第 49 卷 第 11 期 自 动 化 学 报 Vol. 49, No. 11
2023 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA November, 2023

PID 控制器参数的优化整定方法

刘 宁 [1, 2] 柴天佑 [1, 2]

摘 要 针对存在临界点的 A 类被控对象及不存在临界点的 B 类被控对象, 分别采用其 $-180°$ 和 $-120°$ 相位点的频率和增益提出了 PID (Proportional-integral-derivative) 控制器参数的优化整定方法. 基于 Tchebyshev 多项式和分数阶积分器求取被控对象 $-180°$ 或 $-120°$ 相位点的频率和增益, 建立其积分滞后模型. 采用负载扰动下跟踪误差平方和 (Sum of squares of tracking errors, SSE) 最小作为优化指标, 使闭环系统具有强的鲁棒性的最大灵敏度和最大补灵敏度为约束方程, 针对两类被控对象, 分别建立了基于 $-180°$ 和 $-120°$ 相位点频率和增益的 PID 控制器比例、积分与微分三个参数的优化整定规则. 通过与其他常用 PID 控制方法的仿真与物理对比实验, 表明所提方法的优越性.

关键词 PID 控制, Tchebyshev 多项式, 积分滞后模型, 跟踪误差平方和, 优化整定规则

引用格式 刘宁, 柴天佑. PID 控制器参数的优化整定方法. 自动化学报, 2023, **49**(11): 2272−2285

DOI 10.16383/j.aas.c220795

An Optimal Tuning Method of PID Controller Parameters

LIU Ning[1, 2] CHAI Tian-You[1, 2]

Abstract In this paper, a tuning method of PID (proportional-integral-derivative) controller parameters is proposed for class A controlled object with critical point and class B controlled object without critical point using the frequency and gain of the point at which its phase is $-180°$ and $-120°$ respectively. The frequency and gain of the controlled object at which its phase is $-180°$ or $-120°$ are obtained based on Tchebyshev polynomial and fractional order integrator, and the gain-integrator-delay model is established for the controlled object. Taking the minimum sum of squares of tracking error (SSE) under load disturbance as the optimization objective, and the maximum sensitivity and maximum complementary sensitivity as the constraint equations that give the closed-loop system strong robustness, a tuning rule of the proportion, integral and differential parameters of PID controller is established for two classes of plants based on the frequency and gain at which the phase is $-180°$ and $-120°$ respectively. Through simulation and physical comparison experiments with other common PID control methods, the superiority of the proposed method is demonstrated.

Key words PID control, Tchebyshev polynomial, gain-integrator-delay model, sum of squares of tracking errors (SSE), optimal tuning rule

Citation Liu Ning, Chai Tian-You. An optimal tuning method of PID controller parameters. *Acta Automatica Sinica*, 2023, **49**(11): 2272−2285

比例−积分−微分 (Proportional-integral-derivative, PID) 控制技术因其结构简单, 使用方便而广泛应用于实际工业过程, 目前约 95% 的控制回路采用 PID 控制技术[1−3]. PID 控制器的性能取决于比例、积分和微分三个参数. 文献 [4] 指出: "… 没有一种整定方法可以说是通用的或最优的, 迄今为止, 我们仍缺乏足够的知识来确定一个通用且最优的 PID 控制器参数的整定方法." 因此 PID 控制器参数整定方法一直是控制领域研究的重要方向.

目前工业领域广泛采用的 PID 控制器参数整定技术是 Ziegler-Nichols (Z-N) 法[5]. Z-N 法采用可以反映被控对象动态特性的临界点, 即其 Nyquist 曲线穿越负实轴的 $-180°$ 相位点的增益 K_{180} 和频率 ω_{180} 来设计 PID 控制器参数. Z-N 法使闭环系统对阶跃负载扰动的响应以 1/4 的震荡比衰减, 得到基于临界点增益和频率的简单的 PID 参数整定规则. Z-N 法将 PID 控制系统的开环传递函数在 ω_{180}

收稿日期 2022-10-10 录用日期 2023-01-29
Manuscript received October 10, 2022; accepted January 29, 2023
2020 年度辽宁省科技重大专项计划 (2020JH1/10100008), 国家自然科学基金重大项目 (61991404, 61991400), 中央高校基本科研业务费 (N2224004-01), 一体化过程控制学科创新引智基地 2.0 (B08015) 资助
Supported by 2020 Major Science and Technology Special Plan of Liaoning Province (2020JH1/10100008), Major Project of the National Natural Science Foundation of China (61991404, 61991400), Basic Research Expenses for Central Universities (N2224004-01), and 111 Project 2.0 (B08015)
本文责任编委 魏庆来
Recommended by Associate Editor WEI Qing-Lai
1. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室 沈阳 110819 2. 国家冶金自动化工程技术研究中心 沈阳 110819
1. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819 2. National Engineering Research Center of Metallurgy Automation, Shenyang 110819

点的频率响应调节为 $-0.6-0.28\mathrm{j}$, 在保证控制系统稳定的条件下, 获得好的抗扰性. Z-N 法仅适用于时间常数较大的慢动态工业过程[6−7]. 文献 [8−9] 以给定的 PID 控制系统开环传递函数在 ω_{180} 点的频率响应的幅值和相角为目标, 从而提出了基于临界点增益和频率的 PID 控制器参数整定规则. 文献 [10−11] 采用被控对象在临界点的频率和增益建立积分滞后模型, 文献 [12] 采用被控对象的稳态增益与 $-180°$ 相位点的增益和频率建立一阶惯性滞后或二阶欠阻尼滞后模型, 文献 [13] 采用被控对象的稳态增益、$-180°$ 相位点的增益和频率及该点 Nyquist 曲线的切角建立二阶滞后模型, 以期望的控制系统传递函数为目标, 提出了基于临界点增益和频率的 PID 控制器参数整定方法. 为提高 PID 控制系统的性能和鲁棒稳定性, 文献 [14] 针对基于临界点频率和增益的被控对象模型, 以 PID 控制器的积分增益最大为优化指标, 以敏感度为约束, 提出了基于临界点频率和增益的 PID 控制器参数整定规则. 但积分增益最大的优化指标只适用于平稳的被控对象, 当负载扰动频繁波动时, 不能减小跟踪误差[9].

上述 PID 参数整定方法要求被控对象必须存在临界点. 然而低阶或相对阶次较小、延时很小的被控对象不存在临界点. 文献 [15−16] 采用反映其动态特性的 $-120°$ 相位点的增益 K_{120} 和频率 ω_{120}, 以给定的 PID 控制系统开环传递函数在 ω_{120} 点的频率响应的幅值和相角为目标, 提出了 PID 参数整定规则. 针对离散被控对象, 文献 [17−18] 提出离散的 Z-N 法. 文献 [19] 以给定的 PID 控制系统开环传递函数在 ω_{180} 点的频率响应的幅值与相角为目标, 提出基于临界点的频率和增益的离散 PID 控制器参数整定方法.

上述 PID 控制器参数整定方法的 $-180°$ 或 $-120°$ 相位点的增益和频率参数采用实验方法近似求取. 当被控对象模型已知时, 文献 [18, 20] 提出临界点增益和频率的数学计算方法. 文献 [18] 引入比例控制与被控对象组成闭环回路, 通过临界稳定条件下闭环特征方程的根计算使闭环系统临界稳定的比例增益和对应的频率, 得到临界点的增益 K_{180} 和频率 ω_{180}. 该方法只适合低阶的被控对象. 文献 [20] 建立被控对象的相位等于 $-180°$ 的方程, 采用 Newton-Raphson 算法迭代求解该方程, 计算临界点的增益 K_{180} 和频率 ω_{180}. 迭代算法时间长且存在计算误差, 相位点增益和频率的求取误差影响 PID 控制系统的性能.

本文通过引入 Tchebyshev 多项式和分数阶积分器, 提出被控对象 $-180°$ 和 $-120°$ 相位点的频率和增益的求取方法. 为了获得基于相位点频率与增益的 PID 参数优化整定规则, 本文基于被控对象指定相位点频率和增益的积分滞后模型, 以负载扰动下跟踪误差的平方和 (sum of squares of tracking errors, SSE) 最小为优化目标, 以最大灵敏度和最大补灵敏度为约束, 提出实现上述优化性能指标的基于被控对象相位点频率和增益的 PID 控制器参数整定规则. 采用存在临界点和不存在临界点的被控对象的仿真和物理实验, 表明所提方法的优越性.

1 被控对象模型

本文的被控对象为[18, 20]:

$$A(z^{-1})y(k)=z^{-d}B(z^{-1})u(k) \tag{1}$$

其中, $u(k)$ 为被控对象的输入, $y(k)$ 为被控对象的输出, d 为系统延时, $k=t/T_0=0,1,2,\cdots$ 为离散的采样时间, T_0 为采样周期, $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 为关于 z^{-1} 的多项式, 即为:

$$A(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n}a_iz^{-i}=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n} \tag{2}$$

$$B(z^{-1})=\sum_{i=1}^{n}b_iz^{-i}=b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n} \tag{3}$$

其中, n 表示系统阶次. 以上被控对象的传递函数为:

$$G_P(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_n}{z^d(z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n)} \tag{4}$$

本文考虑的被控对象包括两类: 一类是频率响应经过 $-180°$ 相位线 (负实轴) 的被控对象, 称为 A 类被控对象, 这类被控对象存在临界点, 包括大多数存在延时的工业被控对象; 一类是频率响应不经过 $-180°$ 相位线但经过 $-120°$ 相位线的被控对象, 称为 B 类被控对象, 这类被控对象不存在临界点. B 类被控对象主要包括稳定的二阶最小相位系统和很多相对阶次小于 3 的系统[15].

