda_1(x)}\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(x)\,\mathrm{d}x + \\
&\quad q^2\beta_1\int_0^1 \frac{1+x}{\lambda_2(x)}\tilde{\varepsilon}_{u2}(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{52}$$

其中 $\beta_1 > 0$, $P_1 \in \mathbf{R}^{n_{d1}}$是一个正定对称矩阵满足如下代数方程:

$$\left(S_{d1} - l_{d1}e_1^{\mathrm{T}}M(1)\right)^{\mathrm{T}} P_1 + P_1\left(S_{d1} - l_{d1}e_1^{\mathrm{T}}M(1)\right) = -T_1 \tag{53}$$

其中 T_1 是一个正定对称矩阵, 对 V_{obe} 求导并代入式 (49) 到结果中可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{obe} = &-\beta_1\int_0^1\left(\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(x) + 2q^2\tilde{\varepsilon}_{u2}^2(x)\right)\mathrm{d}x - \\
&e_{d1}^{\mathrm{T}}T_1 e_{d1} - 2\tilde{\varepsilon}_{u1}(1)l_{d1}^{\mathrm{T}}P_1 e_{d1} - \beta_1\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(1)
\end{aligned} \tag{54}$$

由于 $\beta_1 > 0$ 是任意的, 因此可以选择足够大的 $\beta_1 > 0$ 使得

$$\frac{1}{2}e_{d1}^{\mathrm{T}}T_1 e_{d1} + 2\tilde{\varepsilon}_{u1}(1)l_{d1}^{\mathrm{T}}P_1 e_{d1} + \beta_1\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(1) \geq 0 \tag{55}$$

由式 (54) 和 (55) 可知, 存在常数 $\mu_1 > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{obe} \leq &-\frac{1}{2}e_{d1}^{\mathrm{T}}T_1 e_{d1} - \\
&\beta_1\int_0^1\left(\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(x) + 2q^2\tilde{\varepsilon}_{u2}^2(x)\right)\mathrm{d}x \leq \\
&-\mu_1 V_{obe}
\end{aligned} \tag{56}$$

因此式 (49) 在范数 $\|\cdot\|_{ce}$ 意义上是指数稳定的. 由于式 (43) 和 (48) 均为有界可逆坐标变换, 因此误差系统 (42) 状态 e_u 和 e_{d1} 在原坐标下指数收敛, 即, 存在常数 $\bar{\alpha}_2 > 0$, $\bar{M}_2 > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&\left(|e_{d1}|^2_{\mathbf{C}^{n_{d1}}} + \|e_{u1}\|^2_{L_2} + \|e_{u2}\|^2_{L_2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{M}_2\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_2 t}\times \\
&\left(|e_{d1}(0)|^2_{\mathbf{C}^{n_{d1}}} + \|e_{u1}(0)\|^2_{L_2} + \|e_{u2}(0)\|^2_{L_2}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{57}$$

□

3.2　执行器扰动观测器

构建如下执行器扰动观测器:

$$\dot{\hat{v}}_{d2} = S_{d2}\hat{v}_{d2} + l_{d2}\tilde{X}_{vd} \tag{58a}$$

$$\dot{\hat{X}}_i = \hat{X}_{i+1} + f_i\left(\hat{\bar{X}}_i\right) + q_i^{\mathrm{T}}\hat{v}_{d2} + \tau_i\tilde{X}_{vd} \tag{58b}$$

$$\dot{\hat{X}}_n = U + f_i\left(\hat{\bar{X}}_n\right) + q_n^{\mathrm{T}}\hat{v}_{d2} + \tau_n\tilde{X}_{vd} \tag{58c}$$

其中 $\hat{X}_i,\ i=1,\cdots,n$ 为执行器状态估计值, $\hat{v}_{d2}$ 为扰动 v_{d2} 的估计值. 由于 $u_2(1)$ 可测量且 $u_2(1)=X_1+q_0^{\mathrm{T}}v_{d2}$, $\tilde{X}_{vd}=u_2(1)-\hat{X}_1-q_0^{\mathrm{T}}\hat{v}_{d2}=\tilde{X}_1+q_0^{\mathrm{T}}\tilde{v}_{d2}$ 表示观测器 (58) 的误差反馈值. 令 $\Gamma=[\tau_1,\cdots,\tau_n]^{\mathrm{T}}$, $\hat{\mathcal{X}}=[\hat{X}_1,\cdots,\hat{X}_n]^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{X}})=[f_1(\hat{\bar{X}}_1),\cdots,f_n(\hat{\bar{X}}_n)]^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\mathcal{X}}=\mathcal{X}-\hat{\mathcal{X}}$, $\tilde{\mathcal{F}}=\mathcal{F}(\mathcal{X})-\mathcal{F}(\hat{\mathcal{X}})$, $e_{d2}=v_{d2}-\hat{v}_{d2}$, 则观测器 (58a) ~ (58c) 重新表述为

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{v}}_{d2}\\ \dot{\hat{\mathcal{X}}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{d2} & 0\\ \mathcal{Q} & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{v}_{d2}\\ \hat{\mathcal{X}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ B\end{bmatrix}U+\begin{bmatrix}l_{d2}\\ \Gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0^{\mathrm{T}} & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{v}_{d2}\\ \tilde{\mathcal{X}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \mathcal{F}(\hat{\mathcal{X}})\end{bmatrix} \tag{59}$$

将式 (4) 减去式 (59) 得到误差系统:

$$\dot{\tilde{E}}_{obe}=A_{obe}\tilde{E}_{obe}-\Gamma_{obe}C_{obe}\tilde{E}_{obe}+\begin{bmatrix}0\\ \tilde{\mathcal{F}}\end{bmatrix} \tag{60}$$

其中 $\tilde{E}_{obe}=\begin{bmatrix}e_{d2}\\ \tilde{\mathcal{X}}\end{bmatrix}$, $A_{obe}=\begin{bmatrix}S_{d2} & 0\\ \mathcal{Q} & A\end{bmatrix}$, $\Gamma_{obe}=\begin{bmatrix}l_{d2}\\ \Gamma\end{bmatrix}$, $C_{obe}=\begin{bmatrix}q_0^{\mathrm{T}} & C\end{bmatrix}$. 由假设 2 可得 $(C_{obe},\ A_{obe})$ 可观测, 因此存在合适的观测器增益 Γ_{obe} 使得 $A_H=A_{obe}-\Gamma_{obe}C_{ode}$ 为赫尔维茨矩阵.

