第 49 卷 第 1 期
2023 年 1 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 49, No. 1
January, 2023

基于一步张量学习的多视图子空间聚类

赵晓佳 [1] 徐婷婷 [1] 陈勇勇 [1] 徐 勇 [1,2]

摘 要 现有多视图子空间聚类算法通常先进行张量表示学习, 进而将学习到的表示张量融合为统一的亲和度矩阵. 然而, 因其独立地学习表示张量和亲和度矩阵, 忽略了两者之间的高度相关性. 为了解决此问题, 提出一种基于一步张量学习的多视图子空间聚类方法, 联合学习表示张量和亲和度矩阵. 具体地, 该方法对表示张量施加低秩张量约束, 以挖掘视图的高阶相关性. 利用自适应最近邻法对亲和度矩阵进行灵活重建. 使用交替方向乘子法对模型进行优化求解, 通过对真实多视图数据的实验表明, 较于最新的多视图聚类方法, 提出的算法具有更好的聚类准确性.

关键词 多视图子空间聚类, 张量奇异值分解, 一步化学习, 图学习

引用格式 赵晓佳, 徐婷婷, 陈勇勇, 徐勇. 基于一步张量学习的多视图子空间聚类. 自动化学报, 2023, **49**(1): 40−53

DOI 10.16383/j.aas.c220138

One-step Tensor Learning for Multi-view Subspace Clustering

ZHAO Xiao-Jia[1] XU Ting-Ting[1] CHEN Yong-Yong[1] XU Yong[1,2]

Abstract A surge of the existing multi-view subspace clustering algorithms generally learn the third-order tensor representation first and then fuse the learned representation tensor into a unified affinity matrix. However, since they learn the representation tensor and the affinity matrix independently, they cannot seamlessly capture their high-order correlation. To address this challenge, we propose a novel multi-view subspace clustering method based on one-step tensor learning (OTSC) to jointly learn the representation tensor and affinity matrix. Specifically, we impose the low-rank tensor constraint on the representation tensor to explore the correlation of high-order cross-views dexterously, utilize the adaptive nearest neighbor strategy to reconstruct a flexible affinity matrix, and adopt the alternating direction method of multipliers (ADMM) to optimize our model. Extensive experiments on real multi-view data demonstrated the superiority of OTSC compared to the state-of-the-art methods.

Key words Multi-view subspace clustering, tensor singular value decomposition, one-step learning, graph learning

Citation Zhao Xiao-Jia, Xu Ting-Ting, Chen Yong-Yong, Xu Yong. One-step tensor learning for multi-view subspace clustering. *Acta Automatica Sinica*, 2023, **49**(1): 40−53

人类借助于日渐先进的数据收集和信息技术, 在不同领域中获取到不同类型的多数图数据, 更加全面地挖掘出隐藏在数据中特征和结构信息[1−2]. 如图 1(a) 视频监控通过采集不同时态下的图像, 更加有助于理解行人的姿态、面部表情等行为动作; 图 1(b) 采集不同视角下的汽车图片, 有助于更加清晰地刻画车辆的全貌; 图 1(c) 表示的是一张人脸图像在 Local Binary Pattern[3]、Gabor[4]、Histogram of Oriented Gradients[5] 等描述下的特征表示. 多视图数据可以反映出更加全面的信息, 结合不同的应用场景, 衍生出多种多视图学习应用, 如多视图聚类[2, 6−9], 多视图半监督分类[10], 多视图分类[11], 多视图检索[12] 等等. 由于现实生活中的数据大多没有样本标签并且标签信息的获取十分复杂, 在进行基于标签的分类操作时会耗费很大的人力、物力. 另一方面, 随着聚类算法的成熟, 一些聚类算法[13−14] 的性能逐渐逼近分类算法, 多视图聚类引起了广泛关注.

现有的单视图聚类和多视图聚类算法的性能高度依赖于亲和度矩阵的质量, 其核心是构造一个具有判别性的亲和度矩阵. 对亲和度矩阵求解的方法大致划分为三大类, 分别是基于图[15−16]、基于核[17−18] 和基于子空间[7, 19−23] 的方法. 例如, Liang 等[15] 提出了同时对视图间的一致性和差异性进行建模的图聚类方法; Wang 等[16] 提出了同时学习数据相似度矩阵和聚类结构的聚类方法. 然而基于图的聚类方法是根据原始数据的特征直接进行图的构建, 容易受

收稿日期 2022-03-04 录用日期 2022-08-22
Manuscript received March 4, 2022; accepted August 22, 2022
广东省自然科学基金 (2022A1515010819), 国家自然科学基金 (62106063), 深圳市科技创新委员会 (GJHZ20210705141812038) 资助
Supported by Guangdong Natural Science Foundation (2022A1515010819), National Natural Science Foundation of China (62106063), Shenzhen Science and Technology Innovation Committee (GJHZ20210705141812038)
本文责任编委 黎铭
Recommended by Associate Editor LI Ming
1. 哈尔滨工业大学 (深圳) 深圳市视觉目标检测与判识重点实验室 深圳 518055 2. 鹏城实验室 深圳 518055
1. Shenzhen Key Laboratory of Visual Object Detection and Recognition, Harbin Institute of Technology, Shenzhen 518055
2. Peng Cheng Laboratory, Shenzhen 518055

(a) 监控下不同时态的人的图像
(a) Monitor images of people in different tenses

(b) 不同视角下的汽车图片
(b) Car photos from different perspectives

(c) 人脸在不同特征下的表示
(c) Representation of face images under different features

图 1　多视图数据示例
Fig. 1　Examples of multi-view data

到噪声和异常值影响. 为了处理非线性复杂数据的聚类问题, 文献 [17] 通过使用核技巧将稀疏子空间聚类扩展到非线性流形; Yin 等[18] 将对称正定矩阵嵌入到再生核希尔伯特空间中, 有效地揭示了潜在的子空间结构. 但是基于核的聚类方法的性能在很大程度上依赖于核函数的选择, 而在实践中如何选择核函数仍是一个待探索的问题. 为了提升鲁棒性, 子空间聚类方法利用独立的两步骤去学习亲和度矩阵, 即 1) 根据原始数据的特征矩阵对其进行自表示, 利用特定正则项求得自表示矩阵; 2) 通过自表示矩阵固定得到亲和度矩阵, 来描述未标记数据点之间的成对关系. 例如, 稀疏子空间聚类 (Sparse subspace clustering, SSC)[22] 和低秩表示 (Low-rank representation, LRR)[21] 是两种最具代表性的子空间聚类算法. 他们分别利用 l_1 范数和核范数得到了稀疏和低秩的自表示矩阵. Gao 等[24] 采用谱聚类的方式整合不同视图的子空间聚类结果以获得一致性的指示矩阵.

为了挖掘多视图特征的高阶相关性, Zhang 等[6] 和 Xie 等[7] 相继提出将所有视图的自表示矩阵拼接成一个三阶张量, 即包含了二维点对点的维度, 同时囊括了一个新的视图维度. Chen 等[25], Zhang 等[26] 和 Wu 等[27] 均采用张量这一数据结构来处理多视图聚类的问题, 并利用联合学习和张量低秩优化的思想以学习一个更具辨别性的亲和度矩阵. 此类方法的核心是低秩张量分解技术. 现有常见的张量分解技术为 CANDECOMP/PARAFAC分解[28]、Tucker 分解[29]、张量奇异值分解 (Tensor singular value decomposition, t-SVD)[30]. 其中基于 t-SVD 的张量核范数是张量多秩 l_1 范数的最紧凸松弛, 在低秩近似理论与应用中取得了优异性能. 文献[2] 采用基于 t-SVD 的张量多秩最小化方法, 隐式地过滤掉高维噪声. 文献[31] 采用了自适应近邻的方法, 为每个数据点分配最佳近邻来学习相似性矩阵, 以捕获数据的局部特征. 但这些方法都基于根据某种运算, 如指数法[32]、绝对对称化[6]、平方运算[33]等, 利用自表示矩阵固定求解亲和度矩阵, 即两者的求解过程独立进行, 无法有效地挖掘两者间的高度相关性, 不能获取更优的亲和度矩阵.