对于 A 类被控对象, 采用其 $-180°$ 相位点的数字频率 θ_{180} 和增益 K_{180} 表征被控对象的动态特性, 该点被称为临界点[14]; 对于 B 类被控对象, 采用其 $-120°$ 相位点的数字频率 θ_{120} 和增益 K_{120} 描述被控对象的动态特性[15−16]. 为统一描述两类被控对象在指定相位点的频率和增益的求取方法及 PID 控制器参数的优化, 定义 θ_φ 和 K_φ 表示被控对象在指定相位点的频率和增益:

$$\theta_\varphi = \min_{0<\theta<\pi} \theta : \angle G_P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = -\varphi$$

$$K_\varphi = |G_P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\varphi})| \tag{5}$$

若 $G_P(z)$ 为 A 类被控对象, θ_φ 和 K_φ 表示其 $-180°$ 相位点的频率和增益, 即

$$\varphi = \pi,\ \theta_\varphi = \theta_{180},\ K_\varphi = K_{180} \tag{6}$$

若 $G_P(z)$ 为 B 类被控对象, θ_φ 和 K_φ 表示其 $-120°$ 相位点的频率和增益, 即

$$\varphi = \frac{2\pi}{3},\ \theta_\varphi = \theta_{120},\ K_\varphi = K_{120} \tag{7}$$

1.1 $-180°$ 和 $-120°$ 相位点的频率和增益的求取方法

本文引入 Tchebyshev 多项式[21] 和分数阶积分器[22] 提出两类被控对象的 $-180°$ 和 $-120°$ 相位点的数字频率和增益的求取方法如下. 引入分数阶积分器 $F(z)$, 串联 B 类被控对象传递函数 (4) 使其频率响应穿越 $-180°$ 相位. 对于 A 类被控对象, $F(z) = 1$. 这样可采用统一的方法求取两类对象的频率 θ_φ 和增益 K_φ. 引入 Tchebyshev 多项式, 将被控对象传递函数关于超越函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ 的高次幂的复杂的相位方程转化为关于实变量 u 的方程, 通过求解该方程即可得到被控对象传递函数的 $-180°$ 和 $-120°$ 相位点的数字频率和增益.

定义传递函数:

$$H(z) = G_P(z)F(z) \tag{8}$$

若 $G_P(z)$ 为 A 类被控对象, 令 $F(z) = 1$; 若 $G_P(z)$ 为 B 类被控对象, 令 $F(z)$ 为如下的分数阶积分器:

$$F(z) = \left(\frac{2}{T_0}\frac{z-1}{z+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \tag{9}$$

由文献 [15, 23] 知, 以上分数阶积分器的相角始终为 $-60°$, 即:

$$\angle F(z) = -60° \tag{10}$$

由于分数阶积分器 (9) 无法直接求解, 采用连分式展开 (Continued fraction expansion, CFE) 技术[22] 将其近似为整数阶系统计算频率响应:

$$\widetilde{F}(z) = CFE\{F(z)\} = \frac{P(z)}{\Pi(z)} = \frac{p_0 z^m + p_1 z^{m-1} + \cdots + p_m}{\alpha_0 z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \cdots + \alpha_m} \tag{11}$$

其中, $CFE\{x\}$ 表示对 x 的连续分式展开, $P(z)$ 和 $\Pi(z)$ 为关于 z 的多项式, m 表示近似的阶次, 本文令 $m = 5$, 由文献 [22] 知 $P(z)$ 和 $\Pi(z)$ 为:

$$P(z) = p_0 z^5 + p_1 z^4 + p_2 z^3 + p_3 z^2 + p_4 z + p_5 \tag{12}$$

其中,

$$p_0 = 25.63\left(\frac{2}{T_0}\right)^{-\frac{2}{3}};\ p_1 = 17.09\left(\frac{2}{T_0}\right)^{-\frac{2}{3}};$$

$$p_2 = -23.41\left(\frac{2}{T_0}\right)^{-\frac{2}{3}};\ p_3 = -12.45\left(\frac{2}{T_0}\right)^{-\frac{2}{3}};$$

$$p_4 = 3.83\left(\frac{2}{T_0}\right)^{-\frac{2}{3}};\ p_5 = \left(\frac{2}{T_0}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Pi(z) = \alpha_0 z^5 + \alpha_1 z^4 + \alpha_2 z^3 + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 z + \alpha_5 \tag{13}$$

其中,

$$\alpha_0 = 25.63;\ \alpha_1 = -17.09;\ \alpha_2 = -23.41;$$

$$\alpha_3 = 12.45;\ \alpha_4 = 3.83;\ \alpha_5 = -1$$

采用近似分数阶积分器 (11), $H(z)$ 可写为:

$$H(z) = G_P(z)\tilde{F}(z) = \frac{\beta(z)}{\chi(z)} = \frac{\beta_1 z^{m+n-1} + \beta_2 z^{m+n-2} + \cdots + \beta_{m+n}}{z^{m+n+d} + \chi_1 z^{m+n+d-1} + \cdots + \chi_{m+n} z^d} \tag{14}$$

通过引入 $F(z)$, 对两类被控对象, 构造的传递函数 $H(z)$ 必与负实轴相交.

令

$$u = -\cos\theta \tag{15}$$

则单位圆上 z 可以写为[21]:

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta = -u + \mathrm{j}\sqrt{1-u^2} \tag{16}$$

随着 θ 从 0 到 π, u 在−1 到 1 之间运动.

由于

$$z^\kappa = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\kappa\theta} = \cos\kappa\theta + \mathrm{j}\sin\kappa\theta \tag{17}$$

定义:

$$c_\kappa := \cos\kappa\theta,\ s_\kappa := \frac{\sin\kappa\theta}{\sin\theta} \tag{18}$$

由文献 [21, 24] 知, c_κ 和 s_κ 为关于 u 的第一类和第二类 Tchebyshev 多项式. 则 z^κ 等于

$$z^\kappa = c_\kappa(u) + \mathrm{j}\sqrt{1-u^2}s_\kappa(u) \tag{19}$$

采用如下的递推公式可求得 $c_\kappa(u)$ 和 $s_\kappa(u)$:

$$s_\kappa(u) = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial c_\kappa(u)}{\partial u},$$

$$c_{\kappa+1}(u) = -uc_\kappa(u) - (1-u^2)s_\kappa(u),\ \kappa = 1, 2, \cdots \tag{20}$$

将式 (19) 代入式 (14) 可得 $\beta(u)$ 和 $\chi(u)$:

$$\beta(u) = R_\beta(u) + \mathrm{j}\sqrt{1-u^2}T_\beta(u) \tag{21}$$

$$\chi(u) = R_\chi(u) + \mathrm{j}\sqrt{1-u^2}T_\chi(u) \tag{22}$$

式中, $R_\beta(u)$, $T_\beta(u)$, $R_\chi(u)$, $T_\chi(u)$ 分别为

$$R_\beta(u)=\beta_1 c_{m+n-1}(u)+\cdots+\beta_{m+n-1}c_1(u)+\beta_{m+n} \tag{23}$$

$$T_\beta(u)=\beta_1 s_{m+n-1}(u)+\cdots+\beta_{m+n-1}s_1(u) \tag{24}$$

$$R_\chi(u)=c_{m+n+d}(u)+\cdots+\chi_{m+n-1}c_{d+1}(u)+\chi_{m+n}c_d(u) \tag{25}$$

$$T_\chi(u)=s_{m+n+d}(u)+\cdots+\chi_{m+n-1}s_{d+1}(u)+\chi_{m+n}s_d(u) \tag{26}$$

$H(z)$ 可以写为:

$$H(z)|_{z=-u+\mathrm{j}\sqrt{1-u^2}}=\left.\frac{\beta(z)\overline{\chi}(z)}{\chi(z)\overline{\chi}(z)}\right|_{z=-u+\mathrm{j}\sqrt{1-u^2}}=H(u)=\mathrm{Re}(H(u))+\mathrm{j}\mathrm{Im}(H(u)) \tag{27}$$

其中, $\overline{\chi}(z)$ 为 $\chi(z)$ 的复共轭. $\mathrm{Re}(\cdot)$ 和 $\mathrm{Im}(\cdot)$ 分别表示实部和虚部, $\mathrm{Re}(H(u))$ 和 $\mathrm{Im}(H(u))$ 为

$$\mathrm{Re}(H(u))=\frac{R_\beta(u)R_\chi(u)+(1-u^2)T_\beta(u)T_\chi(u)}{R_\chi^2(u)+(1-u^2)T_\chi^2(u)} \tag{28}$$

$$\mathrm{Im}(H(u))=\sqrt{1-u^2}\frac{T_\beta(u)R_\chi(u)-R_\beta(u)T_\chi(u)}{R_\chi^2(u)+(1-u^2)T_\chi^2(u)} \tag{29}$$

由于所求 K_φ 和 θ_φ 为 $H(z)$ 的 Nyquist 曲线与负实轴相交的第一个交点的增益和频率, 定义

$$u_\varphi=-\cos\theta_\varphi \tag{30}$$

则 K_φ 和 u_φ 满足如下的方程:

$$\mathrm{Re}(H(u_\varphi))=-K_\varphi|\tilde{F}(u_\varphi)| \tag{31}$$

$$\mathrm{Im}(H(u_\varphi))=0 \tag{32}$$

由式 (29) 知

$$T_\beta(u_\varphi)R_\chi(u_\varphi)-R_\beta(u_\varphi)T_\chi(u_\varphi)=0 \tag{33}$$

或者

$$\sqrt{1-u_\varphi^2}=0 \tag{34}$$

由于 u 的取值范围为 $[-1, 1]$, 且 $u=\pm1$ 对应于 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$, 而 $\theta_\varphi\neq0$ 且 $\theta_\varphi\neq\pi$, 因此 u_φ 满足

$$T_\beta(u_\varphi)R_\chi(u_\varphi)-R_\beta(u_\varphi)T_\chi(u_\varphi)=0 \tag{35}$$

$$R_\beta(u_\varphi)R_\chi(u_\varphi)+(1-u_\varphi^2)T_\beta(u_\varphi)T_\chi(u_\varphi)<0 \tag{36}$$

$$-1<u_\varphi<1 \tag{37}$$

由式 (20) 和 (23) ~ (26) 知, 由于传递函数 $G_P(z)$ 和 $\tilde{F}(z)$ 系数可知, 式 (35) 和 (36) 所有系数已知. 在 $H(z)$ 的 Nyquist 曲线上, 可能存在多个虚部为 0 的点, 而 θ_φ 为其中使 $\mathrm{Re}(H)<0$ 的最小频率. 由式 (15) 知, u 为关于 θ 的单调递增函数, 因此 u_φ 为 $(-1, 1)$ 区间内使式 (36) 小于 0 的式 (35) 的最小解.