定理 3. 考虑观测器 (58), 在假设 2 和假设 3 的前提下, 选择合适的观测器增益 Γ_{obe} 使得 A_H 为赫尔维茨矩阵, 则观测误差 $\tilde{E}_{obe}$ 在范数 $|\cdot|$ 意义上指数收敛.

证明. 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$W_1=\tilde{E}_{obe}^{\mathrm{T}}P_2\tilde{E}_{obe} \tag{61}$$

$P_2\in\mathbf{R}^{n+n_{d2}}$ 为正定对称矩阵, 满足如下代数方程:

$$A_H^{\mathrm{T}}P_2+P_2A_H=-T_2 \tag{62}$$

其中 T_2 为正定对称矩阵, 对式 (61) 求导并代入式 (60) 到结果中可得

$$\begin{aligned}\dot{W}_1=&\left(\tilde{E}_{obe}^{\mathrm{T}}A_H^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}0 & \tilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right)P_2\tilde{E}_{obe}+\\ &\tilde{E}_{obe}^{\mathrm{T}}P_2\left(A_H\tilde{E}_{obe}+\begin{bmatrix}0\\ \tilde{\mathcal{F}}\end{bmatrix}\right)\le\\ &-\tilde{E}_{obe}^{\mathrm{T}}T_2\tilde{E}_{obe}+2\begin{bmatrix}0 & \tilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}P_2\tilde{E}_{obe}\end{aligned} \tag{63}$$

由假设 3 可得

$$\begin{aligned}&2\begin{bmatrix}0 & \tilde{\mathcal{F}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}P_2\tilde{E}_{obe}\le 2\left|\tilde{\mathcal{F}}\right||P_2|\left|\tilde{E}_{obe}\right|\le\\ &2c\left|\tilde{E}_{obe}\right||P_2|\left|\tilde{E}_{obe}\right|=2c\lambda_{\max}(P_2)\tilde{E}_{obe}^{\mathrm{T}}\tilde{E}_{obe}\end{aligned} \tag{64}$$

将式 (64) 和 (62) 代入式 (63) 易得

$$\dot{W}_1\le\left(-\lambda_{\min}(T_2)+2c\lambda_{\max}(P_2)\right)\tilde{E}_{obe}^{\mathrm{T}}\tilde{E}_{obe} \tag{65}$$

其中 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 分别代表矩阵最小和最大特征值. 因此当 $c<\frac{\lambda_{\min}(T)}{2\lambda_{\max}(P_2)}$ 时, 存在常数 $c_1>0$, 使得 $\dot{W}_1\le-c_1|\tilde{E}_{obe}|^2$. 由式 (61) 可得: $\lambda_{\min}(P_2)|\tilde{E}_{obe}|^2\le W_1\le\lambda_{\max}(P_2)|\tilde{E}_{obe}|^2$, 因此 $\tilde{E}_{obe}$ 在范数 $|\cdot|$ 意义上指数收敛. □

4 输出反馈调节器

如图 2 所示, 输出反馈闭环控制系统包括被控系统 (1), PDE 子系统扰动观测器 (41), 执行器状态扰动观测器 (58), 参考信号观测器 (40) 和控制器 $U(t)$. 如下定理将给出输出反馈闭环控制系统状态指数收敛性.

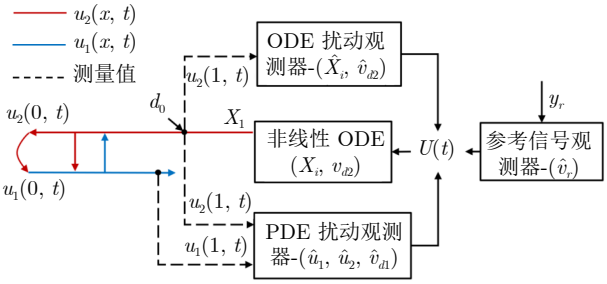


图 2 输出反馈闭环控制系统结构框图

Fig. 2 The block diagram of output-feedback closed-loop control system

定理 4. 在控制器 (11), (21), (26) 和 (31) 中利用观测器 (40), (41) 和 (58) 的状态观测值 $\hat{v}=col(\hat{v}_r,\ \hat{v}_{d1},\ \hat{v}_{d2})$, $\hat{u}$ 和 $\hat{X}_i,\ i=1,\cdots,n$. 令 $\hat{e}(x,\ t)=\hat{u}(x,\ t)-\mathcal{T}_c^{-1}[\pi](x)\hat{v}=[\hat{e}_i],\ i=1,\ 2$, 则输出反馈调节器 $\hat{\alpha}_l(\hat{v},\ \hat{u},\ \hat{\bar{X}}_l)$ 和 $\hat{U}(\hat{v},\ \hat{u},\ \hat{\bar{X}}_n)$ 确保误差状态 $e_{co}=col(e_r,\ e_{d1},\ e_{d2},\ \hat{e}_1,\ \hat{e}_2)$ 在范数 $\|e_{co}\|_{co}=(|e_r|_{\mathbf{C}^{n_r}}^2+|e_{d1}|_{\mathbf{C}^{n_{d1}}}^2+|e_{d2}|_{\mathbf{C}^{n_{d2}}}^2+\|\hat{e}_1\|_{L_2}^2+\|\hat{e}_2\|_{L_2}^2)^{\frac{1}{2}}$ 意义上指数收敛, 即 $\exists\bar{\alpha}_{co},\ \bar{M}_{co}>0$ 满足下列不等式:

$$\|e_{co}(t)\|_{co}\le\bar{M}_{co}e^{-\bar{\alpha}_{co}t}\|e_{co}(0)\|_{co},\ t\ge 0 \tag{66}$$

对于 $e_{co}(0)\in\mathbf{C}^{n_r}\oplus\mathbf{C}^{n_{d1}}\oplus\mathbf{C}^{n_{d2}}\oplus L_2(0,\ 1)\oplus L_2(0,\ 1)$.