为了解决上述问题, 本文提出了一种新颖的基于一步张量学习的多视图子空间聚类算法, 它可以有效地降低噪声和异常值的影响并探究亲和度矩阵和表示张量之间的高度相关性, 以获得更优的亲和度矩阵, 进而得到更优的多视图聚类性能. 本文的贡献总结如下: 1) 针对多视图聚类问题, 提出了一种基于一步张量学习的多视图子空间聚类算法, 该算法通过学习一个鲁棒的低秩张量表示进行聚类, 充分挖掘了数据的多模态信息, 具有较高的鲁棒性与准确率. 2) 与现有多视图聚类算法相比, 该算法在一个统一框架下对表示张量与亲和度矩阵进行联合学习, 相互促进. 利用 t-SVD 对表示张量进行高阶约束, 减少噪声和异常值的影响. 并采用自适应近邻法重建亲和度矩阵, 以获得更加灵活的图用于多视图聚类. 3) 该算法采用交替方向乘子法进行有效优化. 在多个数据集上验证了所提出方法在解决多视图聚类问题上的优越性.

1　多视图聚类相关概述

本节包括亲和度矩阵学习、低秩张量表示的多视图聚类和张量奇异值分解三个部分. 在表 1 中总

表 1 符号与定义
Table 1 Notations and definitions

符号	定义
$\boldsymbol{x}$, X, $\mathcal{X}$	向量, 矩阵, 张量
$\mathbf{1}$	单位向量
I	单位矩阵
$\mathcal{I}$	单位张量
n	样本个数
V	视图个数
d_v	第 v 个视图的特征维度
$X^v \in \mathbf{R}^{d_v \times n}$	第 v 个视图的特征矩阵
$\mathcal{Z} \in \mathbf{R}^{n \times n \times V}$	表示张量
$A \in \mathbf{R}^{n \times n}$	亲和度矩阵
$E^v \in \mathbf{R}^{n \times n}$	噪声矩阵
$\Vert \cdot \Vert_{2,1}$	$l_{2,1}$ 范数
$\Vert \cdot \Vert_{\rm F}$	Frobenius 范数
$\Vert \cdot \Vert_{\infty}$	无穷范数
$\Vert \cdot \Vert_{*}$	矩阵核范数
$\Vert \cdot \Vert_{\circledast}$	张量核范数
FFT	快速傅里叶分解

结了本文所使用的主要符号和定义.

1.1 亲和度矩阵学习

多视图子空间聚类方法的核心是求解一个具有较强辨别能力的亲和度矩阵, 以更好地捕获多视图数据间的一致性与差异性[1]. 基于自表示的子空间聚类方法凭借其出色的性能, 成为该研究领域的热门方向[21−22], 其优化模型依赖于自表示特性, 即属于同一线性子空间的样本可以相互线性表示[34]. 数据集 $X = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n]$ 表示维度为 d 的 n 个原始样本点, 其自表示学习模型如下:

$$\begin{aligned}&\min_{Z,\,E}\ f(Z) + \alpha\Vert E\Vert_l\\&\text{s.t.}\ X = XZ + E,\ \text{diag}\{Z\} = \mathbf{0}\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $Z \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为学习到的自表示矩阵, 第 i 列 Z_i 代表数据点 $\boldsymbol{x}_i$ 与其他样本点之间的相似性关系. 约束条件 $\text{diag}\{Z\} = \mathbf{0}$ 确保了数据点仅由除自己外的样本点进行线性表示, 避免平凡解 $Z = I$, 其中 I 为单位矩阵. E 表示噪声, 并使用不同的 l 范数对其进行约束. 为了获得更加有意义的自表示矩阵, 通常采用不同类型的正则项 $f(Z)$ 进行正则化约束, 以保持特定的属性. 如为实现自表示矩阵的稀疏表示, 文献 [35] 采用正则项 $f(Z) = \Vert Z\Vert_0$, 文献 [22] 采用 l_1 范数 $f(Z) = \Vert Z\Vert_1$, Liu 等[21] 和 Vidal 等[36] 通过低秩正则项 $f(Z) = \Vert Z\Vert_*$ 来构造低秩自表示矩阵. 最后通过最优化以上学习模型 (1) 获得自表示矩阵的最优解 Z^*, 之后根据 $A = Z^*$[37], $A = \frac{1}{2}(Z^* + Z^{*\rm T})$[13], $A = \frac{1}{2}(|Z^*| + |Z^{*\rm T}|)$[19, 24] 等特定公式求解出相应的亲和度矩阵 A.

基于图学习的多视图聚类方法往往利用原始数据学习亲和度矩阵. 即将数据点作为构建的图节点, 它们之间的边代表两者之间的相似性[38], 其基本模型如下:

$$\begin{aligned}&\min_{A}\ \sum_{i,\,j}^{n}\Vert\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\Vert_2^2 a_{ij} + \beta\Vert A\Vert_{\rm F}^2\\&\text{s.t.}\ A^{\rm T}\mathbf{1} = \mathbf{1},\ \mathbf{0} \le A \le \mathbf{1}\end{aligned}\tag{2}$$

其中, a_{ij} 表示亲和度矩阵 A 中第 (i, j) 个元素, 若数据点 $\boldsymbol{x}_i$ 与 $\boldsymbol{x}_j$ 的的距离越小, 则 a_{ij} 的数值越大, 两者的相似性也就越高. 大量的文献 [2, 15−16] 借助图学习的思想, 大大提高了聚类性能.

1.2 低秩张量表示的多视图聚类

多视图聚类中, 假设有由 V 个视图构成的多视图数据 $X^v \in \mathbf{R}^{d_v\times n}$, 其中第 v 个视图的特征维度为 d_v. 考虑到使用三维的表示张量可更好的探索不同视图的一致性与差异性, Zhang 等[6] 和 Xie 等[7] 提出了基于低秩张量表示的多视图子空间聚类模型:

$$\begin{aligned}&\min_{\mathcal{Z},\,E}\ \Vert\mathcal{Z}\Vert_{\circledast} + \lambda\Vert E\Vert_{2,1}\\&\text{s.t.}\ X^v = X^v Z^v + E^v,\ v = 1, 2, \cdots, V\\&\qquad\mathcal{Z} = \Phi(Z^1, Z^2, \cdots, Z^V)\\&\qquad E = \left[E^1, E^2, \cdots, E^V\right]\end{aligned}\tag{3}$$

$\Phi(\cdot)$ 将所有视图的表示矩阵 $\{Z^v\}_{v=1}^V$ 作为正面切片竖向合并为一个三阶表示张量 $\mathcal{Z} \in \mathbf{R}^{n\times n\times V}$. 由于不同视图的特征维度可能不同, 但是样本数目为固定值, 所以将特定于视图的误差矩阵进行垂直连接, 以构造误差矩阵 E. 使用张量表示相当于在保持矩阵表示的基础上增添了不同视图间关系的新维度, 进而可以探索多视图中更加全面的内部信息.

1.3 张量奇异值分解

张量奇异值分解是基于张量积 (t-product) 和正交张量 (Orthogonal tensor) 的概念:

张量 $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$和 $\mathcal{Y} \in \mathbf{R}^{n_2\times n_4\times n_3}$的积 $\mathcal{M} \in \mathbf{R}^{n_1\times n_4\times n_3}$表示为 $\mathcal{M}=\mathcal{X} * \mathcal{Y}=bvfold\{bcirc(\mathcal{X})bvec(\mathcal{Y})\}$, 其中 $bvfold(\cdot)$ 表示张量生成, $bcirc(\mathcal{X})$ 和 $bvec(\mathcal{Y})$ 分别表示块循环矩阵与张量展开矩阵, 详细介绍可参考[30]. 若张量 $\mathcal{X}$ 满足 $\mathcal{X} * \mathcal{X}^{\rm T} = \mathcal{X}^{\rm T} * \mathcal{X} = \mathcal{I}$, 则为正交张量, $\mathcal{I}$ 表示维度为 $n_1 \times n_1 \times n_3$ 的单位张量, 其第一个正面切片为单位矩阵 $I \in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, 其余正面切片中的元素都为 0.