由式 (30) 可得

$$\theta_\varphi=\arccos(-u_\varphi) \tag{38}$$

将 u_φ 代入式 (28) 可得 $\mathrm{Re}(H(u_\varphi))$, 当被控对象为 A 类, 由式 (31) 得

$$K_{180}=-\mathrm{Re}(H(u_\varphi)) \tag{39}$$

当被控对象为 B 类, 将 u_φ 代入式 (19), 并由式 (11) ~ (13) 求得 $\tilde{F}(u_\varphi)$ 为:

$$\tilde{F}(u_\varphi)=\mathrm{Re}(\tilde{F}(u_\varphi))+\mathrm{j}\mathrm{Im}(\tilde{F}(u_\varphi)) \tag{40}$$

其中, $\mathrm{Re}(\tilde{F}(u_\varphi))$ 和 $\mathrm{Im}(\tilde{F}(u_\varphi))$ 为

$$\mathrm{Re}(\tilde{F}(u_\varphi))=\frac{R_P(u_\varphi)R_\Pi(u_\varphi)+(1-u_\varphi^2)T_P(u_\varphi)T_\Pi(u_\varphi)}{R_\Pi^2(u_\varphi)+(1-u_\varphi^2)T_\Pi^2(u_\varphi)}$$

$$\mathrm{Im}(\tilde{F}(u_\varphi))=\sqrt{1-u_\varphi^2}\frac{T_P(u_\varphi)R_\Pi(u_\varphi)-R_P(u_\varphi)T_\Pi(u_\varphi)}{R_\Pi^2(u_\varphi)+(1-u_\varphi^2)T_\Pi^2(u_\varphi)}$$

其中,

$$R_P(u_\varphi)=p_0c_5(u_\varphi)+p_1c_4(u_\varphi)+p_2c_3(u_\varphi)+p_3c_2(u_\varphi)+p_4c_1(u_\varphi)+p_5$$

$$T_P(u_\varphi)=p_0s_5(u_\varphi)+p_1s_4(u_\varphi)+p_2s_3(u_\varphi)+p_3s_2(u_\varphi)+p_4s_1(u_\varphi)$$

$$R_\Pi(u_\varphi)=\alpha_0c_5(u_\varphi)+\alpha_1c_4(u_\varphi)+\alpha_2c_3(u_\varphi)+\alpha_3c_2(u_\varphi)+\alpha_4c_1(u_\varphi)+\alpha_5$$

$$T_\Pi(u_\varphi)=\alpha_0s_5(u_\varphi)+\alpha_1s_4(u_\varphi)+\alpha_2s_3(u_\varphi)+\alpha_3s_2(u_\varphi)+\alpha_4s_1(u_\varphi)$$

由式 (31) 得

$$K_{120}=-\frac{\mathrm{Re}(H(u_\varphi))}{|\tilde{F}(u_\varphi)|} \tag{41}$$

其中,

$$|\tilde{F}(u_\varphi)|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(\tilde{F}(u_\varphi))+\mathrm{Im}^2(\tilde{F}(u_\varphi))} \tag{42}$$

1.2 基于指定相位点频率和增益的被控对象模型

由 1.1 节得到的两类被控对象在 $-180°$ 相位点或 $-120°$ 相位点的频率和增益建立积分滞后模型. 为方便 PID 控制器参数优化指标的设计, 将两类被控对象的离散积分滞后模型统一描述为[11, 25–26]:

$$\tilde{G}_P(z)=\frac{K_\varphi|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\varphi}-1|}{z^{\frac{\pi}{\eta\theta_\varphi}}(z-1)} \tag{43}$$

其中, K_φ 和 θ_φ 由式 (5) ~ (7) 给出, 分别为 $-180°$ 或

$-120°$ 相位点的增益和频率. η 决定了两类被控对象的积分滞后模型的延时项的相位滞后, 若 G_P 为 A 类被控对象, $\eta=2$; 若 G_P 为 B 类被控对象, $\eta=6$.

对于积分滞后模型 (43), 若 $G_P(z)$ 为 A 类被控对象, 在 θ_{180} 点, 有

$$\angle\tilde{G}_P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{180}})=\angle\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}=-\pi$$

$$|\tilde{G}_P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{180}})|=K_{180} \tag{44}$$

即积分滞后模型 (43) 与被控对象的传递函数 (4) 在 θ_{180} 点的频率响应一致. 同理, 若 $G_P(z)$ 为 B 类被控对象, 在 θ_{120} 点, 有

$$\angle\tilde{G}_P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{120}})=\angle\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{2}=-\frac{2\pi}{3}$$

$$|\tilde{G}_P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{120}})|=K_{120} \tag{45}$$

此时积分滞后模型 (43) 与被控对象的传递函数 (4) 在 θ_{120} 点的频率响应一致.

采用基于指定相位点频率和增益的积分滞后模型 (43) 的目的是设计优化的 PID 控制器参数, 式 (43) 不需要物理实现, 因此该模型不需要必须为有理真分式.

2 PID 控制器参数的优化整定方法

2.1 PID 控制器参数的优化整定策略

采用被控对象的积分滞后模型 (43), 以负载扰动下跟踪误差的平方和最小作为优化指标, 闭环系统的最大灵敏度在 1.2 到 2 之间[14, 27], 最大补灵敏度在 1 到 1.5 之间[14, 27], 及 PID 控制器的微分时间常数 T_D 等于积分时间常数 T_I 的四分之一[28] 作为约束方程, 求取基于被控对象指定相位点频率和增益的 PID 控制器参数整定规则.

首先利用负载扰动的低频特性, 跟踪误差对负载扰动的响应主要取决于 PID 控制器[27], 得到负载扰动下跟踪误差平方和的近似表达式.

为了使 PID 控制器参数的选择与被控对象指定相位点的频率 θ_φ 和增益 K_φ 相联系, 引入参数 ρ_K 和 ρ_T 使 $K_P=\rho_K/K_\varphi$, $T_I=2\pi\rho_T T_0/\theta_\varphi$. 采用序列二次规划算法求解实现上述优化指标的基于 θ_φ 的 ρ_K 和 ρ_T, 从而建立基于被控对象指定相位点频率和增益的 PID 控制器参数优化的整定规则.

2.2 PID 参数整定的优化性能指标

PID 控制器为:

$$u(k)=u(k-1)+K_P[e(k)-e(k-1)]+\frac{K_PT_0}{T_I}e(k)+\frac{K_PT_D}{T_0}[e(k)-2e(k-1)+e(k-2)] \tag{46}$$

其中, K_P 为 PID 控制器的比例增益, T_I 和 T_D 为积分时间常数和微分时间常数, T_0 为采样周期. 上述 PID 控制器的传递函数为:

$$G_c(z)=K_P\frac{(1+\frac{T_0}{T_I}+\frac{T_D}{T_0})z^2+(-1-2\frac{T_D}{T_0})z+\frac{T_D}{T_0}}{z(z-1)} \tag{47}$$

在负载扰动 $v(k)$ 下, 被控对象模型 (43) 在 PID 控制下的闭环控制系统如图 1 所示. 其中 $y_{sp}(k)$ 为设定值, $u(k)$ 为被控对象输入, $y(k)$ 为被控过程输出, $e(k)$ 为跟踪误差, $e(k)=y_{sp}(k)-y(k)$.

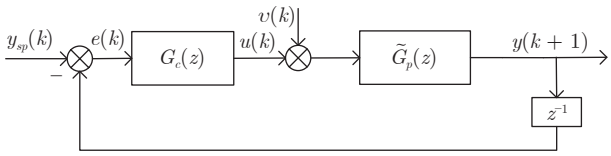


图 1 闭环控制系统结构

Fig. 1 Structure of closed-loop control system

定义 $e_v(k)$ 为扰动信号 $v(k)$ 下的跟踪误差, 即 $y_{sp}(k)=0$ 时, 跟踪误差 $e(k)$ 对扰动信号 $v(k)$ 的响应. 扰动 $v(k)$ 到跟踪误差 $e(k)$ 的传递函数为

$$G_v(z)=-\frac{1}{G_c(z)}\frac{G_c(z)\tilde{G}_P(z)}{1+G_c(z)\tilde{G}_P(z)} \tag{48}$$

由于 PID 控制器包含积分, 因此上式中,

$$\lim_{z\to1}\frac{G_c(z)\tilde{G}_P(z)}{1+G_c(z)\tilde{G}_P(z)}=1 \tag{49}$$

由于负载扰动 $v(k)$ 通常是低频的[27], 由式 (48) 和 (49) 知, 跟踪误差 $e(k)$ 对负载扰动 $v(k)$ 的响应主要取决 PID 控制器. 因此扰动 $v(k)$ 到跟踪误差 $e(k)$ 的传递函数可近似表示为[27]:

$$G_v(z)\approx-\frac{1}{G_c(z)} \tag{50}$$

在采用指定相位点频率和增益的 PID 控制器参数整定方法[5, 8–12, 14–18] 中, PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D 可写为关于指定相位点增益 K_φ 的倒数和周期 T_φ ($T_\varphi=2\pi T_0/\theta_\varphi$) 的线性表达式. 因此本文为了使 PID 控制器参数的选择与被控对象在指定相位点的频率 θ_φ 和增益 K_φ 相联系, 引入无量纲参数 ρ_K 和 ρ_T, 并利用约束方程 $T_D=T_I/4$, 将 PID 控制器参数表示为:

$$K_P=\frac{\rho_K}{K_\varphi} \tag{51}$$

$$T_I=\rho_T T_\varphi=\frac{2\pi\rho_T}{\theta_\varphi}T_0 \tag{52}$$

$$T_D = \frac{1}{4}\rho_T T_\varphi = \frac{\pi\rho_T}{2\theta_\varphi}T_0 \tag{53}$$