证明. 通过定义新的坐标 $\hat{w}(x)=\mathcal{T}_c[\hat{u}(t)](z)$, 则观测器 (41) 转化为 $\hat{w}_t=\Lambda(x)\hat{w}_x+H(x)\hat{v}+\mathcal{T}_c[l_u]\times(x)\tilde{u}_1(1)$, 其中边界条件 $\hat{w}_1(0)=q\hat{w}_2(0)+P_2^{\mathrm{T}}\hat{v}$, $\hat{w}_2(1)=\hat{X}_1-\hat{t}_u+p_0^{\mathrm{T}}\hat{v}$. 分别应用坐标变换 $\hat{\varepsilon}(x,\ t)=\hat{w}(x,\ t)-\pi(x)\hat{v}$, $\hat{\bar{e}}_i=\hat{X}_i-\pi_i\hat{v}$ 到 $\hat{w}$ 系统和式 (58) 中得到

$$\hat{\varepsilon}_t(x)=\Lambda(x)\hat{\varepsilon}_x-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1) \tag{67a}$$

$$\hat{\varepsilon}_1(0)=q\hat{\varepsilon}_2(0) \tag{67b}$$

$$\hat{\varepsilon}_2(1)=\hat{\bar{e}}_1-\hat{t}_u \tag{67c}$$

$$\dot{\hat{\bar{e}}}_i=\hat{\bar{e}}_{i+1}+f_i\left(\hat{\bar{X}}_i\right)-\pi_i\mathcal{E}_{co}+\tau_i\tilde{X}_{vd} \tag{67d}$$

$$\dot{\hat{\bar{e}}}_n=\hat{U}_b+f_n\left(\hat{\bar{X}}_n\right)-\pi_n\mathcal{E}_{co}+\tau_n\tilde{X}_{vd} \tag{67e}$$

其中 $\mathcal{E}_{co}=[(l_rq_r^{\mathrm{T}}e_r)^{\mathrm{T}}\ \ (l_{d1}\tilde{u}_1(1))^{\mathrm{T}}\ \ (l_{d2}\tilde{X}_{vd})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. 再应用状态变换 $\hat{\gamma}_1=\hat{\bar{e}}_1-\hat{t}_u$, $\hat{\gamma}_i=\hat{\bar{e}}_i-\hat{\alpha}_{i-1}$, $i=2,\cdots,n$ 到系统 (67) 中得到如下闭环系统:

$$\hat{\varepsilon}_t(x)=\Lambda(x)\hat{\varepsilon}_x-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1) \tag{68a}$$

$$\hat{\varepsilon}_1(0)=q\hat{\varepsilon}_2(0) \tag{68b}$$

$$\hat{\varepsilon}_2(1)=\hat{\gamma}_1 \tag{68c}$$

$$\dot{\hat{\gamma}}_1=-\beta\mathrm{e}^{a}\hat{\varepsilon}_2(1)-k_1\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2-\pi_1\mathcal{E}_{co}+\tilde{X}_{vd} \tag{68d}$$

$$\dot{\hat{\gamma}}_l=\hat{\gamma}_{l+1}-k_l\hat{\gamma}_l-\hat{\gamma}_{l-1}-\pi_i\mathcal{E}_{co}+\tilde{X}_{vd} \tag{68e}$$

$$\dot{\hat{\gamma}}_n=-k_n\hat{\gamma}_n-\hat{\gamma}_{n-1}-\pi_n\mathcal{E}_{co}+\tilde{X}_{vd} \tag{68f}$$

考虑如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned}V_{co}=&\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-a_2x}\hat{\varepsilon}_1^2(x)}{\lambda_1(x)}\mathrm{d}x+\beta_2\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{a_2x}\hat{\varepsilon}_2^2(x)}{\lambda_2(x)}\mathrm{d}x+\\&\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-a_3x}\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(x)}{\lambda_1(x)}\mathrm{d}x+\beta_3\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{a_3x}\tilde{\varepsilon}_{u2}^2(x)}{\lambda_2(x)}\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\hat{\gamma}_j^2+e_r^{\mathrm{T}}P_re_r+e_{d1}^{\mathrm{T}}P_1e_{d1}\ +\tilde{E}_{obe}^{\mathrm{T}}P_2\tilde{E}_{obe}\end{aligned} \tag{69}$$