张量 $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 的奇异值分解 (t-SVD) 如图 2 所示, 可表示为: $\mathcal{X} = \mathcal{U} * \mathcal{G} * \mathcal{V}^{\rm T}$. 其中 $\mathcal{U} \in$

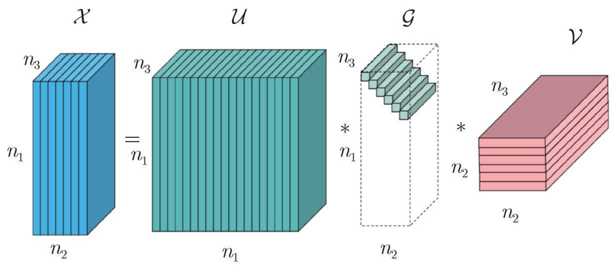


图 2　张量奇异值分解示例

Fig. 2　Examples of t-SVD

$\mathbf{R}^{n_1\times n_1\times n_3}$ 和 $\mathcal{V}\in\mathbf{R}^{n_2\times n_2\times n_3}$ 都是正交张量, $\mathcal{G}\in\mathbf{R}^{n_1\times n_2\times n_3}$ 表示每个正面切片都是的由特征值构成对角矩阵的张量.

基于张量奇异值分解的张量核范数[30] 可表示为:

$$\|\mathcal{X}\|_{\circledast}=\sum_{i=1}^{\min\{n_1,\,n_2\}}\sum_{k=1}^{n_3}|\widehat{\mathcal{G}}(i,\,i,\,k)| \tag{4}$$

式 (4) 中, $\widehat{\mathcal{G}}=\mathrm{FFT}(\mathcal{G},\,[\,],\,3)$ 表示沿第三维方向的离散傅里叶变换. $\widehat{\mathcal{G}}(i,\,i,\,k)$ 表示第 k 个正面切片的第 i 个奇异值, 即张量核范数 $\|\mathcal{X}\|_{\circledast}$ 被定义为所有正面切片中奇异值的和.

2　基于一步张量学习的多视图子空间聚类

本文提出了基于一步张量学习的多视图子空间聚类方法 (One-step tensor learning for multi-view subspace clustering, OTSC), 其框架结构如图 3 所示. OTSC 利用张量将不同视图的特征自表示信息进行统一建模, 并使用 t-SVD 对其进行低秩表示. 采用自适应近邻方法进行重建亲和度矩阵, 联合学习亲和度矩阵 A 与‘干净’的表示张量 $\mathcal{Z}$, 其优化过程借助乘法器交替方向法.

2.1　OTSC 模型框架

大量子空间聚类方法[14, 26, 35, 39] 中亲和度矩阵的学习往往脱离原始数据的特征信息进行分步求解, 使得聚类结果只能达到次优解. 在处理多视图聚类问题时, 常采用基于多个特定于视图的表示矩阵寻求一个一致性的表示矩阵的方法[14, 16, 40], 忽视了视图间的高阶信息. 为解决以上问题, 本方法采用基于图学习的聚类方法, 利用张量将样本间的关系拓展到视图间的高阶关系, 并充分挖掘亲和度矩阵与多视图原始数据之间的密切联系, 来获取一个更具辨别能力的亲和度矩阵. 由于原始数据易被噪声和异常值破坏[41], 故对表示张量进行 t-SVD 以获得一个去除噪声和异常值的‘干净’张量, 并与亲和度矩阵进行联合学习. 基于以上思想, 将图学习模型 (2) 拓展到具有 V 个视图的多视图数据 $X^v\in\mathbf{R}^{d_v\times n}$ 中, 可得:

$$\begin{aligned}&\min_{A}\sum_{v=1}^{V}\sum_{i,\,j}^{n}\|X_i^v-X_j^v\|_2^2a_{ij}+\beta\|A\|_{\mathrm{F}}^2\\&\mathrm{s.t.}\ A^{\mathrm{T}}\mathbf{1}=\mathbf{1},\ \mathbf{0}\le A\le\mathbf{1}\end{aligned} \tag{5}$$

结合式 (3) 和式 (5) 对多视图数据 $X^v\in\mathbf{R}^{d_v\times n}$ 进行一步化聚类的目标公式可表示为:

$$\begin{aligned}\min_{\mathcal{Z},\,E,\,A}\ &\|\mathcal{Z}\|_{\circledast}+\alpha\sum_{v=1}^{V}\mathrm{tr}(Z^{v\mathrm{T}}L_AZ^v)\\&+\beta\|A\|_{\mathrm{F}}^2+\gamma\|E^v\|_{2,\,1}\\\mathrm{s.t.}\ &X^v=X^vZ^v+E^v,\ v=1,\,2,\,\cdots,\,V\\&\mathcal{Z}=\Phi(Z^1,\,Z^2,\,\cdots,\,Z^v)\\&E=\left[E^1;E^2;\cdots;E^v\right]\\&A^{\mathrm{T}}\mathbf{1}=\mathbf{1},\ \mathbf{0}\le A\le\mathbf{1}\end{aligned} \tag{6}$$

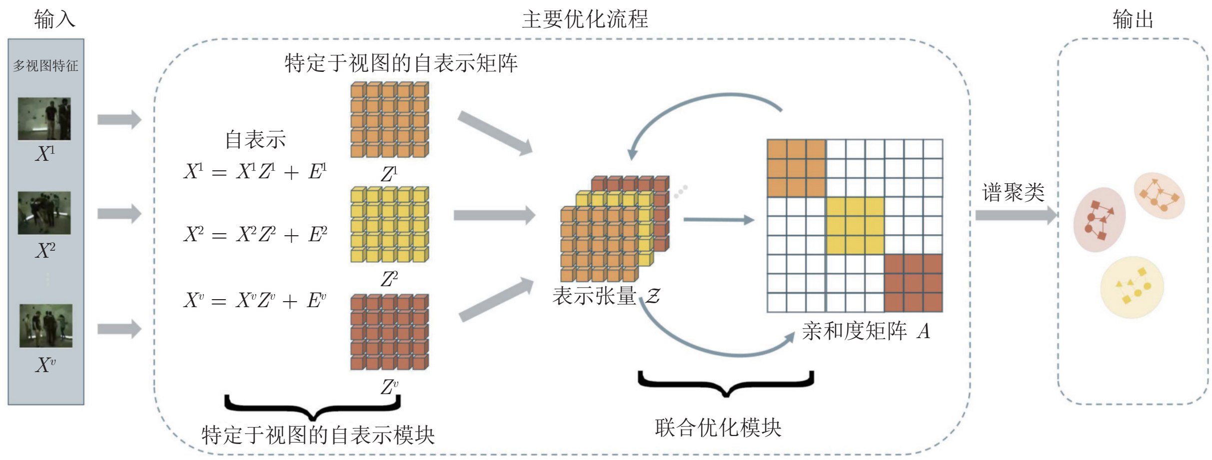


图 3　基于一步张量学习的多视图子空间聚类结构图

Fig. 3　The framework of the one-step tensor learning for multi-view subspace clustering (OTSC)

其中参数 α, β, γ 表示大于 0 的平衡因子. $\mathcal{Z}$ 为三维表示张量, 涵盖了所有视图中的自表示信息 $\{Z^v\}_{v=1}^V$, 反应了原始数据点之间的相似性关系[42]. $\|\mathcal{Z}\|_{\circledast}$ 如式 (4) 所示, 表示对 $\mathcal{Z}$ 进行张量奇异值分解, 去除了高维噪声与异常值的影响. $L_A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为图拉普拉斯矩阵, 可通过 $L_A = D - \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$ 计算得到, 其中 D 为对角矩阵, 其第 i 个对角线元素 d_{ii} 代表第 i 个样本数据的度, 表示为 $d_{ii} = \sum_j (a_{ij} + a_{ji})/2$. 之后, 亲和度矩阵 A 可通过 $\sum_{v=1}^V \mathrm{tr}(Z^{v\mathrm{T}} L_A Z^v) = \sum_{v=1}^V \sum_{i=1,\,j=1}^n \|Z_i^v - Z_j^v\|_2^2 a_{ij}$, 在'干净'的表示张量上进行学习获得. 若两样本 Z_i^v 和 Z_j^v 在目标子空间分布的距离较近, 即二者有较高的相似度时, a_{ij} 具有较大值.

多视图聚类的本质是根据样本的相似度信息, 将样本划分到不同的簇中[43]. 为了提高聚类算法的性能, 获得一个更具区分性的亲和度矩阵, 采用自适应近邻方法, 以确保簇内样本点的相似性高, 簇间差异性大的特性. 基于自适应近邻的方法仅保留 $\boldsymbol{a}_i$ 中数值最大的前 K 项[31], 其余元素 $a_{ij}(j > k)$ 置为 0, 可保证同类中的样本点的相似度系数大于簇间的相似度系数. 参数 β 的值由自适应近邻数目即 K 值决定, 详见第 2.2 节优化过程式 (20b).