令 $h = \theta_\varphi/(\rho_T\pi)$, 由式 (47) 知, $G_c(z)$ 为:

$$G_c(z) = \frac{\rho_K[(h^2+2h+1)z^2+(-2h-2)z+1]}{2hK_\varphi z(z-1)} \tag{54}$$

将其代入式 (50), 得:

$$G_v(z) \approx -\frac{2K_\varphi hz(z-1)}{\rho_K[(z-1)^2+2hz(z-1)+h^2z^2]} = -\frac{2K_\varphi hz(z-1)}{\rho_K(1+h)^2(z-\frac{1}{1+h})^2} \tag{55}$$

由文献 [29] 知当扰动 $v(k)$ 为单位阶跃信号, 则 $e_v(k)$ 为:

$$e_v(k) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}G_v(z)\right\} \approx Z^{-1}\left\{-\frac{2K_\varphi hz^2}{\rho_K(1+h)^2(z-\frac{1}{1+h})^2}\right\} = -\frac{2K_\varphi h(k+1)}{\rho_K(1+h)^2(1+h)^k} \tag{56}$$

其中 Z^{-1} 为 z 逆变换. 则闭环系统在单位阶跃扰动下的跟踪误差的平方和为:

$$SSE_v = \sum_{k=0}^{\infty}[e_v(k)]^2 \approx \frac{4K_\varphi^2}{\rho_K^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{h(k+1)}{(1+h)^2(1+h)^k}\right]^2 = \frac{4K_\varphi^2(h^2+2h+2)}{\rho_K^2 h(h+2)^3} = \frac{4K_\varphi^2\left[(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T})^2+2(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T})+2\right]}{\rho_K^2(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T})(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T}+2)^3} \tag{57}$$

上式中, K_φ 只决定 SSE_v 指标的值, 不影响 ρ_K 和 ρ_T 的优化解, 因此选择优化指标为:

$$J_1 = \frac{SSE_v}{K_\varphi^2} = \frac{4\left[(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T})^2+2(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T})+2\right]}{\rho_K^2(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T})(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T}+2)^3} \tag{58}$$

以 ρ_K 和 ρ_T 为决策变量, 式 (58) 为优化指标的 PID 参数整定的优化模型为:

$$\min_{\rho_K,\,\rho_T\in\mathbf{R}^+} J_1 = \frac{4\left[(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T})^2+2(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T})+2\right]}{\rho_K^2(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T})(\frac{\theta_\varphi}{\pi\rho_T}+2)^3} \tag{59}$$

$$\text{s.t.}\quad M_s \le M_s^{ub} \tag{60}$$

$$M_t \le M_t^{ub} \tag{61}$$

$$T_D = \frac{T_I}{4} \tag{62}$$

式中 M_s 和 M_t 分别为闭环系统的最大灵敏度和最大补灵敏度, 由文献 [14] 知 M_s 和 M_t 分别为:

$$M_s = \left\|\frac{1}{1+\tilde{G}_{ol}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})}\right\|_\infty \tag{63}$$

$$M_t = \left\|\frac{\tilde{G}_{ol}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})}{1+\tilde{G}_{ol}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})}\right\|_\infty \tag{64}$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 "·" 的 H_∞ 范数, $\tilde{G}_{ol}$ 为图 1 所示的 PID 闭环控制系统的开环传递函数, 由式 (43) 和 (54) 知 $\tilde{G}_{ol}(z)$ 为

$$\tilde{G}_{ol}(z) = G_c(z)\tilde{G}_P(z) = \rho_K|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\varphi}-1| \times \frac{[(h^2+2h+1)z^2+(-2h-2)z+1]}{2hz(z-1)^2 z^{\frac{\pi}{\eta\theta_\varphi}}} = \rho_K|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\varphi}-1| \times \frac{[(\frac{\theta_\varphi^2}{\pi^2\rho_T^2}+\frac{2\theta_\varphi}{\pi\rho_T}+1)z^2+(-\frac{2\theta_\varphi}{\pi\rho_T}-2)z+1]}{\frac{2\theta_\varphi}{\pi\rho_T}z(z-1)^2 z^{\frac{\pi}{\eta\theta_\varphi}}} \tag{65}$$

M_s^{ub} 和 M_t^{ub} 为 M_s 和 M_t 的上界, 设 $M_s^{ub}=1.7$, $M_t^{ub}=1.5$.

2.3 优化 PID 控制器参数的整定规则

由于式 (58) 和 (65) 中所采用的被控对象的数字频率 θ_φ 的取值范围为 $(0, \pi)$, 为了求出使 J_1 最小的 ρ_K 和 ρ_T, 将 θ_φ 按间隔 0.02 网格化, 对每个网格点, 使用序列二次规划 (Sequential quadratic programming, SQP) 算法[30] 求性能指标 (59) 最小的最优解, 图 2 和图 3 分别表示 A 类被控对象与 B 类被控对象 ρ_K 和 ρ_T 的最优解曲线. 采用 θ_φ 和相应的 ρ_K 与 ρ_T 的最优解数据建立以 θ_φ 为输入, 相应的 ρ_K 和 ρ_T 的最优解为输出的多项式. 采用基于 AIC (Akaike's information criterion) 准则的多项式阶次确定方法[31] 和最小二乘参数设计方法[32], 得 A 类被控对象和 B 类被控对象使性能指标 (59) 最小的 ρ_K 和 ρ_T 如式 (66) ~ (69) 所示.

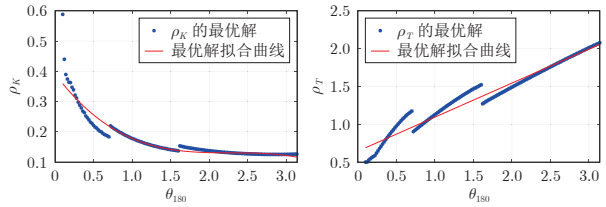
A 类被控对象:

$$\rho_K = -0.02\theta_{180}^3 + 0.15\theta_{180}^2 - 0.34\theta_{180} + 0.39 \tag{66}$$

$$\rho_T = 0.45\theta_{180} + 0.65 \tag{67}$$

B 类被控对象:

$$\rho_K = -0.04\theta_{120}^3 + 0.28\theta_{120}^2 - 0.65\theta_{120} + 0.67 \tag{68}$$

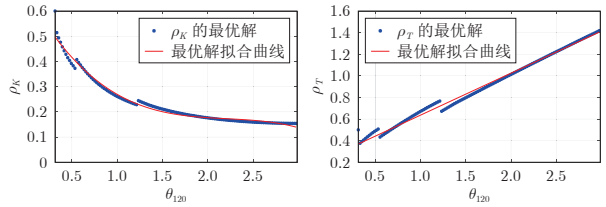


(a) ρ_K 的最优解曲线
(a) Optimal solution curve of ρ_K

(b) ρ_T 的最优解曲线
(b) Optimal solution curve of ρ_T

图 2 A 类被控对象 ρ_K 和 ρ_T 的最优解曲线

Fig. 2 Optimal solution curve of ρ_K and ρ_T of class A controlled object



(a) ρ_K 的最优解曲线
(a) Optimal solution curve of ρ_K

(b) ρ_T 的最优解曲线
(b) Optimal solution curve of ρ_T

图 3 B 类被控对象 ρ_K 和 ρ_T 的最优解曲线

Fig. 3 Optimal solution curve of ρ_K and ρ_T of class B controlled object

$$\rho_T = 0.39\theta_{120} + 0.25 \tag{69}$$

由式 (51) ~ (53) 知, PID 控制器参数的整定规则为:

$$K_P = \frac{\rho_K}{K_\varphi} \tag{70}$$

$$T_I = \frac{2\pi\rho_T}{\theta_\varphi}T_0 \tag{71}$$

$$T_D = \frac{T_I}{4} = \frac{\pi\rho_T}{2\theta_\varphi}T_0 \tag{72}$$

A 类被控对象 $K_\varphi = K_{180}$, $\theta_\varphi = \theta_{180}$; B 类被控对象 $K_\varphi = K_{120}$, $\theta_\varphi = \theta_{120}$.

PID 控制器参数整定算法如下:

1) 采用第 1.1 节的相位点频率 θ_φ 和增益 K_φ 的求取方法, 针对 A 类对象求得 θ_{180} 和 K_{180}, 针对 B 类对象求得 θ_{120} 和 K_{120}.

2) 针对 A 类对象由式 (66) 和 (67) 求 ρ_K 和 ρ_T, 针对 B 类对象由式 (68) 和 (69) 求 ρ_K 和 ρ_T, 由式 (70) ~ (72) 求取 PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D.

注 1. 由文献 [33] 的定理 3.5 可知, 若实际的被控对象传递函数 (4) 在单位圆外没有极点, 且 PID 控制器设计模型 (43) 和实际的被控对象传递函数 (4) 的频率响应满足

$$\left|\frac{G_P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) - \tilde{G}_P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})}{\tilde{G}_P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})}\right| < \left|\frac{1}{T}\right| = \left|\frac{1+\tilde{G}_{ol}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})}{\tilde{G}_{ol}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})}\right| \tag{73}$$

则采用优化指标 (59) ~ (62) 所提出的 PID 控制器参数整定方法 (66) ~ (72) 所设计的 PID 控制器可以使实际的被控对象闭环稳定.