其中 β_2, $\beta_3>q^2$, a_2, $a_3>0$, P_r 是一个正定对称矩阵, 满足 $P_r\left(S_r-l_rq_r^{\mathrm{T}}\right)+\left(S_r-l_rq_r^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}P_r=-T_r$ 对于任意的矩阵 $T_r=T_r^{\mathrm{T}}>0$. 对式 (69) 求导并代入式 (68) 和 (49) 到结果中可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_{co}\le&-(\beta_2-q^2)\hat{\varepsilon}_2^2(0)-a_2\int_0^1\mathrm{e}^{-a_2x}\hat{\varepsilon}_1^2(x)\mathrm{d}x-\\&a_2\beta_2\int_0^1\mathrm{e}^{a_2x}\hat{\varepsilon}_2^2(x)\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-a_2}\hat{\varepsilon}_1^2(1)-\\&(\beta_3-q^2)\tilde{\varepsilon}_{u2}^2(0)-a_3\int_0^1\mathrm{e}^{-a_3x}\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(x)\mathrm{d}x-\\&a_3\beta_3\int_0^1\mathrm{e}^{a_3x}\tilde{\varepsilon}_{u2}^2(x)\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-a_3}\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(1)+\\&2\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-a_2x}\hat{\varepsilon}_1(x)e_1^{\mathrm{T}}(-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1))}{\lambda_1(x)}\mathrm{d}x+\\&2\beta_2\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{a_2x}\hat{\varepsilon}_2(x)e_2^{\mathrm{T}}(-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1))}{\lambda_2(x)}\mathrm{d}x-\\&\sum_{j=1}^nk_j\hat{\gamma}_j^2-\sum_{j=1}^n\hat{\gamma}_j\pi_j\mathcal{E}_{co}+\sum_{j=1}^n\hat{\gamma}_j\tau_j\tilde{X}_{vd}-\\&2l_{d1}^{\mathrm{T}}\tilde{\varepsilon}_{u1}(1)P_1e_{d1}-e_r^{\mathrm{T}}T_re_r-e_{d1}^{\mathrm{T}}T_1e_{d1}^{\mathrm{T}}-\\&(\lambda_{\min}(T_2)-2c\lambda_{\max}(P_2))\tilde{E}_{obe}^{\mathrm{T}}\tilde{E}_{obe}\end{aligned} \tag{70}$$

进一步由柯西–施瓦茨和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}&2\beta_2\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{a_2x}\hat{\varepsilon}_2(x)e_2^{\mathrm{T}}(-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1))}{\lambda_2(x)}\mathrm{d}x\le\\&\quad\frac{\beta_2}{s_1}\int_0^1\mathrm{e}^{a_2x}\hat{\varepsilon}_2^2(x)\mathrm{d}x+s_1\beta_2\times\\&\quad\int_0^1\mathrm{e}^{a_2x}\left(\frac{e_2^{\mathrm{T}}(-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1))}{\lambda_2(x)}\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}&2\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-a_2x}\hat{\varepsilon}_1(x)e_1^{\mathrm{T}}(-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1))}{\lambda_1(x)}\mathrm{d}x\le\\&\quad\frac{1}{s_2}\int_0^1\mathrm{e}^{-a_2x}\hat{\varepsilon}_1^2(x)\mathrm{d}x+s_2\times\\&\quad\int_0^1\mathrm{e}^{-a_2x}\left(\frac{e_1^{\mathrm{T}}(-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1))}{\lambda_1(x)}\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{72}$$

$$\sum_{j=1}^n\hat{\gamma}_j\pi_j\mathcal{E}_{co}\le\frac{1}{2s_3}\sum_{j=1}^n\hat{\gamma}_j^2+\frac{s_3}{2}\sum_{j=1}^n(\pi_j\mathcal{E}_{co})^2 \tag{73}$$

$$\sum_{j=1}^n\hat{\gamma}_j\tau_j\tilde{u}_2(1)\le\frac{1}{2s_4}\sum_{j=1}^n\hat{\gamma}_j^2+\frac{s_4}{2}\sum_{j=1}^n\left(\tau_j\tilde{X}_{vd}\right)^2 \tag{74}$$

$$2\tilde{\varepsilon}_{u1}(1)l_{d1}^{\mathrm{T}}P_1e_{d1}\le\frac{1}{s_5}\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(1)+s_5\left(l_{d1}^{\mathrm{T}}P_1e_{d1}\right)^2 \tag{75}$$

当选择足够大的 s_1, s_2, s_3, s_4, $s_5>0$ 时, 存在常数 $\mu_2>0$ 使得 $\dot{V}_{co}$ 满足:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{co}\le&-\left(a_2-\frac{1}{s_2}\right)\int_0^1\mathrm{e}^{-a_2x}\hat{\varepsilon}_1^2(x)\mathrm{d}x-\\&\left(a_2-\frac{1}{s_1}\right)\beta_2\int_0^1\mathrm{e}^{a_2x}\hat{\varepsilon}_2^2(x)\mathrm{d}x-\\&a_3\left(\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^{a_3x}}\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(x)\mathrm{d}x+\beta_3\int_0^1\mathrm{e}^{a_3x}\tilde{\varepsilon}_{u2}^2(x)\mathrm{d}x\right)-\\&\left(\mathrm{e}^{a_3}-\frac{1}{s_5}\right)\tilde{\varepsilon}_{u1}^2(1)-\sum_{j=1}^n\left(k_j-\frac{1}{2s_3}-\frac{1}{2s_4}\right)\hat{\gamma}_j^2-\\&(\lambda_{\min}(T_2)-2c\lambda_{\max}(P_2))\tilde{E}_{obe}^{\mathrm{T}}\tilde{E}_{obe}-\\&e_r^{\mathrm{T}}T_re_r-e_{d1}^{\mathrm{T}}T_1e_{d1}^{\mathrm{T}}+W_{\exp}\le\\&-\mu_2V_{co}+W_{\exp}\end{aligned} \tag{76}$$

其中

$$W_{\exp}=\frac{s_3}{2}\sum_{j=1}^{n}(\pi_j\mathcal{E}_{co})^2+$$

$$\frac{s_4}{2}\sum_{j=1}^{n}(\tau_j\tilde{u}_2(1))^2+s_5(l_{d1}^{\mathrm{T}}P_1e_{d1})^2+$$

$$s_2\int_0^1\mathrm{e}^{-a_3x}\left(\frac{\mathrm{e}_1^{\mathrm{T}}(-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1))}{\lambda_1(x)}\right)^2\mathrm{d}x+$$

$$s_1\beta_3\int_0^1\mathrm{e}^{a_3x}\left(\frac{e_2^{\mathrm{T}}(-\pi(x)\mathcal{E}_{co}+\mathcal{T}_c[l_u](x)\tilde{u}_1(1))}{\lambda_2(x)}\right)^2\mathrm{d}x \tag{77}$$