2.2 模型优化

对目标式 (6) 进行优化求解的过程, 涉及多个变量求解的问题, 为此采用交替方向乘子法对式 (6) 进行优化. 式 (6) 中变量 $\mathcal{Z}$ 与目标函数和两个约束条件耦合, 增加了计算难度, 为此引入一个辅助变量 $\mathcal{Y}$ 使其解耦为:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathcal{Z},\,\mathcal{Y},\,E,\,A}\ & \|\mathcal{Z}\|_{\circledast} + \alpha \sum_{v=1}^{V} \mathrm{tr}(Y^{v\mathrm{T}} L_A Y^v) \\
& + \beta\|A\|_{\mathrm{F}}^2 + \gamma\|E^v\|_{2,1} \\
\text{s.t. } & X^v = X^v Y^v + E^v,\ v = 1, 2, \cdots, V \\
& \mathcal{Z} = \Phi(Z^1, Z^2, \cdots, Z^v) \\
& E = \left[E^1; E^2; \cdots; E^v\right] \\
& A^{\mathrm{T}}\mathbf{1} = \mathbf{1},\ \mathbf{0} \le A \le \mathbf{1} \\
& \mathcal{Z} = \mathcal{Y}
\end{aligned} \tag{7}
$$

针对上式, 构建增广拉格朗日函数, 获得无约束目标函数计算公式如下:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}, E, A; \Theta, \Pi) = & \|\mathcal{Z}\|_{\circledast} + \beta\|A\|_{\mathrm{F}}^2 + \gamma\|E\|_{2,1} + \\
& \sum_{v=1}^{V} (\alpha \mathrm{tr}(Y^{v\mathrm{T}} L_A Y^v) + \langle \Theta^v, X^v - X^v Y^v - E^v \rangle + \\
& \frac{\rho}{2}\|X^v - X^v Y^v - E^v\|_{\mathrm{F}}^2) + \langle \Pi, \mathcal{Z} - \mathcal{Y} \rangle + \\
& \frac{\rho}{2}\|\mathcal{Z} - \mathcal{Y}\|_{\mathrm{F}}^2
\end{aligned} \tag{8}
$$

借助增广拉格朗日公式将式 (7) 中的约束条件转换为式 (8) 最小化问题. 其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 代表矩阵的内积运算; Θ, Π 和 ρ 分别表示拉格朗日乘子与惩罚参数.

对式 (8) 通过固定其他变量来交替求解各变量优化的子问题, 以求得最优解. 优化过程中首先通过 t-SVD 学习更新变量 $\mathcal{Z}$, 其次更新辅助变量 $\mathcal{Y}$; 之后对噪声矩阵 E 和亲和度矩阵 A 同时更新; 最后更新两个拉格朗日乘子 Θ, Π 和惩罚参数 ρ. 详细子问题优化过程如下:

1) 更新 $\mathcal{Z}$: 固定式 (8) 中与 $\mathcal{Z}$ 无关变量, 对 $\mathcal{Z}$ 第 $t+1$ 次迭代的优化问题可化为:

$$
\min_{\mathcal{Z}} \frac{\rho_t}{2}\left\|\mathcal{Z} - \left(\mathcal{Y}_t - \frac{\Pi_t}{\rho_t}\right)\right\|_{\mathrm{F}}^2 + \|\mathcal{Z}\|_{\circledast} \tag{9}
$$

问题 (9) 是涉及张量奇异值分解的最小化问题, 其封闭解可根据定理 1[34] 计算.

问题 1. 给定张量 $\mathcal{S}$ 和一个常量 $\sigma > 0$. 张量 $\mathcal{Z}$ 的奇异值分解表示为 $\mathcal{S} = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}^{\mathrm{T}}$. 式 $\min_{\mathcal{Z}} \frac{1}{2}\|\mathcal{Z} - \mathcal{S}\|_{\mathrm{F}}^2 + \sigma\|\mathcal{Z}\|_{\circledast}$ 的最优解为 $\mathcal{Z}^* = \mathcal{A} * \theta_{n\sigma}(\mathcal{B}) * \mathcal{C}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\theta_{n\sigma}(\mathcal{B}) = \mathcal{B} * \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ 代表对角线元素为 $\mathcal{J}(i, i, j) = \max\{1 - \frac{n\sigma}{\mathcal{B}(i,i,j)}, 0\}$ 的对角张量.

2) 更新 $\mathcal{Y}$: 引入辅助变量 $\mathcal{Y}$ 的目的是使 $\mathcal{Z}$ 可分离, 优化 $\mathcal{Y}$ 的公式为:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathcal{Y}} \sum_{v=1}^{V} \Big(& \frac{\rho_t}{2}\|X^v - X^v Y^v - E_t^v + \frac{\Theta_t^v}{\rho_t}\|_{\mathrm{F}}^2 + \\
& \alpha \mathrm{tr}(Y^{v\mathrm{T}} L_A Y^v)\Big) + \frac{\rho_t}{2}\|\mathcal{Z}_{t+1} - \mathcal{Y} + \frac{\Pi_t}{\rho_t}\|_{\mathrm{F}}^2
\end{aligned} \tag{10}
$$

由于不同视图之间互不干扰, 故上式中变量 Y^v 是相互独立的, 因此将上式等价转换为 V 个子问题, 其中第 v 个视图的变量更新问题可写为:

$$
\begin{aligned}
\min_{Y^v} & \frac{\rho_t}{2}\|X^v - X^v Y^v - E_t^v + \frac{\Theta_t^v}{\rho_t}\|_{\mathrm{F}}^2 + \\
& \alpha \mathrm{tr}(Y^{v\mathrm{T}} L_A Y^v) + \frac{\rho_t}{2}\|\mathcal{Z}_{t+1}^v - Y^v + \frac{\Pi_t^v}{\rho_t}\|_{\mathrm{F}}^2
\end{aligned} \tag{11}
$$

式 (11) 对 Y^v 是凸函数, 因此对上式求关于 Y^v 的导数并使其为 0, 求得 Y^v 的如下封闭解:

$$
\begin{aligned}
Y_{t+1}^v = & \left(\rho_t(I + X^{v\mathrm{T}} X^v) + 2\alpha L_A\right)^{-1} \Big(\rho_t Z_{t+1}^v + \\
& \Pi_t^v + \rho_t X^{v\mathrm{T}}(X^v - E_t^v + \frac{\Theta_t^v}{\rho_t})\Big)
\end{aligned} \tag{12}
$$

3) 更新 E: 固定除 E 之外的其他变量, 并引入一个通过沿列方向连接矩阵 $\{F^v\}$ 的临时变量 $F_t^v = X^v - X^v Y_{t+1}^v + \frac{\Theta_t^v}{\rho_t}$, 对 E 的优化如下:

$$\min_E \frac{\gamma}{\rho_t}\|E\|_{2,1} + \frac{1}{2}\sum_{v=1}^{V}\|E^v - F_t^v\|_{\rm F}^2 =$$

$$\min_E \frac{\gamma}{\rho_t}\|E\|_{2,1} + \frac{1}{2}\|E - F_t\|_{\rm F}^2 \tag{13}$$

对 E_{t+1} 求得最优解为:

$$E_{t+1}(:, j) = \begin{cases} \dfrac{\|F_t(:, j)\|_2 - \frac{\gamma}{\rho_t}}{\|F_t(:, j)\|_2}F_t(:, j), & \text{if } \dfrac{\gamma}{\rho_t} < \|F_t(:, j)\| \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{14}$$

其中 $E_{t+1}(:, j)$ 表示 E_{t+1} 的第 j 列.