注 2. 上述 PID 参数优化整定规则 (式 (66) ~ (72)) 的关键是求取被控对象的相位点参数 K_φ 和 θ_φ. 本文给出了被控对象模型已知时的计算方法, 对于难以建立数学模型的被控对象, 可采用阶跃实验法获得[5].

3 仿真实验

采用 PID 控制器参数的离散 Z-N 法[18]、不存在临界点的被控对象的 PID 整定方法[15]、Astrom 的 PID 参数优化方法[14] 及抗干扰 PID 整定方法[7] 与本文的 PID 优化整定方法进行仿真对比实验.

例 1. 采用文献 [18] 的仿真模型:

$$G_{P1}(z) = \frac{0.0329z^{-1} + 0.0269z^{-2}}{1 - 1.4891z^{-1} + 0.5488z^{-2}} \tag{74}$$

系统采样周期为 $T_0 = 2$ s. 设定值 $y_{sp}(t)$ 为:

$$y_{sp}(t) = \begin{cases} 1, & \delta T < t \le \delta T + \dfrac{T}{2} \\ -1, & \delta T + \dfrac{T}{2} < t \le (\delta+1)T \end{cases} \tag{75}$$

其中, $\delta = 0, 1$, T 为方波信号的周期, 设 $T = 800$ s. 负载扰动 $\upsilon(t)$ 为:

$$\upsilon(t) = \begin{cases} 0.2, & 200\ \mathrm{s} < t \le 400\ \mathrm{s} \\ -0.5, & 400\ \mathrm{s} < t \le 800\ \mathrm{s} \\ 0.2\cos(t), & 800\ \mathrm{s} < t \end{cases} \tag{76}$$

采用文献 [18] 的方法求得被控对象 (74) 的 $-180°$ 相位点的增益 K_{180} 和周期 T_{180} ($T_{180} = 2\pi T_0/\theta_{180}$) 为 0.0596 和 11.6027 (对应 $\theta_{180} = 1.0827$), PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D 为:

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{0.6}{K_{180}} = 10.0671 \\ T_I &= 0.5T_{180} = 5.8014 \\ T_D &= 0.125T_{180} = 1.4503 \end{aligned} \tag{77}$$

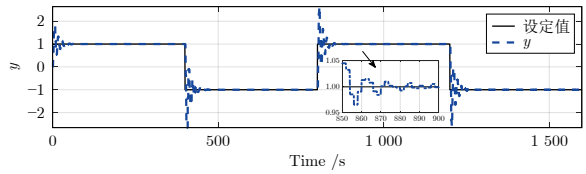
采用本文方法求得被控对象 (74) 的 $-180°$ 相位点的增益 K_{180} 和数字频率 θ_{180} 为 0.0596 和 1.0827, ρ_K 和 ρ_T 为 0.1698 和 1.1320, PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D 为:

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{\rho_K}{K_{180}} = 2.8490 \\ T_I &= \frac{2\pi\rho_T}{\theta_{180}}T_0 = 13.1319 \\ T_D &= \frac{T_I}{4} = 3.2830 \end{aligned} \tag{78}$$

采用文献 [18] 方法与本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$、被控对象输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线分别如图 4 和图 5 所示. 采用下列误差绝对值累积和 (Sum of absolute error, SAE)[34] 和均方误差 (Mean-square error, MSE)[35] 对两种方法的评价结果如表 1 所示.

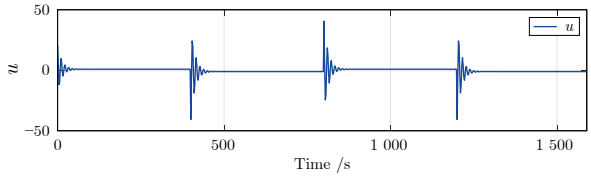
$$SAE = \sum_{k=1}^{N} |y_{sp}(k) - y(k)| \tag{79}$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} [y_{sp}(k) - y(k)]^2 \tag{80}$$



(a) Z-N 法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 的曲线

(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and output $y(t)$ with Z-N method

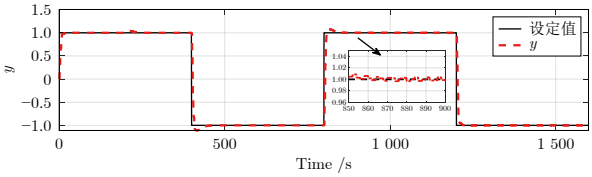


(b) Z-N 法的输入 $u(t)$ 的曲线

(b) Curve of input $u(t)$ with Z-N method

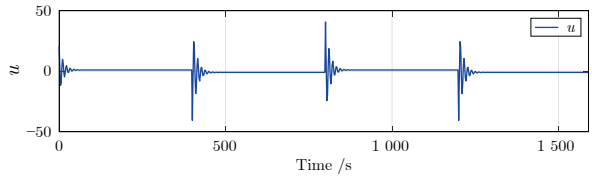
图 4　Z-N 法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线

Fig. 4　Curves of set value $y_{sp}(t)$, output $y(t)$ and input $u(t)$ with Z-N method



(a) 本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 的曲线

(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and output $y(t)$ with the proposed method



(b) 本文方法的输入 $u(t)$ 的曲线

(b) Curve of input $u(t)$ with the proposed method

图 5　本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线

Fig. 5　Curves of set value $y_{sp}(t)$, output $y(t)$ and input $u(t)$ with the proposed method

表 1　本文方法与 Z-N 法下误差 $e(t)$ 的性能评价

Table 1　Performance evaluation of error $e(t)$ with the proposed method and Z-N method

整定方法	性能指标	
	SAE	MSE
本文	3 835.3081	0.0274
Z-N 法	8 004.8341	0.0479

其中 $N = 800$.

由图 4、5 和表 1 可以看出, 虽然采用本文方法求取的模型 (74) 的 $-180°$ 相位点增益和周期与文献 [18] 方法相同, 但控制效果明显优于 Z-N 法, SAE 和 MSE 分别降低了 52.09% 和 42.80%. 这是因为 Z-N 法下闭环系统具有过大的最大灵敏度 M_s 和最大补灵敏度 M_t, 分别为 4.81 和 4.36, 远超出 M_s 和 M_t 的理想范围[14, 27]. 本文方法的 M_s 和 M_t 为 1.42 和 1.00, 因此在设定值和扰动频繁变化下本文方法使闭环系统保持好的动态性能.

例 2. 采用文献 [15] 的 B 类被控对象的仿真模型:

$$G_{P2}(s) = \frac{4.7\times10^5 s^2+1.4\times10^7 s+4.67\times10^{10}}{s^4+178s^3+1.09\times10^6 s^2+4.21\times10^7 s+4.67\times10^{10}} \tag{81}$$

图 6 为以上被控对象的 Nyquist 曲线, 可以看到, 其 Nyquist 曲线不穿越负实轴. 设定值 $y_{sp}(t)$ 为:

$$y_{sp}(t) = \begin{cases} 1, & \delta T < t \le \delta T + \dfrac{T}{2} \\ -1, & \delta T + \dfrac{T}{2} < t \le (\delta+1)T \end{cases} \tag{82}$$

设 $\delta = 0, 1$, $T = 10$ s. 负载扰动 $\upsilon(t)$ 为:

$$\upsilon(t) = \begin{cases} -0.2, & 2\ \text{s} < t \le 5\ \text{s} \\ -0.5, & 5\ \text{s} < t \le 8\ \text{s} \\ 0.2\cos(5t), & 8\ \text{s} < t \end{cases} \tag{83}$$

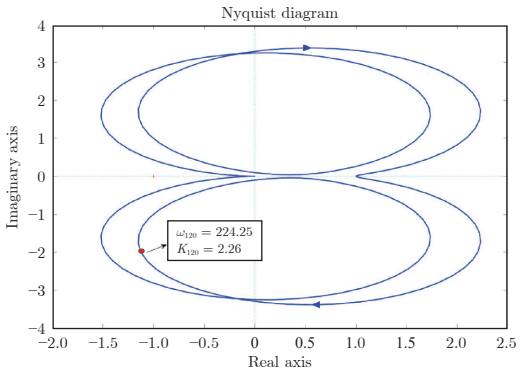


图 6　被控对象 (81) 的 Nyquist 曲线 ($K_{120} = 2.26$, $\omega_{120} = 224.25$)

Fig. 6　Nyquist curve of controlled plant (81) ($K_{120} = 2.26$, $\omega_{120} = 224.25$)

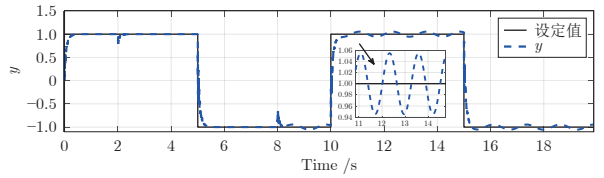
采用文献 [15] 的方法求得被控对象 (81) 的 $-120°$ 相位点的增益 K_{120} 和频率 ω_{120} 为 2.3581 和 232, PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D 为:

$$K_P = \frac{\cos^2(10°)}{K_{120}} = 0.41$$
$$T_I = \frac{1}{\omega_{120}\tan(10°)} = 0.024$$
$$T_D = \frac{\tan(10°)}{\omega_{120}} = 7.6\times 10^{-4} \tag{84}$$

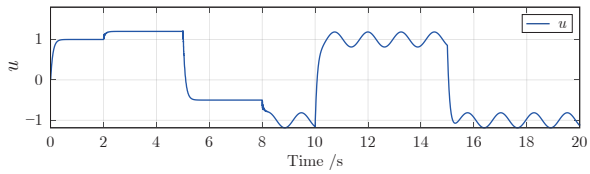
设置采样周期 $T_0 = 0.001$ s, 将被控对象 (81) 离散化. 采用本文方法求得其 $-120°$ 相位点的增益 K_{120} 和频率 ω_{120} 为 2.2856 和 223.9, 数字频率 θ_{120} ($\theta_{120} = \omega_{120}T_0$) 为 0.2239, ρ_K 和 ρ_T 为 0.5425 和 0.3335, PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D 为:

$$K_P = \frac{\rho_K}{K_{120}} = 0.2374$$
$$T_I = \frac{2\pi\rho_T T_0}{\theta_{120}} = 0.0094$$
$$T_D = \frac{T_I}{4} = 0.0024 \tag{85}$$

采用文献 [15] 方法与本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$、被控对象输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线分别如图 7 和图 8 所示. 采用式 (79) 的 SAE 和式 (80) 的 MSE 对两种方法的评价结果如表 2 所示, 其中 $N = 20\,000$.