由于 $\tilde{u}_1(1)=e_{u1}(1)=\tilde{\varepsilon}_{u1}(1)+e_1^{\mathrm{T}}M(1)e_{d1}$ 且 $\tilde{X}_{vd}=\tilde{X}_1+q_0^{\mathrm{T}}\tilde{v}_{d2}=C_{obe}\tilde{E}_{obe}$, 因此 $\mathcal{E}_{co}$ 是一个由 $\tilde{E}_{obe}$, e_{d1}, $\tilde{\varepsilon}_u(1)$, e_r 组成的向量. 由上文可知 $\tilde{\varepsilon}_{u1}(1)$ 有限时间收敛, $\tilde{E}_{obe}$, e_{d1}, e_r 在范数意义上指数收敛, 因此 $W_{\exp}$ 指数收敛. 通过运用比较定理[28] 可得 V_{co} 指数收敛, 因此存在常数 $\bar{\alpha}_3$, $\bar{M}_3>0$ 使得

$$\left(|e_r|_{\mathbf{C}^{n_r}}^2+|e_{d1}|_{\mathbf{C}^{n_{d1}}}^2+|e_{d2}|_{\mathbf{C}^{n_{d2}}}^2+\|\hat{\varepsilon}_1\|_{L_2}^2+\|\hat{\varepsilon}_2\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$
$$\bar{M}_3\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_3t}\left(|e_r(0)|_{\mathbf{C}^{n_r}}^2+|e_{d1}(0)|_{\mathbf{C}^{n_{d1}}}^2+\right.$$
$$\left.|e_{d2}(0)|_{\mathbf{C}^{n_{d2}}}^2+\|\hat{\varepsilon}_1(0)\|_{L_2}^2+\|\hat{\varepsilon}_2(0)\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{78}$$

由 (7) 可得 $\hat{u}=\mathcal{T}_c^{-1}[\hat{w}](x)$, 因此 $\hat{e}=\mathcal{T}_c^{-1}[\hat{w}](x)-\mathcal{T}_c^{-1}[\pi](x)\hat{v}=\mathcal{T}_c^{-1}[\hat{\varepsilon}](x)$. 由于核函数 $L(x,y)$ 有界, $\hat{\varepsilon}$ 在范数意义上指数收敛性表明 $\|\hat{e}_1\|_{L_2}^2+\|\hat{e}_2\|_{L_2}^2$ 指数收敛. 因此 $\exists\bar{\alpha}_{co}$, $\bar{M}_{co}>0$ 使得不等式 (66) 恒成立. □

5 数值仿真

考虑具有二阶执行器的系统 (1), 其中系统参数配置如下: 式 (1a) 中, $\Lambda(x)=\begin{bmatrix}-4-x & 0\\ 0 & 1+\mathrm{e}^x\end{bmatrix}$, $A(x)=\begin{bmatrix}0 & 1+\cosh x\\ 1+x & 0\end{bmatrix}$, 当 $x\in[0.1,0.8]$ 时 $G(x)=1$, 否则 $G(x)=0$. 令式 (1b) 的 $q=2$, 执行器中的非线性函数 $f_1(\bar{X}_1)=\sin(X_1)$, $f_2(\bar{X}_2)=\sin(X_1X_2)$. 假设 PDE 子系统受到常值干扰, 执行器受到频率为 5 的正弦信号干扰, 为此分别设计扰动模型 $S_{d1}=0$, $v_{d1}(0)=1$, $S_{d2}=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -5 & 0\end{bmatrix}$, $v_{d2}(0)=[1,1]$ 并给定扰动增益 $Q_1=2$, $Q_2=1$, $Q_3=0.4$, $q_i=[0,2,0,2]^{\mathrm{T}}$, $i=0,1,2$. 假设 PDE 系统的被控输出 $y(t)=u_1(0.5,t)+D_3$, 控制目标为 $y(t)$ 准确跟踪上参考信号 $y_r(t)=2\cos(t)$, 因此设计参考模型 $S_r=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $q_r=[1,1]^{\mathrm{T}}$, $v_r(0)=[1,1]$. 此外 PDE 子系统的初始状态为 $u_1(x,0)=-2$, $u_2(x,0)=-1.8$, 执行器初始状态为: $X_1(0)=-0.2$, $X_2(0)=-0.2$.

状态反馈调节器设计. 采用有限差分方法求解控制核方程 (9) 和 (10) 以及调节方程 (14), 按照文献 [11] 的结论检验式 (14) 的可解性. 虚拟控制器 α_1 和实际控制器 U_b 的可调参数分别选择为: $a=0.7$, $\beta=5$, $k_1=5$, $k_2=5$.

输出反馈调节器设计. 由于 (S_r,q_r) 可观测, 选择参考观测器增益 $l_r=[1,1]^{\mathrm{T}}$. 对于扰动观测器 (41), 选择增益 $l_{d1}=[0.8,0.8]^{\mathrm{T}}$. 采用有限差分方法求解观测核方程 (46), (47) 以及调节方程 (50), 并检验 $(S_{d1},e_1^{\mathrm{T}}M(1))$ 的可观性. 若可观性满足, 则通过计算式 (51) 得到 PDE 观测器增益 $l_u(x)$. 对于扰动观测器 (58), 易验证假设 2 成立, 并且观测器增益分别选择为 $l_{d2}=[1,40]^{\mathrm{T}}$, $\Gamma=[15,20]^{\mathrm{T}}$. 参考及扰动观测器的初始值分别为: $\hat{v}_r(0)=[0.5,0.5]^{\mathrm{T}}$, $\hat{v}_{d1}(0)=[0.75,0.75]^{\mathrm{T}}$, $\hat{v}_{d2}(0)=[0,0]^{\mathrm{T}}$, $\hat{u}_1(x,0)=-1$, $\hat{u}_2(x,0)=-1-\sin x$, $\hat{X}_1(0)=-1$, $\hat{X}_2(0)=-1$. 进一步在状态反馈调节器基础上, 采用参考及扰动信号状态观测值构成输出反馈调节器.