4) 更新 A: 对亲和度矩阵 A 优化如下:

$$\min_A \sum_{v=1}^{V}\alpha{\rm tr}({Y_{t+1}^v}^{\rm T}L_AY_{t+1}^v) + \beta\|A\|_{\rm F}^2$$
$$\text{s.t.}\quad A^{\rm T}\mathbf{1} = \mathbf{1},\ \mathbf{0} \le A \le \mathbf{1} \tag{15}$$

在上式中可通过 $L_A = D - \frac{1}{2}(A + A^{\rm T})$ 替换拉普拉斯矩阵 $L_A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 式 (15) 等价于:

$$\min_A \sum_{j=1}^{n}\sum_{v=1}^{V}\frac{\alpha}{2}\|Y_i^v - Y_j^v\|_2^2a_{ij} + \beta a_{ij}^2$$
$$\text{s.t.}\quad A^{\rm T}\mathbf{1} = \mathbf{1},\ \mathbf{0} \le A \le \mathbf{1} \tag{16}$$

上式可通过优化 n 个独立的子问题 $\boldsymbol{a_i}$ 进行求解:

$$\boldsymbol{a}_i = \arg\min_{\boldsymbol{a}_i}\|\boldsymbol{a}_i + \frac{\alpha}{4\beta}\boldsymbol{g}_i\|_2^2$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{a}_i^{\rm T}\mathbf{1} = \mathbf{1},\ \mathbf{0} \le \boldsymbol{a}_i \le \mathbf{1} \tag{17}$$

其中变量 $\boldsymbol{g}_i \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ 满足$g_{ij} = \sum_{v=1}^{V}\|Y_i^v - Y_j^v\|_2^2$. 将上式转换为拉普拉斯公式:

$$\|\boldsymbol{a}_i + \frac{\alpha}{4\beta_i}\boldsymbol{g}_i\|_2^2 - \eta(\boldsymbol{a}_i^{\rm T}\mathbf{1} - 1) - \delta^{\rm T}\boldsymbol{a}_i \tag{18}$$

其中 η, δ 为拉普拉斯乘法算子, 由卡罗需-库恩-塔克条件 (Karush-kuhn-tucker condition, KKT 条件)[43] 可知: $\boldsymbol{a}_i = \max\{\frac{\eta}{2} - \frac{\alpha\boldsymbol{g}_i}{4\beta_i}, 0\}$.

亲和度矩阵反应了样本之间的相似性关系, 直接决定了一个聚类算法的性能好坏. 为了获得更灵活的相似度矩阵, 确保类内样本点的相似度高于类间样本点的相似度, 对其应用自适应近邻方法, 仅保留 A 中前 K 项最大值的 $\boldsymbol{a}_i$, 以提高聚类的性能, 如下式所示:

$$a_{i,j} = \frac{\eta}{2} - \frac{\alpha g_{ij}}{4\beta_i} > 0, \qquad j \le K \tag{19a}$$

$$a_{i,j} = \frac{\eta}{2} - \frac{\alpha g_{ij}}{4\beta_i} \le 0, \qquad j > K \tag{19b}$$

$$\boldsymbol{a}_i{}^{\rm T}\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{K}\left(\frac{\eta}{2} - \frac{\alpha g_{ij}}{4\beta_i}\right) = \mathbf{1} \tag{19c}$$

$$\eta = \frac{2}{K} - \frac{\alpha}{2K\beta_i}\sum_{j=1}^{K}g_{ij} \tag{20a}$$

$$\beta_i = \frac{\alpha}{4}\left(K_{g_{i,K+1}} - \sum_{j=1}^{K}g_{ij}\right) \tag{20b}$$

$$a_{ij} = \frac{g_{i,K+1} - g_{ij}}{Kg_{i,K+1} - \sum\limits_{r=1}^{K}g_{ir}} \tag{20c}$$

由上式可知, 在式 (6) 中的参数 β 是由自适应近邻的数量 K 所决定. 这意味着仅需在在式 (6) 中预先定义参数 α, γ 和近邻数量 K 即可进行算法的优化工作.

5) 更新 Θ, Π 和 ρ: 在 $(t+1)$ 次迭代过程中, 拉普拉斯乘子 Θ, Π 和惩罚参数 ρ 的更新方式如下:

$$\Theta_{t+1}^v = \Theta_t^v + \rho_t(X^v - X^vY_{t+1}^v - E_{t+1}^v)$$
$$\Pi_{t+1} = \Pi_t + \rho_t(\mathcal{Z}_{t+1} - \mathcal{Y}_{t+1})$$
$$\rho_{t+1} = \min\{\lambda\times\rho_t,\ \rho_{\max}\} \tag{21}$$

其中 $\lambda > 1$, $\rho_{\max}$ 代表 ρ 的最大值. 本方法可总结为算法 1, 通过对式 (6) 的优化, 获得亲和度矩阵 A 的最优解, 之后在 A 上应用谱聚类算法, 得到最终的聚类结果.

算法 1. OTSC 多视图子空间聚类的优化算法

输入. 多视图数据 $X^{(v)}$, 参数 α, γ 以及最近邻数目 K;

初始化. 将表示张量 $\mathcal{Z}$ 及其辅助变量$\mathcal{Y}$, 噪声矩阵 E, 亲和度矩阵 A 以及拉格朗日乘法算子 Θ, Π 初始化为$\mathbf{0}$;

设置惩罚项参数 $\rho = 1$, $\lambda = 1.5$, 迭代次数 $t = 0$;

1) **while** not converged **do**

2) 通过式 (9) 更新 $\mathcal{Z}_{t+1}$.

3) **for** $v = 1$ to V **do**

4) 通过式 (12) 更新 $\mathbf{Y}_{t+1}^v$.

5) **end for**

6) 分别通过式 (14), (20c), (21) 更新 E_{t+1}, A_{t+1}, Θ_{t+1}, Π_{t+1}, ρ_{t+1}.

7) Check the convergence condition

8) $\max\left\{\begin{matrix}\|X^v - X^vY_{t+1}^v - E_{t+1}^v\|_\infty \\ \|\mathcal{Z}_{t+1} - \mathcal{Y}_{t+1}\|_\infty\end{matrix}\right\} \le tol$;

9) **end while**

输出. 亲和度矩阵 A

2.3 时间复杂度分析

本文提出 OTSC 模型的时间复杂度主要由更新 $\mathcal{Z}$、$\mathcal{Y}$、E、A 四部分组成, 算法整体流程如算

法 1 所示. 更新表示张量 $\mathcal{Z}$ 的主要复杂度为计算 t-SVD, 该过程的时间复杂度为 $O(2Vn^2\log_2(n))$, 其中 n, V 分别表示多视图数据的样本数和视图数. 在第二步更新辅助张量 $\mathcal{Y}$ 时, 涉及矩阵求逆和矩阵乘法, 其耗费时间复杂度 $O(Vn^3)$. 对于更新噪声矩阵 E 与亲和度矩阵 A 的时间复杂度分别为 $O(Vn^2)$ 和 $O(n^2)$. 综上分析, 算法的整体复杂度为 $O(TVn^2(\log_2(n)+V+n+1))$, 其中 T 表示算法迭代的次数.

3 实验结果与分析

3.1 实验设计

数据集: 为了验证算法的有效性, 在六个分别隶属于面部图像、新闻故事、手写数字和通用对象场景四种不同类别广泛使用的数据集上进行实验.

1) Extended YaleB: 该数据集由耶鲁大学发布, 包含 38 个人类对象在不同光线强度下的各 64 张图像. 在本实验中根据文献 [6] 只对前 10 个不同对象进行验证, 构成了包含 640 张面部图片的数据.

2) ORL: ORL 人脸数据集是由英国剑桥 Olivetti 实验室所创建. 包含 40 个人在不同的时间、光照、面部表情 (睁眼/闭眼, 微笑/不微笑) 和面部细节 (戴眼镜/不戴眼镜) 环境下采集的 400 张图像. Extended YaleB 与 ORL 数据集都属于面部图像类别, 对二者分别提取强度、LBP[3] 和 Gabor[4] 三种特征作为多视图数据的不同视图.

3) 3Sources: 该数据集是从 BBC、路透社和卫报三种在线新闻收集的多视图文本数据集, 涵盖 416 条不同的新闻报道. 数据集来自六类主题标签: 商业、娱乐、健康、政治、体育、技术, 是具有三种特征的多视图数据.

4) BBCSport: 属于新闻故事类数据集, 来自 2004-2005 年 BBC Sport 网站的五个主题领域的体育新闻文章, 常用作机器学习研究的基准. BBCSport 包含具有两种不同类型特征的 544 个文档, 构成 $V=2$ 的多视图数据.

5) UCI-Digits: 数据集包含从荷兰公用事业地图集合中提取的手写数字 (0 ~ 9) 共 10 类阿拉伯数字, 每类有 200 张图像. 依据 [16] 提取了该数据集傅里叶系数、像素平均和形态特征三个特征作为多视图数据.