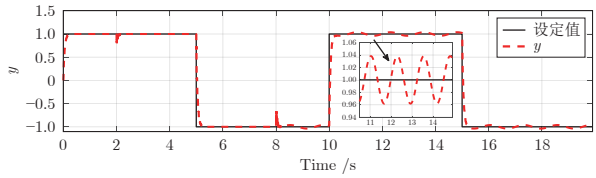
(a) 文献 [15] 方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 的曲线
(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and output $y(t)$ with the method in reference [15]



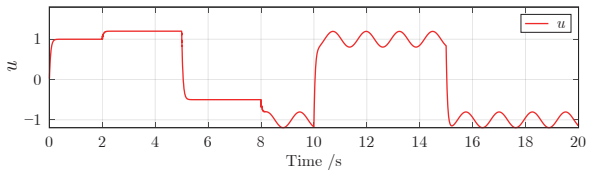
(b) 文献 [15] 方法的输入 $u(t)$ 的曲线
(b) Curve of input $u(t)$ with the method in reference [15]

图 7 文献 [15] 方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线
Fig. 7 Curves of set value $y_{sp}(t)$, output $y(t)$ and input $u(t)$ with the method in reference [15]

由图 7、8 和表 2 可以看出, 本文方法的控制效果优于文献 [15] 的方法, SAE 和 MSE 分别降低了 35.98% 和 40.79%. 这是因为文献 [15] 方法 $-120°$ 相位点的增益 K_{120} 和频率 ω_{120} 是采用继电反馈实验近似求取, 与本文方法相比, 存在较大的误差. 由图 6 知被控对象 (81) 的 $-120°$ 相位点的增益 K_{120} 和频率 ω_{120} 为 $K_{120} = 2.26$, $\omega_{120} = 224.25$, 文献 [15] 方法的误差为 4.16% 和 3.34%, 本文方法的误差为 1.12% 和 0.16%. 此外文献 [15] 基于给定的 PID 控制系统开环传递函数的相角裕度的整定方法无法有效保证闭环系统的抗扰性[36]. 本文通过使负载扰动下跟踪误差平方和最小, 使得闭环系统具有强的抗扰能力.



(a) 本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 的曲线
(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and output $y(t)$ with the proposed method



(b) 本文方法的输入 $u(t)$ 的曲线
(b) Curve of input $u(t)$ with the proposed method

图 8 本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线
Fig. 8 Curves of set value $y_{sp}(t)$, output $y(t)$ and input $u(t)$ with the proposed method

表 2 本文方法与文献 [15] 方法下误差 $e(t)$ 的性能评价
Table 2 Performance evaluation of error $e(t)$ with the proposed method and the method in reference [15]

整定方法	性能指标	
	SAE	MSE
本文	635.7247	0.0164
文献 [15]	993.0357	0.0277

例 3. 采用文献 [14] 的仿真模型:

$$G_{P3}(s) = \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)(0.01s+1)(0.001s+1)} \tag{86}$$

设定值 $y_{sp}(t)$ 为

$$y_{sp}(t) = \begin{cases} 1, & \delta T < t \le \delta T + \dfrac{T}{2} \\ -1, & \delta T + \dfrac{T}{2} < t \le (\delta+1)T \end{cases} \tag{87}$$

设 $\delta = 0, 1$, $T = 10$ s. 负载扰动 $v(t)$ 为:

$$v(t)=\begin{cases}-0.5, & 2\ \mathrm{s}<t\le 5\ \mathrm{s}\\ \cos(20t), & 5\ \mathrm{s}<t\le 10\ \mathrm{s}\\ 2\sin(t)\cos(20t), & 10\ \mathrm{s}<t\end{cases}\tag{88}$$

采用文献 [14] 的方法得到被控对象 (86) 的稳态增益 K_0 为 1, $-180°$ 相位点的增益 K_{180} 和周期 T_{180} 为 0.0091 和 0.199, PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D 为:

$$K_P=\frac{0.3-0.1\lambda^4}{K_{180}}=32.8670$$

$$T_I=\frac{0.6T_{180}}{1+2\lambda}=0.1173$$

$$T_D=\frac{0.15(1-\lambda)T_{180}}{1-0.95\lambda}=0.0298\tag{89}$$

其中 $\lambda=K_{180}/K_0$.

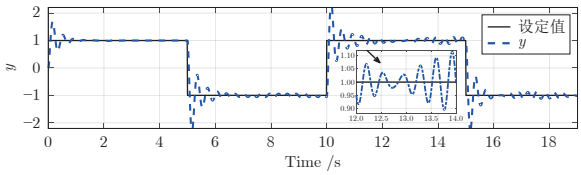
设置采样周期 $T_0=0.01$ s, 将被控对象 (86) 离散化. 采用本文方法求得其 $-180°$ 相位点的增益 K_{180} 和周期 T_{180} 为 0.0135 和 0.2003, 数字频率 θ_{180} ($\theta_{180}=2\pi T_0/T_{180}$) 为 0.3136, ρ_K 和 ρ_T 为 0.2989 和 0.7861, PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D 为

$$K_P=\frac{\rho_K}{K_{180}}=22.1407$$

$$T_I=\frac{2\pi\rho_T T_0}{\theta_{180}}=0.1574$$

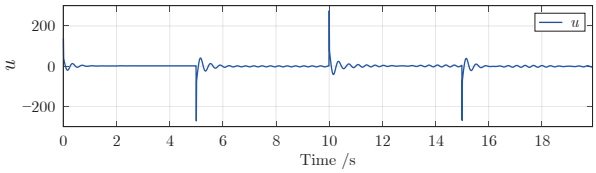
$$T_D=\frac{T_I}{4}=0.0394\tag{90}$$

采用文献 [14] 方法与本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$、被控对象输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线分别如图 9 和图 10 所示. 采用式 (79) 的 SAE 和式 (80) 的 MSE 对两种方法的评价结果如表 3 所示, 其中 $N=2\,000$.



(a) 文献 [14] 方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 的曲线

(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and output $y(t)$ with the method in reference [14]

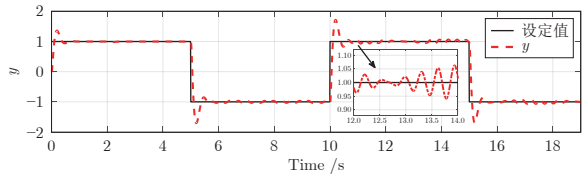


(b) 文献 [14] 方法的输入 $u(t)$ 的曲线

(b) Curve of input $u(t)$ with the method in reference [14]

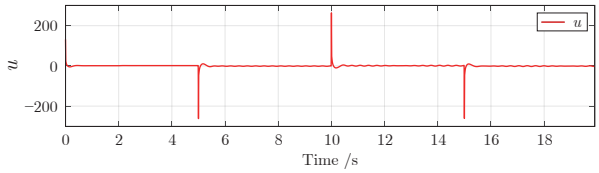
图 9　文献 [14] 方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线

Fig. 9　Curves of set value $y_{sp}(t)$, output $y(t)$ and input $u(t)$ with the method in reference [14]



(a) 本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 的曲线

(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and output $y(t)$ with the proposed method



(b) 本文方法的输入 $u(t)$ 的曲线

(b) Curve of input $u(t)$ with the proposed method

图 10　本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线

Fig. 10　Curves of set value $y_{sp}(t)$, output $y(t)$ and input $u(t)$ with the proposed method

表 3　本文方法与文献 [14] 方法下误差 $e(t)$ 的性能评价

Table 3　Performance evaluation of error $e(t)$ with the proposed method and the method in reference [14]

整定方法	性能指标	
	SAE	MSE
本文	142.6175	0.0473
文献 [14]	176.5287	0.0536

由图 9、10 和表 3 可以看出, 本文方法的控制效果优于文献 [14] 的方法, SAE 和 MSE 分别降低了 19.21% 和 11.75%. 这是因为 Astrom 的 PID 参数优化方法使负载扰动下跟踪误差的积分最小的优化指标只适用于平稳的被控过程, 当负载扰动频繁变化, 不能降低跟踪误差[9, 27]. 本文的跟踪误差平方和最小的优化指标可以在负载扰动频繁变化时有效降低跟踪误差, 使闭环系统具有好的跟踪性能.