控制算法对比. 我们将本文所提出的控制算法与文献 [11] 的控制算法进行比较. 由于文献 [11] 未考虑执行器动态特性的影响, 因此式 (1d) ~ (1e), (13d) ~ (13e) 和 (14e) ~ (14f) 在文献 [11] 中被忽略且式 (1c) 中的执行器状态 X_1 直接替换为控制输入 U. 进一步由式 (13c) 和 (14d) 可得文献 [11] 所构建的基于状态反馈调节器如下:

$$U_{com}(t)=\int_0^1e_2^{\mathrm{T}}K(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y+\pi_1v(t) \tag{79}$$

仿真对比采用与上文相同的系统参数.

仿真结果. 图 3 和图 4 分别描述了状态反馈控制下 PDE 子系统被控输出 $y(t)$ 以及控制输入 $U(t)$ 的轨迹. 在图 4 控制输入的驱动下, $y(t)$ 受到的干扰被抑制, 并且在小于 2 s 的时间内准确跟踪上参考信号 $y_r(t)$. 图 5 ~ 10 分别描述了输出反馈控制下的系统输出、控制输入、状态估计误差及扰动估计曲线. 图 5 表明 $y(t)$ 准确跟踪上参考信号 $y_r(t)$ 在小于 6 s 的时间内. 由于前期观测误差的存在, 相较于图 3, 图 5 的被控输出需要更长调节过程. 图 6 描述了输出反馈控制信号曲线, 相较于图 4, 图 6 曲线前期变化幅度更大, 后期与图 4 曲线基本保持一致. 图 7 和图 8 分别描述了 PDE 子系统观测误差的范数 $\|\tilde{u}_1\|$, $\|\tilde{u}_2\|$和执行器状态观测误差 $X_1-\hat{X}_1$, $X_2-\hat{X}_2$ 的收敛轨迹, 结果表明扰动观测器能够在存在干扰情况下准确估计 PDE 子系统和执行器的真实状态,

为控制器提供准确的系统状态. 图 9 描述了 PDE 子系统受到的常值扰动 D_i, $i = 1, 2, 3$ 及观测器 (41) 的扰动观测值 $\hat{D}_i$, $i = 1, 2, 3$. 图 10 描述了执行器受到的周期扰动 d_i, $i = 0, 1, 2$ 及观测器 (58) 的扰动观测值 $\hat{d}_i$, $i = 0, 1, 2$ (由于扰动增益 q_i, $i = 0, 1, 2$ 相同, 周期扰动 $d_i = q_i^{\mathrm{T}} v_{d2}$ 的轨迹相同, 扰动观测值 $\hat{d}_i = q_i^{\mathrm{T}} \hat{v}_{d2}$ 的轨迹同样相同). 图 9、10 表明扰动观测器 (41), (58) 能够准确跟踪外部系统所描述的一类参考信号, 为控制器抑制外界干扰提供准确信息. 图 11、12 表明采用文献 [11] 所提出控制器会使被控系统不稳定发散. 这是由于文献 [11] 忽略了执行器的动态特性, 而动态的执行器会影响系统稳定性, 因此状态反馈调节器 (79) 无法使系统稳定, 更无法实现信号跟踪. 相较于文献 [11], 本文所提出的控制算法能够弥补执行器的影响, 实现全局扰动抑制及信号跟踪.

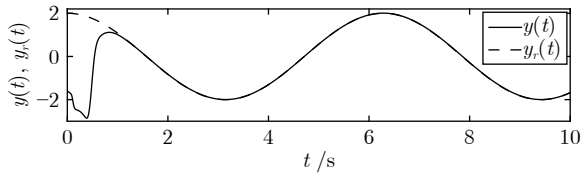


图 3　状态反馈控制下的被控输出 $y(t)$ 及参考信号 $y_r(t) = 2\cos(t)$

Fig. 3　The controlled output $y(t)$ under the state-feedback control and the reference signal $y_r(t) = 2\cos(t)$

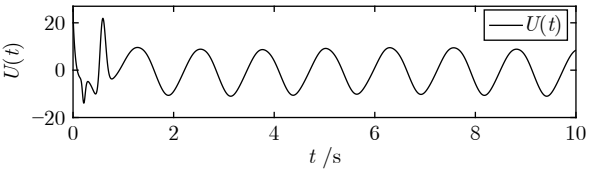


图 4　状态反馈控制器 $U(t)$ 轨迹

Fig. 4　The trajectory of state-feedback controller $U(t)$

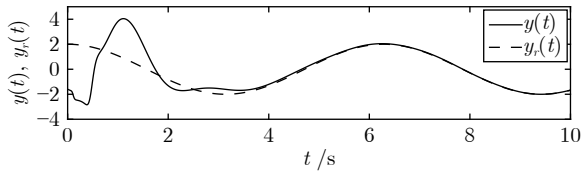


图 5　输出反馈控制下的被控输出 $y(t)$ 及参考信号 $y_r(t) = 2\cos(t)$

Fig. 5　The controlled output $y(t)$ under the output-feedback control and the reference signal $y_r(t) = 2\cos(t)$