6) COIL-20: 该数据集由哥伦比亚大学图像库发布. 含有 20 个不同物体在 360° 旋转中不同角度的各 72 张成像. 与 ExtendedYaleB、ORL 数据集相同采用 1 024 维强度、3 304 维 LBP、6 750 维 Gabor 三个视图特征.

表 2 详细总结了上述六个数据集的信息.

表 2 真实多视图数据集信息

Table 2 Summary of all real-world multi-view databases

数据集	样本数量	类别	视图	种类
Extended YaleB	640	38	3	面部图像
ORL	400	40	3	面部图像
3Sources	169	6	3	新闻故事
BBCSport	544	5	2	新闻故事
UCI-Digits	2000	10	3	手写数字
COIL_20	1 440	20	3	通用对象

对比算法: 本文提出的方法与以下 12 种最先进聚类方法进行对比, 其中包括 3 种单视图聚类 (SVC) 和 9 种多视图聚类 (MVC) 方法. 为了和 SVC 方法进行对比, 在多视图数据的每个视图上分别采取 SSC[22]、LRR[21]、RSS[42] 三种单视图聚类方法, 并选取最好的聚类结果; 11 种流行的 MVC 方法, 包括低秩和稀疏分解 (RMSC)[40]、多样性诱导多视图子空间聚类 (DiMSC)[44]、低秩张量约束的多视图子空间聚类 (LT-MSC)[6]、自动权重的多视图学习 (MLAN)[45]、多视图张量多秩最小化 (t-SVD)[7]、基于图的多视图聚类 (GMC)[16]、潜在的多视图子空间聚类 (LMSC)[46]、张量积表示 (SCMV-3DT)[39]、多视图子空间聚类中的低阶张量图学习 (LRTG)[41]、加权张量核范数最小化 (WTNNM)[47] 和图正则化的张量和亲和度矩阵低秩表示的子空间聚类 (GLTA)[25].

参数设置: 模型中有四个参数 α, β, γ 与 K, 其中 α, β, γ 分别表示局部流形、亲和度矩阵正则化项和噪声在模型中的贡献度, K 为自适应近邻数目. 由于式 (6) 中参数 β 可由参数 α 与 K 通过式 (20b) 求解得出, 因此模型中只需对参数 α, γ, K 进行参数选择. 实验中, 依据经验对参数 α 和 γ 从集合 [0.001、0.005、0.01、0.05、0.1、0.2、0.4、0.5、1、2、5、10、50、100、500] 中选择, K 从 [5, 15] 的区间选择以寻求最优的聚类性能. 具体的, 针对七个多视图数据集的参数设置如表 3 所示. 在对比实验中, 本文遵从对比算法相应文章中的参数设定, 对每个算法进行了 10 次测试, 并记录了最优的参数下的平均结果和标准偏差.

评估指标: 为了全面地验证本算法的性能, 采用准确性 (ACC)、标准化互信息 (NMI)、调整后的等级指数 (AR)、F 分数、精确度和召回率六个流行的指标来评估聚类性能. 不同的指标侧重于聚类不同的属性, 但都满足其值越高, 聚类性能越好的特性. ACC 是评估聚类任务的常用度量指标, 定义为:

$$ACC=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta(map(L_i)=Y_i)}{n} \tag{22}$$

表 3　参数设置

Table 3　Parameter setting

数据集	α	γ	K
Extended YaleB	1	0.005	5
ORL	0.1	0.05	12
3Sources	0.1	50	8
BBCSport	0.05	5	8
UCI-Digits	0.2	2	15
COIL_20	0.05	1	5

上式中, L_i, Y_i 分别表示第 i 个样本的聚类标签和真实标签, $\delta((map(L_i)=Y_i)$ 表示正确聚类样本的个数. NMI 的具体数学定义为:

$$NMI=\frac{I(L,Y)}{H(L)+H(Y)} \tag{23}$$

其中, $H(\cdot)$ 表示熵, $I(\cdot)$ 表示互信息, 可表示为: $I(L,Y)=H(L)+H(Y)-H(L,Y)$ 反应了 L 与 Y 之间的相关程度. AR、F 分数、精确度和召回率将聚类视为一系列决策, 其相关定义的更多细节可参考文献 [7].

3.2　实验结果

受文献 [47] 的启发, 本文也考虑了利用加权张量核范数进行张量低秩优化, 并用 WOTSC 表示. 实验结果如表 4 ~ 表 6 所示, 加粗数字表示最优聚类结果, 下划线的数据表示次优结果. 通过观察实

表 4　数据集 Extended YaleB、ORL 的聚类结果

Table 4　Clustering results (mean ± standard deviation) on Extended YaleB and ORL

数据	类型	方法	ACC	NMI	AR	F - $score$	$Precision$	$Recall$
Extended YaleB	单视图方法	SSC_{best}	0.587±0.003	0.534±0.003	0.430±0.005	0.487±0.004	0.451±0.002	0.509±0.007
		LRR_{best}	0.615±0.013	0.627±0.040	0.451±0.002	0.508±0.004	0.481±0.002	0.539±0.001
		RSS_{best}	0.742±0.001	0.787±0.000	0.685±0.001	0.717±0.001	0.704±0.001	0.730±0.000
	多视图方法	RMSC	0.210±0.013	0.157±0.019	0.060±0.014	0.155±0.012	0.151±0.012	0.159±0.013
		DiMSC	0.615±0.003	0.636±0.002	0.453±0.005	0.504±0.006	0.481±0.004	0.534±0.004
		LT-MSC	0.626±0.010	0.637±0.003	0.459±0.030	0.521±0.006	0.485±0.001	0.539±0.002
		MLAN	0.346±0.011	0.352±0.015	0.093±0.009	0.213±0.023	0.159±0.018	0.321±0.013
		t-SVD	0.652±0.000	0.667±0.004	0.500±0.003	0.550±0.002	0.514±0.004	0.590±0.004
		GMC	0.434±0.000	0.449±0.000	0.157±0.000	0.265±0.000	0.204±0.000	0.378±0.000
		LMSC	0.598±0.005	0.568±0.004	0.354±0.007	0.423±0.006	0.390±0.006	0.463±0.005
		SCMV-3DT	0.410±0.001	0.413±0.002	0.185±0.002	0.276±0.001	0.244±0.002	0.318±0.001
		LRTG	0.954±0.000	0.905±0.000	0.899±0.000	0.909±0.000	0.908±0.000	0.911±0.000
		WTNNM	0.648±0.005	0.661±0.002	0.501±0.000	0.552±0.000	0.533±0.000	0.573±0.000
		GLTA	0.571±0.002	0.630±0.005	0.510±0.005	0.560±0.004	0.544±0.004	0.576±0.006
	本方法	OTSC	0.969±0.001	0.934±0.001	0.931±0.002	0.937±0.002	0.935±0.002	0.939±0.002
		WOTSC	**0.972±0.000**	**0.943±0.000**	**0.938±0.000**	**0.944±0.000**	**0.942±0.000**	**0.946±0.000**
ORL	单视图方法	SSC_{best}	0.765±0.008	0.893±0.007	0.694±0.013	0.682±0.012	0.673±0.007	0.764±0.005
		LRR_{best}	0.773±0.003	0.895±0.006	0.724±0.020	0.731±0.004	0.701±0.001	0.754±0.002
		RSS_{best}	0.846±0.024	0.938±0.007	0.798±0.023	0.803±0.023	0.759±0.030	0.852±0.017
	多视图方法	RMSC	0.723±0.007	0.872±0.012	0.645±0.003	0.654±0.007	0.607±0.009	0.709±0.004
		DiMSC	0.838±0.001	0.940±0.003	0.802±0.000	0.807±0.003	0.764±0.012	0.856±0.004
		LT-MSC	0.795±0.007	0.930±0.003	0.750±0.003	0.768±0.004	0.766±0.009	0.837±0.005
		MLAN	0.705±0.02	0.854±0.018	0.384±0.010	0.376±0.015	0.254±0.021	0.721±0.020
		t-SVD	0.970±0.003	**0.993±0.002**	**0.967±0.002**	**0.968±0.003**	0.946±0.004	**0.991±0.003**
		GMC	0.633±0.000	0.857±0.000	0.337±0.000	0.360±0.000	0.232±0.000	0.801±0.000
		LMSC	0.877±0.024	0.949±0.006	0.839±0.022	0.843±0.021	0.806±0.027	0.884±0.017
		SCMV-3DT	0.839±0.012	0.908±0.007	0.763±0.018	0.769±0.017	0.747±0.020	0.792±0.016
		LRTG	0.933±0.003	0.970±0.002	0.905±0.005	0.908±0.005	0.888±0.004	0.928±0.007
		WTNNM	0.967±0.000	0.992±0.000	0.960±0.000	0.952±0.000	0.946±0.000	0.968±0.000
		GLTA	0.976±0.002	0.994±0.006	0.958±0.024	0.963±0.019	0.952±0.035	0.989±0.012
	本方法	OTSC	**0.983±0.002**	0.988±0.001	0.964±0.003	0.965±0.003	**0.958±0.004**	0.972±0.001
		WOTSC	0.938±0.000	0.972±0.000	0.907±0.000	0.909±0.000	0.885±0.000	0.936±0.000