例 4. 采用文献 [7] 的仿真模型:

$$G_{P4}(s)=\frac{-1.4s+1}{(s+1)^3}\tag{91}$$

设定值 $y_{sp}(t)$ 为

$$y_{sp}(t)=\begin{cases}2, & \delta T<t\le\delta T+\dfrac{T}{2}\\ -2, & \delta T+\dfrac{T}{2}<t\le(\delta+1)T\end{cases}\tag{92}$$

设 $\delta=0,\ 1$, $T=800$ s. 负载扰动 $v(t)$ 为:

$$v(t)=\begin{cases}0.2, & 100\ \mathrm{s}<t\le 500\ \mathrm{s}\\ 0.2\cos(0.5t), & 500\ \mathrm{s}<t\le 800\ \mathrm{s}\\ 0.3\sin(0.1t)\cos(0.5t), & 800\ \mathrm{s}<t\end{cases}\tag{93}$$

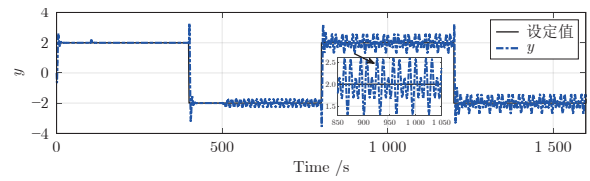
采用文献 [7] 的方法求得 $a_0/b_0=1$, 扰动观测带宽 ω_0 为 0.356, 控制带宽 ω_c 为 0.58, 调节参数 α 为 0.5, 得到 PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D 为:

$$K_P=\frac{a_0\omega_0(1+\alpha)}{b_0\omega_c}=0.92$$
$$T_I=\frac{\alpha+1}{\omega_c}=2.59$$
$$T_D=\frac{\alpha}{(1+\alpha)\omega_c}=0.57 \tag{94}$$

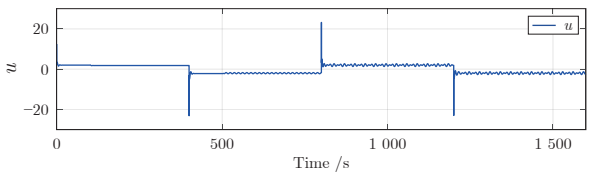
设置采样周期 $T_0=0.1$ s, 将被控对象 (91) 离散化. 采用本文方法求得其 $-180°$ 相位点的增益 K_{180} 和数字频率 θ_{180} 为 0.6608 和 0.0899, ρ_K 和 ρ_T 为 0.3622 和 0.6854, PID 控制器参数 K_P、T_I 和 T_D 为:

$$K_P=\frac{\rho_K}{K_{180}}=0.5481$$
$$T_I=\frac{2\pi\rho_T T_0}{\theta_{180}}=4.7879$$
$$T_D=\frac{T_I}{4}=1.1970 \tag{95}$$

采用文献 [7] 方法与本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$、被控对象输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线分别如图 11 和图 12 所示. 采用式 (79) 的 SAE 和式 (80) 的 MSE 对两种方法的评价结果如表 4 所示, 其中 $N=16\,000$.



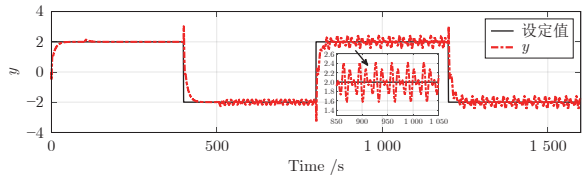
(a) 文献 [7] 方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 的曲线
(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and output $y(t)$ with the method in reference [7]



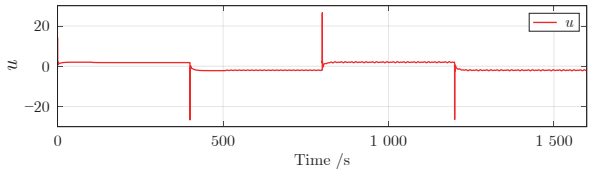
(b) 文献 [7] 方法的输入 $u(t)$ 的曲线
(b) Curve of input $u(t)$ with the method in reference [7]

图 11 文献 [7] 方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线
Fig. 11 Curves of set value $y_{sp}(t)$, output $y(t)$ and input $u(t)$ with the method in reference [7]

由图 11、12 和表 4 可以看出, 本文方法的控制效果优于文献 [7] 的方法, SAE 和 MSE 分别降低了 16.50% 和 5.64%. 这是因为文献 [7] 设计的扰动观测器只能估计平稳变化的扰动. 在扰动频繁变化下, 扰动观测器的观测误差影响 PID 控制器的抗扰性能.



(a) 本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 的曲线
(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and output $y(t)$ with the proposed method



(b) 本文方法的输入 $u(t)$ 的曲线
(b) Curve of input $u(t)$ with the proposed method

图 12 本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与输出 $y(t)$ 及输入 $u(t)$ 的曲线
Fig. 12 Curves of set value $y_{sp}(t)$, output $y(t)$ and input $u(t)$ with the proposed method

表 4 本文方法与文献 [7] 方法下误差 $e(t)$ 的性能评价
Table 4 Performance evaluation of error $e(t)$ with the proposed method and the method in reference [7]

整定方法	性能指标	
	SAE	MSE
本文	28 889.3906	0.1806
文献 [7]	34 598.9258	0.1914

4 物理实验

为验证所提方法的有效性, 以空气流量实验系统为对象进行物理实验. 实验系统如图 13 所示, 由空气流量系统, 监控计算机, 西门子 S7-300 PLC 控制系统, 检测仪表和执行机构组成. 以冷风机频率为控制输入, 冷风流量为输出, 令采样周期 $T_0=1$ s, 采集被控对象的输入输出数据, 辨识其 ARX 模型如下:

$$y(k)=0.720y(k-1)+0.872u(k-2)+0.871u(k-3) \tag{96}$$

设定值为:

$$y_{sp}(t)=\begin{cases}2, & \delta T<t\le\delta T+\dfrac{T}{2}\\ -2, & \delta T+\dfrac{T}{2}<t\le(\delta+1)T\end{cases} \tag{97}$$

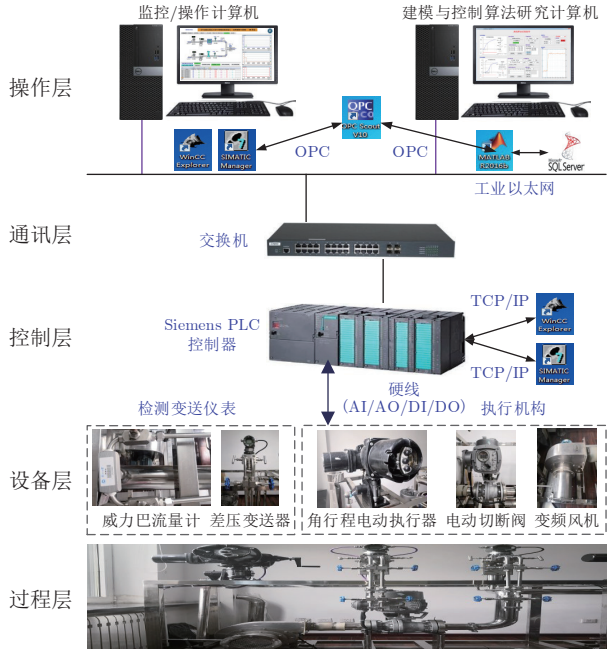


图 13　空气流量实验系统

Fig. 13　Air flow test system

设 $\delta = 0, 1, 2, 3$, $T = 5$ min.

针对实际物理系统, 将本文方法与 PID 控制器参数的离散 Z-N 法[18] 及 Astrom 的 PID 参数优化方法[14] 进行比较. 采用三种方法的 PID 控制器参数如表 5 所示. 三种方法的设定值 $y_{sp}(t)$、被控对象的输出 (冷风流量) $y(t)$ 及控制量 (冷风机频率) $u(t)$ 的曲线如图 14 ~ 16 所示. 可以看到, 本文方法下, 被控对象的输出对设定值的跟踪性能最好, 跟踪精度最高. 采用式 (79) 的 SAE 和式 (80) 的 MSE 对三种方法的评价结果如表 6 所示, 其中 $N = 1\,200$. 本文方法相对于 Z-N 法, SAE 和 MSE 分别降低 76.33% 和 70.38%, 相对于 Astrom 方法 SAE 和 MSE 分别降低 18.35% 和 9.76%, 验证了所提方法的优越性.

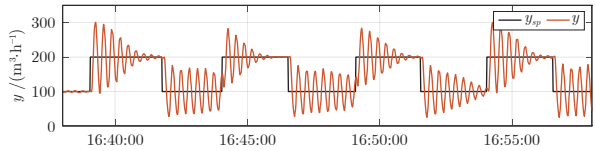
表 5　三种整定方法下 PID 控制器参数

Table 5　PID controller parameters with three tuning methods

整定方法	PID 参数		
	K_P	T_I	T_D
Z-N 法	0.3158	3.3412	0.8353
Astrom 方法	0.1377	2.6910	1.1111
本文	0.0974	7.1364	1.7841

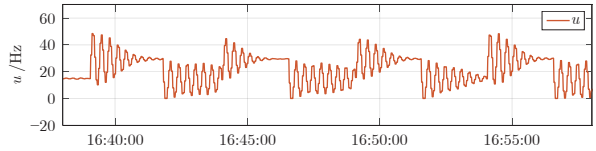
5　结论

本文针对存在临界点的 A 类被控对象和不存在临界点的 B 类被控对象, 提出了基于 −180° 和 −120° 相位点的数字频率和增益的一种新的 PID 控制器参数优化整定方法. 该方法包括基于分数阶积分器和 Tchebyshev 多项式求取被控对象 −180° 或 −120° 相位点的频率和增益的方法和以阶跃负载扰动下跟踪误差平方和最小为优化指标, 以闭环系统的最大灵敏度和最大补灵敏度为约束的 PID 控制器参数优化整定规则. 仿真和物理实验表明所提 PID 控制器参数整定方法的优越性.