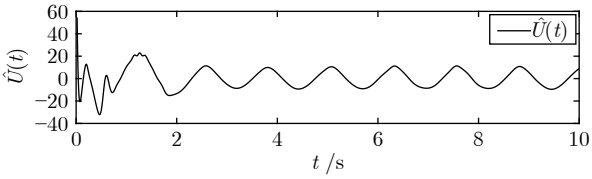


图 6　输出反馈控制器 $\hat{U}(t)$ 轨迹

Fig. 6　The trajectory of output-feedback controller $\hat{U}(t)$

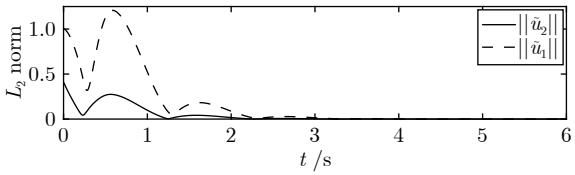


图 7　PDE 子系统观测误差的范数 $\|\tilde{u}_1\|$ 和 $\|\tilde{u}_2\|$

Fig. 7　The norms $\|\tilde{u}_1\|$ and $\|\tilde{u}_2\|$ of observer errors of PDE subsystem

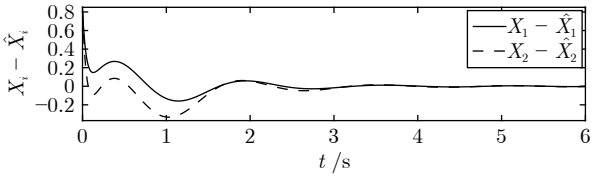


图 8　执行器状态观测误差 $X_1 - \hat{X}_1$ 和 $X_2 - \hat{X}_2$

Fig. 8　The observer errors $X_1 - \hat{X}_1$ and $X_2 - \hat{X}_2$ of actuator states

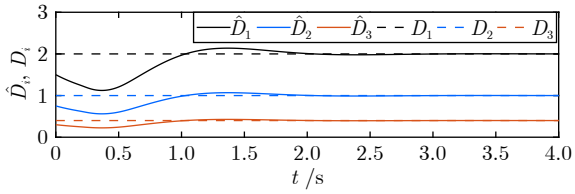


图 9　PDE 子系统受到的常值扰动 $D_i = Q_i^{\mathrm{T}} v_{d1}$, $i = 1, 2, 3$ 及相应的扰动观测值 $\hat{D}_i = Q_i^{\mathrm{T}} \hat{v}_{d1}$, $i = 1, 2, 3$

Fig. 9　The constant perturbations $D_i = Q_i^{\mathrm{T}} v_{d1}$, $i = 1, 2, 3$ to PDE subsystem and the corresponding disturbance observations $\hat{D}_i = Q_i^{\mathrm{T}} \hat{v}_{d1}$, $i = 1, 2, 3$

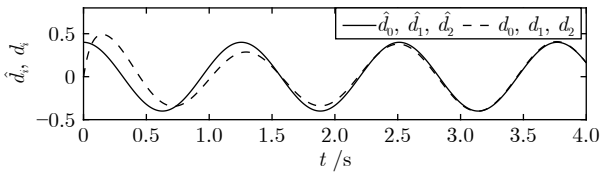


图 10　执行器受到的周期性扰动 $d_i = q_i^{\mathrm{T}} v_{d2}$, $i = 0, 1, 2$ 以及相应的扰动观测值 $\hat{d}_i = q_i^{\mathrm{T}} \hat{v}_{d2}$, $i = 0, 1, 2$

Fig. 10　The periodic perturbations $d_i = q_i^{\mathrm{T}} v_{d2}$, $i = 0, 1, 2$ to actuator and the corresponding disturbance observations $\hat{d}_i = q_i^{\mathrm{T}} \hat{v}_{d2}$, $i = 0, 1, 2$

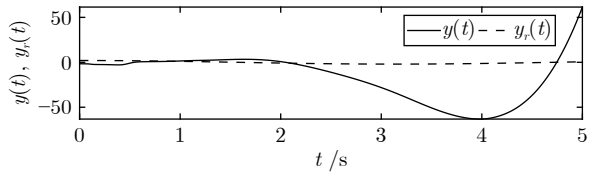


图 11 采用控制器 (79) 的系统被控输出 $y(t)$ 及参考信号 $y_r(t) = 2\cos(t)$

Fig. 11 The system controlled output $y(t)$ and reference signal $y_r(t) = 2\cos(t)$ using the controller (79)

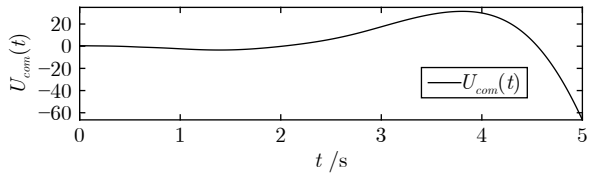


图 12 控制器 (79) 轨迹

Fig. 12 The trajectory of controller (79)

6 结论

本文研究了具有复杂执行器动态特性的双曲线型偏微分方程的输出调节问题, 所提出的基于状态反馈和输出反馈的调节器实现了被控系统全局扰动估计以及被控输出跟踪误差指数收敛. 值得注意的是, PDE 子系统可以被替换为其他类型的线性 PDE 系统例如扩散方程、波动方程等. 执行器动态特性可以由能够被反步法稳定且具有严格反馈形式的非线性系统描述. 未来的工作将考虑系统的不确定性以及研究相应的自适应输出调节策略.