表 5 数据集 3Sources、UCI-Digits 的聚类结果

Table 5 Clustering results (mean ± standard deviation) on 3Sources and UCI-Digits

数据	类型	方法	*ACC*	*NMI*	*AR*	*F - score*	*Precision*	*Recall*
3Sources	单视图方法	SSC_{best}	0.762±0.003	0.694±0.003	0.658±0.004	0.743±0.003	0.769±0.001	0.719±0.005
		LRR_{best}	0.647±0.033	0.542±0.018	0.486±0.028	0.608±0.033	0.594±0.031	0.636±0.096
		RSS_{best}	0.722±0.000	0.601±0.000	0.533±0.000	0.634±0.000	0.679±0.000	0.595±0.000
	多视图方法	RMSC	0.583±0.022	0.630±0.011	0.455±0.031	0.557±0.025	0.635±0.029	0.497±0.028
		DiMSC	0.795±0.004	0.727±0.010	0.661±0.005	0.748±0.004	0.711±0.005	0.788±0.003
		LT-MSC	0.781±0.000	0.698±0.003	0.651±0.003	0.734±0.002	0.716±0.008	0.754±0.005
		MLAN	0.775±0.015	0.676±0.005	0.580±0.008	0.666±0.007	0.756±0.003	0.594±0.009
		t-SVD	0.781±0.000	0.678±0.000	0.658±0.000	0.745±0.000	0.683±0.000	0.818±0.000
		GMC	0.693±0.000	0.622±0.000	0.443±0.000	0.605±0.000	0.484±0.000	0.804±0.000
		LMSC	0.912±0.006	0.826±0.007	0.842±0.011	0.887±0.008	0.873±0.007	0.877±0.012
		SCMV-3DT	0.440±0.020	0.386±0.009	0.226±0.012	0.411±0.009	0.399±0.012	0.425±0.016
		LRTG	0.947±0.000	0.865±0.000	0.881±0.000	0.909±0.000	0.911±0.000	0.906±0.000
		WTNNM	0.793±0.000	0.692±0.000	0.679±0.000	0.761±0.010	0.693±0.000	0.845±0.000
		GLTA	0.859±0.008	0.753±0.015	0.713±0.014	0.775±0.011	0.827±0.009	0.730±0.013
	本方法	OTSC	**0.953±0.000**	**0.880±0.000**	**0.893±0.000**	**0.918±0.000**	**0.914±0.000**	**0.922±0.000**
		WOTSC	0.947±0.000	0.867±0.000	0.888±0.000	0.914±0.000	0.909±0.000	0.920±0.000
UCI-Digits	单视图方法	SSC_{best}	0.815±0.011	0.840±0.001	0.770±0.005	0.794±0.004	0.747±0.010	0.848±0.004
		LRR_{best}	0.871±0.001	0.768±0.002	0.736±0.002	0.763±0.002	0.759±0.002	0.767±0.002
		RSS_{best}	0.819±0.000	0.863±0.000	0.787±0.000	0.810±0.000	0.756±0.000	0.872±0.000
	多视图方法	RMSC	0.915±0.024	0.822±0.008	0.789±0.014	0.811±0.012	0.797±0.017	0.826±0.006
		DiMSC	0.703±0.010	0.772±0.006	0.652±0.006	0.695±0.006	0.673±0.005	0.718±0.007
		LT-MSC	0.803±0.001	0.775±0.001	0.725±0.001	0.753±0.001	0.739±0.001	0.767±0.001
		MLAN	0.874±0.000	0.910±0.000	0.847±0.000	0.864±0.000	0.797±0.000	0.943±0.000
		t-SVD	0.955±0.000	0.932±0.000	0.924±0.000	0.932±0.000	0.930±0.000	0.934±0.000
		GMC	0.736±0.000	0.815±0.000	0.678±0.000	0.713±0.000	0.644±0.000	0.799±0.000
		LMSC	0.893±0.000	0.815±0.000	0.783±0.000	0.805±0.000	0.798±0.000	0.812±0.000
		SCMV-3DT	0.930±0.001	0.861±0.001	0.846±0.001	0.861±0.001	0.859±0.001	0.864±0.001
		LRTG	0.981±0.000	0.953±0.000	0.957±0.000	0.961±0.000	0.961±0.000	0.962±0.000
		WTNNM	**0.998±0.000**	**0.993±0.000**	**0.994±0.000**	**0.995±0.010**	**0.998±0.000**	**0.995±0.000**
		GLTA	0.997±0.000	0.992±0.000	0.993±0.000	0.994±0.000	0.994±0.000	0.994±0.000
	本方法	OTSC	0.983±0.001	0.958±0.001	0.962±0.001	0.966±0.001	0.965±0.000	0.966±0.002
		WOTSC	0.983±0.000	0.958±0.000	0.962±0.000	0.966±0.000	0.965±0.000	0.966±0.000

验结果, 可以得出以下结论: 1) 本文提出的 OTSC 及 WOTSC 在大多数情形下都取得了最优值, 或者次优解, 彰显了本算法优异的聚类性能. 2) 通过比较 SVC 和 MVC 的聚类结果, 可知大多数 MVC 算法的性能高于 SVC 的聚类结果, 直接地展现出多视图聚类的优势. 例如, 在 Extended YaleB 数据集上, WOTSC 比 SVC 最优的 RSS 算法的聚类性能在六个指标上分别提高了 23.0%、15.6%、25.3%、22.7%、23.8% 和 21.6%. 3) 与 LRTG 方法进行对比, 本方法在所有数据集上的聚类效果都优于 LRTG. 这是由于所提方法是通过 t-SVD 对数据特征的表示张量进行低秩约束, 以去除高维噪声和异常值. 相比于塔克分解, t-SVD 更具鲁棒性与高效性. 4) RMSC、LT-MSC、LMSC 和 t-SVD 都是基于低秩表示的多视图聚类方法, 通过独立的两步求解亲和度矩阵, 即亲和度矩阵的计算与表示张量的求解分步进行. 通过与以上算法的对比, 可得本文提出的方法通过联合学习表示张量和亲和度矩阵,