(a) Z-N 法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与冷风流量 $y(t)$ 的曲线

(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and cold air flow $y(t)$ with Z-N method

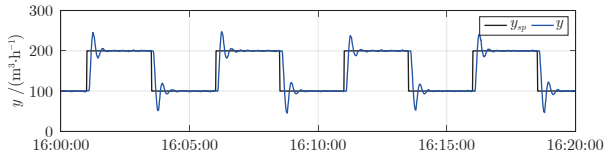


(b) Z-N 法的冷风机频率 $u(t)$ 的曲线

(b) Curve of air cooler frequency $u(t)$ with Z-N method

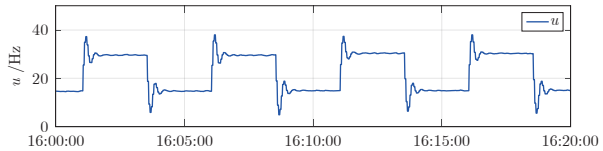
图 14　Z-N 法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与冷风流量 $y(t)$ 及冷风机频率 $u(t)$ 的曲线

Fig. 14　Curves of set value $y_{sp}(t)$, cold air flow $y(t)$ and air cooler frequency $u(t)$ with Z-N method



(a) Astrom 优化方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与冷风流量 $y(t)$ 的曲线

(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and cold air flow $y(t)$ with the optimization method proposed by Astrom

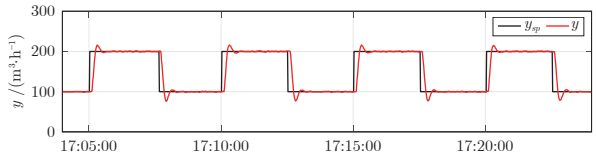


(b) Astrom 优化方法的冷风机频率 $u(t)$ 的曲线

(b) Curve of air cooler frequency $u(t)$ with the optimization method proposed by Astrom

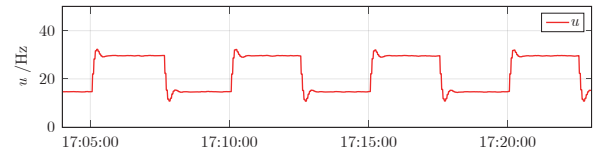
图 15　Astrom 优化方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与冷风流量 $y(t)$ 及冷风机频率 $u(t)$ 的曲线

Fig. 15　Curves of set value $y_{sp}(t)$, cold air flow $y(t)$ and air cooler frequency $u(t)$ with the optimization method proposed by Astrom



(a) 本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与冷风流量 $y(t)$ 的曲线

(a) Curves of set value $y_{sp}(t)$ and cold air flow $y(t)$ with the proposed method



(b) 本文方法的冷风机频率 $u(t)$ 的曲线

(b) Curve of air cooler frequency $u(t)$ with the proposed method

图 16 本文方法的设定值 $y_{sp}(t)$ 与冷风流量 $y(t)$ 及冷风机频率 $u(t)$ 的曲线

Fig. 16 Curves of set value $y_{sp}(t)$, cold air flow $y(t)$ and air cooler frequency $u(t)$ with the proposed method

表 6 三种方法下误差 $e(t)$ 的性能评价

Table 6 Performance evaluation of error $e(t)$ with the three methods

整定方法	性能指标	
	SAE	MSE
Z-N 法	37 624.0129	1 736.8307
Astrom 方法	10 905.8089	570.0473
本文	8 904.2220	514.4361

References

1 Guo L. Feedback and uncertainty: Some basic problems and results. *Annual Reviews in Control*, 2020, **49**: 27–36

2 Samad T. A survey on industry impact and challenges thereof [Technical Activities]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2017, **37**(1): 17–18

3 Borase R P, Maghade D K, Sondkar S Y, Pawar S N. A review of PID control, tuning methods and applications. *International Journal of Dynamics and Control*, 2021, **9**(2): 818–827

4 Somefun O A, Akingbade K, Dahunsi F. The dilemma of PID tuning. *Annual Reviews in Control*, 2022, **52**: 65–74

5 Ziegler J G, Nichols N B. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, 1942, **64**: 759–768

6 Åström K J, Hang C C, Persson P, Ho W K. Towards intelligent PID control. *Automatica*, 1992, **28**(1): 1–9

7 Nie Z Y, Li Z Y, Wang Q G, Gao Z Q, Luo J L. A unifying Ziegler-nichols tuning method based on active disturbance rejection. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, **32**(18): 9525–9541

8 Åström K J, Hägglund T. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica*, 1984, **20**(5): 645–651

9 Åström K J, Hägglund T. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning* (Second edition). Research Triangle Park: ISA, 1995.

10 Poulin E, Pomerleau A. PI settings for integrating processes based on ultimate cycle information. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, **7**(4): 509–511

11 Ossareh H R, Wisotzki S, Seeds J B, Jankovic M. An internal model control-based approach for characterization and controller tuning of turbocharged gasoline engines. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2021, **29**(2): 866–875

12 Huang H P, Jeng J C, Luo K Y. Auto-tune system using single-run relay feedback test and model-based controller design. *Journal of Process Control*, 2005, **15**(6): 713–727

13 Matausek M R, Šekara T B. PID controller frequency-domain tuning for stable, integrating and unstable processes, including dead-time. *Journal of Process Control*, 2011, **21**(1): 17–27

14 Åström K J, Hägglund T. *Advanced PID Control*. Pittsburgh: ISA, 2006.

15 Bazanella A S, Pereira L F A, Parraga A. A new method for PID tuning including plants without ultimate frequency. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, **25**(2): 637–644

16 Lorenzini C, Bazanella A S, Pereira L F A, da Silva G R G. The generalized forced oscillation method for tuning PID controllers. *ISA Transactions*, 2019, **87**: 68–87

17 Takahashi Y, Chan C S, Auslander D M. Parametereinstellung bei linearen DDC-algorithmen. *at-Automatisierungstechnik*, 1971, **19**(JG): 237–284

18 Bobál V, Böhm J, Fessl J, Macháček J. *Digital Self-tuning Controllers: Algorithms, Implementation and Applications*. London: Springer, 2005.

19 Bazanella A S, Parraga A. Tuning PID controllers from sampled-data relay feedback experiments. *IFAC-Papers On Line*, 2018, **51**(4): 125–130

20 Rad A B, Lo W L, Tsang K M. Self-tuning PID controller using Newton-raphson search method. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1997, **44**(5): 717–725

21 Díaz-Rodríguez I D, Han S J, Bhattacharyya S P. *Analytical Design of PID Controllers*. Switzerland: Springer, 2019.

22 Chen Y Q, Vinagre B M, Podlubny I. Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives —— An expository review. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **38**(1–4): 155–170

23 Zhang Q, Song B Y, Zhao H D, Zhang J S. Discretization of fractional order differentiator and integrator with different fractional orders. *Intelligent Control and Automation*, 2017, **8**(2): 75–85

24 Cui Feng-Wu, Liang Huai-Xue. The application of Demoivre Formula in the derivation of double angle formula. *Songliao Journal (Natural Science Edition)*, 1997, (4): 64–65
(崔凤午, 梁怀学. 棣莫弗公式在推导倍角公式中的应用. 松辽学刊 (自然科学版), 1997, (4): 64–65)

25 Huba M, Vrančič D. Introduction to the discrete time PID_n^m control for the IPDT plant. *IFAC-Papers OnLine*, 2018, **51**(6): 119–124

26 Vítečcková M, Viteček A. 2DOF analog and digital controller tunning for integrating plants with time delay. *Acta Mechanica Slovaca*, 2009, **13**(4): 48–53

27 Veinović S, Stojić D, Joksimović D. Optimized four-parameter PID controller for AVR systems with respect to robustness. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2022, **135**: Article No. 107529

28 Wallén A, Åström K J, Hägglun T. Loop-shaping design of PID controllers with constant T_i/T_d ratio. *Asian Journal of Control*, 2002, **4**(4): 403–409

29 Hu Shou-Song. *Automatic Control Theory* (Fifth edition). Beijing: Science Press, 2007.
(胡寿松. 自动控制原理. 第 5 版. 北京: 科学出版社, 2007.)

30 Solodov M V. On the sequential quadratically constrained quadratic programming methods. *Mathematics of Operations Research*, 2004, **29**(1): 64–79

31 Qi M, Zhang G P. An investigation of model selection criteria for neural network time series forecasting. *European Journal of*

Operational Research, 2001, **132**(3): 666–680

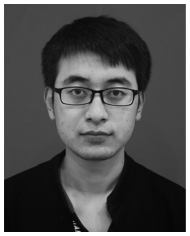
32 Haberstich C, Nouy A, Perrin G. Boosted optimal weighted least-squares. *Mathematics of Computation*, 2022, **91**(335): 1281–1315

33 Åström K J, Wittenmark B. *Computer-controlled Systems: Theory and Design* (Second edition). Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1990.

34 Hägglund T. A control-loop performance monitor. *Control Engineering Practice*, 1995, **3**(11): 1543–1551

35 Ghanassi M, Champagne B, Kabal P. On the steady-state mean squared error of the fixed-point LMS algorithm. *Signal Processing*, 2007, **87**(12): 3226–3233

36 Euzébio T A M, Barros P R. Optimal integral gain for smooth PI control. *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, **46**(11): 529–533



刘 宁 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室博士研究生. 2019 年获得中北大学硕士学位. 主要研究方向为控制理论与技术.
E-mail: 18735135253@163.com
(**LIU Ning** Ph.D. candidate at State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University. He received his master degree from Northeast University of China in 2019. His research interest covers control theory and technology.)

柴天佑 中国工程院院士, 东北大学教授. IEEE Fellow, IFAC Fellow, 欧亚科学院院士. 主要研究方向为自适应控制, 智能解耦控制, 流程工业综合自动化理论、方法与技术. 本文通信作者.
E-mail: tychai@mail.neu.edu.cn
(**CHAI Tian-You** Academician of Chinese Academy of Engineering, professor at Northeastern University, IEEE Fellow, IFAC Fellow, and academician of the International Eurasian Academy of Sciences. His research interest covers adaptive control, intelligent decoupling control, as well as theories, methods and technology of synthetical automation for process industries. Corresponding author of this paper.)