References

1 Xu C, Sallet G. Exponential stability and transfer functions of processes governed by symmetric hyperbolic systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2002, **7**: 421−442

2 Landet I S, Pavlov A, Aamo O M. Modeling and control of heave-induced pressure fluctuations in managed pressure drilling. *IEEE Transaction Control System Technology*, 2012, **21**(4): 1340−1351

3 Boskovic D M, Krstic M. Backstepping control of chemical tubular reactors. *Computers & Chemical Engineering*, 2002, **26**(7−8): 1077−1085

4 Deutscher J. Output regulation for general linear heterodirectional hyperbolic systems with spatially-varying coefficients. *Automatica*, 2017, **85**: 34−42

5 Xu X, Dubljevic S. Output regulation boundary control of first-order coupled linear mimo hyperbolic pide systems. *International Journal of Control*, 2020, **93**(3): 410−423

6 Deutscher J, Gehring N, Kern R. Output feedback control of general linear heterodirectional hyperbolic ODE-PDE-ODE systems. *Automatica*, 2018, **95**: 472−480

7 Xu X, Dubljevic S. Output regulation for a class of linear boundary controlled first-order hyperbolic pide systems. *Automatica*, 2017, **85**: 43−52

8 Deutscher J, Gabriel J. Minimum time output regulation for general linear heterodirectional hyperbolic systems. *International Journal of Control*, 2020, **93**(8): 1826−1838

9 Zhang J, Qi J, Dubljevic S, Bo S. Output regulation for a first-order hyperbolic PIDE with state and sensor delays. *European Journal of Control*, 2022, **65**: Article No. 100643

10 Irscheid A, Deutscher J, Gehring N, Joachim R. Output regulation for general heterodirectional linear hyperbolic PDEs coupled with nonlinear ODEs. *Automatica*, 2023, **148**: Article No. 110748

11 Deutscher J. Finite-time output regulation for linear 2×2 hyperbolic systems using backstepping. *Automatica*, 2017, **75**: 54−62

12 Owens B A, Mann B P. Linear and nonlinear electromagnetic coupling models in vibration-based energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, **331**(4): 922−937

13 Susto G A, Krstic M. Control of PDE-ODE cascades with neumann interconnections. *Journal of Franklin Institute*, 2010, **347**(1): 284−314

14 Xu X, Tian Y, Yuan Y, Luan X, Liu F, Dubljevic S. Output regulation of linearized column froth flotation process. *IEEE Transaction Control System Technology*, 2020, **29**(1): 249−262

15 Li J, Wu Z, Liu Y. Adaptive stabilization for an uncertain reaction-diffusion equation with dynamic boundary condition at control end. *System & Control Letters*, 2022, **162**: 105−180

16 Liu W J, Krstic M. Backstepping boundary control of burgers′ equation with actuator dynamics. *System & Control Letters*, 2000, **41**(4): 291−303

17 Wang J, Krstic M. Output-feedback control of an extended class of sandwiched hyperbolic PDE-ODE systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2020, **66**(6): 2588−2603

18 Wang J, Krstic M. Delay-compensated control of sandwiched ODE-PDE-ODE hyperbolic systems for oil drilling and disaster relief. *Automatica*, 2020, **120**: 109−131

19 Wang J, Krstic M. Event-triggered output-feedback backstepping control of sandwich hyperbolic PDE systems. *IEEE Transaction Automatic Control*, 2022, **67**(1): 220−235

20 Wang J, Krstic M. Output feedback boundary control of a heat PDE sandwiched between two ODEs. *IEEE Transaction Automatic Control*, 2019, **64**(11): 4653−4660

21 Li J, Wu Z, Wen C. Adaptive stabilization for a reaction-diffusion equation with uncertain nonlinear actuator dynamics. *Automatica*, 2021, **128**: 109−594

22 Xiao Y, Yuan Y, Yang C, Luo B, Xu X, Dubljevic S. Adaptive neural tracking control of a class of hyperbolic PDE with uncertain actuator dynamics. *IEEE Transactions on Cybernetics*, DOI: 10.1109/TCYB.2022.3223168

23 Zhang B, Yang C, Zhu H, Shi P, Gui W. Controllable-domain-based fuzzy rule extraction for copper removal process control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, **26**(3): 1744−1756

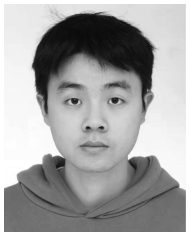
24 Lin Z, Stoorvogel A A, Saberi A. Output regulation for linear systems subject to input saturation. *Automatica*, 1996, **32**(1): 29−47

25 Raghavan S, Hedrick J K. Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 1994, **59**(2): 515−528

26 Vazquez R, Krstic M, Coron J M. Backstepping boundary stabilization and state estimation of a 2 × 2 linear hyperbolic system. In: Proceedings of Conference on Decision and Control and European Control Conference. Orlando, USA: 2011. 4937−4942

27 Kailath T. *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980.

28 Khalil H. *Nonlinear systems* (3rd edition). NJ: Prentice Hall, 2002.



肖 宇 中南大学自动化学院硕士研究生. 2021 年获得中南大学学士学位. 主要研究方向为分布参数系统自适应控制与输出调节.
E-mail: yu_xiao@csu.edu.cn
(**XIAO Yu** Master student at the School of Automation, Central South University. He received his bachelor degree from Central South University in 2021. His research interest covers adaptive control and output regulation of distributed parameter systems.)

徐晓东 中南大学自动化学院教授. 2017 年获得阿尔伯塔大学博士学位. 主要研究方向为无限维系统的鲁棒/最优控制和故障估计. 本文通信作者.
E-mail: XiaodongXu@csu.edu.cn
(**XU Xiao-Dong** Professor at the School of Automation, Central South University. He received his Ph.D. degree from the University of Alberta in 2017. His research interest covers robust/optimal control and fault estimation of infinite-dimensional systems. Corresponding author of this paper.)

阳春华 中南大学自动化学院教授. 2002 年获得中南大学博士学位. 主要研究方向为复杂工业过程建模与优化控制, 智能自动化系统与装置.
E-mail: ychh@csu.edu.cn
(**YANG Chun-Hua** Professor at the School of Automation, Central South University. She received her Ph.D. degree from Central South University in 2002. Her research interest covers modeling and optimal control of complex industrial process, intelligent automation systems and devices.)