表 6　数据集 BBCSport、COIL-20 的聚类结果

Table 6　Clustering results (mean ± standard deviation) on BBCSport and COIL-20

数据	类型	方法	*ACC*	*NMI*	*AR*	*F - score*	*Precision*	*Recall*
BBCSport	单视图方法	$\mathrm{SSC_{best}}$	0.627±0.003	0.534±0.008	0.364±0.007	0.565±0.005	0.427±0.004	0.834±0.004
		$\mathrm{LRR_{best}}$	0.836±0.001	0.698±0.002	0.705±0.001	0.776±0.001	0.768±0.001	0.784±0.001
		$\mathrm{RSS_{best}}$	0.878±0.000	0.714±0.000	0.717±0.000	0.784±0.000	0.787±0.000	0.782±0.000
	多视图方法	RMSC	0.826±0.001	0.666±0.001	0.637±0.001	0.719±0.001	0.766±0.001	0.677±0.001
		DiMSC	0.922±0.000	0.785±0.000	0.813±0.000	0.858±0.000	0.846±0.000	0.872±0.000
		LT-MSC	0.460±0.046	0.222±0.028	0.167±0.043	0.428±0.014	0.328±0.028	0.629±0.053
		MLAN	0.721±0.000	0.779±0.000	0.591±0.000	0.714±0.000	0.567±0.000	0.962±0.000
		t-SVD	0.879±0.000	0.765±0.000	0.784±0.000	0.834±0.000	0.863±0.000	0.807±0.000
		GMC	0.807±0.000	0.760±0.000	0.722±0.000	0.794±0.000	0.727±0.000	0.875±0.000
		LMSC	0.847±0.003	0.739±0.001	0.749±0.001	0.810±0.001	0.799±0.001	0.822±0.001
		SCMV-3DT	0.980±0.000	0.929±0.000	0.935±0.000	0.950±0.000	0.959±0.000	0.942±0.000
		LRTG	0.943±0.005	0.869±0.009	0.840±0.012	0.879±0.000	0.866±0.006	0.892±0.014
		WTNNM	0.963±0.000	0.900±0.000	0.908±0.000	0.930±0.000	0.950±0.000	0.911±0.000
		GLTA	**1.000±0.000**	**1.000±0.000**	**1.000±0.000**	**1.000±0.000**	**1.000±0.000**	**1.000±0.000**
	本方法	OTSC	0.970±0.000	0.914±0.000	0.911±0.000	0.933±0.000	0.928±0.000	0.937±0.000
		WOTSC	0.985±0.000	0.950±0.000	0.957±0.000	0.967±0.000	0.963±0.000	0.971±0.000
COIL-20	单视图方法	$\mathrm{SSC_{best}}$	0.803±0.022	0.935±0.009	0.798±0.022	0.809±0.013	0.734±0.027	0.804±0.028
		$\mathrm{LRR_{best}}$	0.761±0.003	0.829±0.006	0.720±0.020	0.734±0.006	0.717±0.003	0.751±0.002
		$\mathrm{RSS_{best}}$	0.837±0.012	0.930±0.006	0.789±0.005	0.800±0.005	0.717±0.012	0.897±0.017
	多视图方法	RMSC	0.685±0.045	0.800±0.017	0.637±0.044	0.656±0.042	0.620±0.057	0.698±0.026
		DiMSC	0.778±0.022	0.846±0.002	0.732±0.005	0.745±0.005	0.739±0.007	0.751±0.003
		LT-MSC	0.804±0.011	0.860±0.002	0.748±0.004	0.760±0.007	0.741±0.009	0.776±0.006
		MLAN	0.862±0.011	0.961±0.004	0.835±0.006	0.844±0.013	0.758±0.008	0.953±0.007
		t-SVD	0.830±0.000	0.884±0.005	0.786±0.003	0.800±0.004	0.785±0.007	0.808±0.001
		GMC	0.791±0.001	0.941±0.000	0.782±0.000	0.794±0.000	0.694±0.000	0.929±0.000
		LMSC	0.806±0.013	0.862±0.007	0.765±0.014	0.776±0.013	0.770±0.013	0.783±0.013
		SCMV-3DT	0.701±0.028	0.810±0.009	0.635±0.003	0.654±0.029	0.614±0.039	0.702±0.018
		LRTG	0.927±0.000	0.976±0.000	0.928±0.000	0.932±0.000	0.905±0.000	0.961±0.000
		WTNNM	0.902±0.000	0.945±0.000	0.893±0.000	0.898±0.010	0.897±0.000	0.900±0.000
		GLTA	0.903±0.006	0.946±0.001	0.891±0.007	0.897±0.006	0.893±0.013	0.900±0.001
	本方法	OTSC	0.936±0.004	**0.983±0.004**	**0.938±0.006**	**0.941±0.006**	0.906±0.007	**0.979±0.006**
		WOTSC	**0.960±0.026**	0.976±0.004	0.934±0.025	0.938±0.024	**0.918±0.042**	0.959±0.004

可以更好地捕获数据中的底层低维结构.

3.3　模型分析

消融实验: 为了探究联合优化模块对本算法的性能影响, 探索'一步化'学习表示张量与亲和度矩阵的有效性, 本节对该模块进行消融测试. 分别在 Extended YaleB、COIL-20、3Sources、UCI-Digits 四个数据集上进行实验, $OTSC_{\mathcal{A}}$ 和 $OTSC_{\mathcal{Z}}$ 分别表示依据经过联合优化的亲和度矩阵、表示张量以进行聚类的方法. 实验结果如图 4 所示, 可观测出, $OTSC_{\mathcal{A}}$ 的 ACC 与 NMI 的值都高于 $OTSC_{\mathcal{Z}}$, 其中在 Extended YaleB 数据集上尤为明显, 彰显了联合优化模块的高效性与探索亲和度矩阵与表示张量的高阶相关性的积极作用. 参数选择: 为了验证参数选择对 OTSC 模型的影响, 本文在 ORL 数据集上进行了参数 α 和 γ 在 [0.001、0.005、0.01、0.05、0.1、0.2、0.4、0.5、1、2、5、10、50、100、500] 的集合上遍历的实验. 结果如图 5 所示, 可看出本

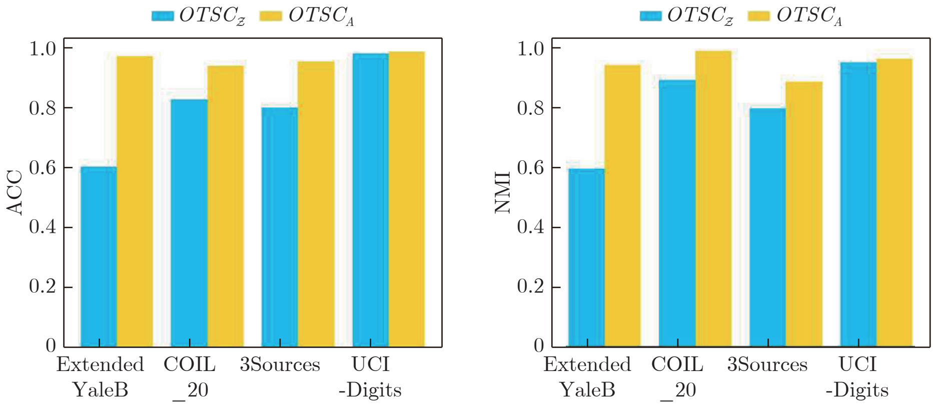


图 4 OTSC 性能的消融实验

Fig. 4 Ablation experiment of OTSC performance

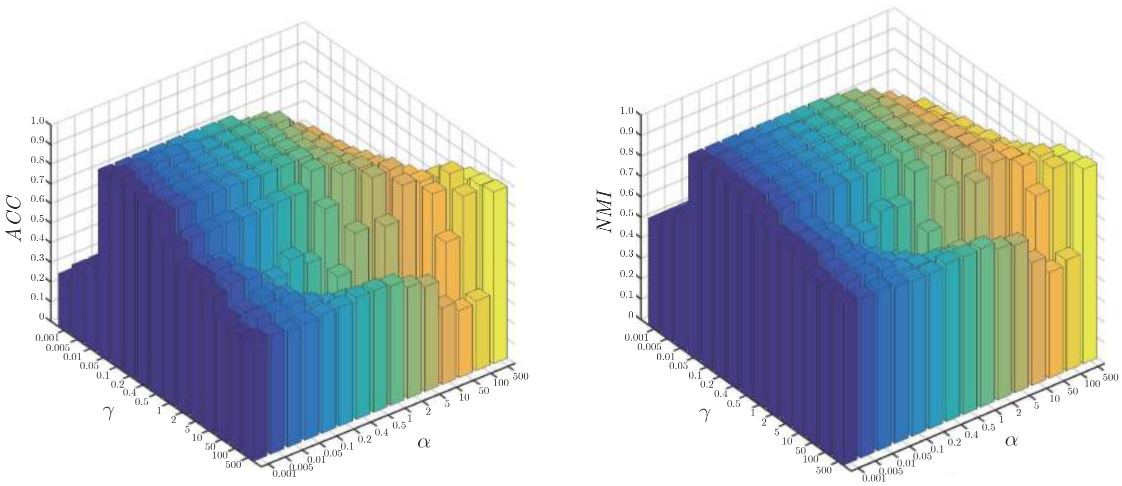


图 5 根据 ACC 和 NMI 调整数据集 ORL 参数 α 与 γ

Fig. 5 Parameters tuning in terms of ACC and NMI on ORL

算法在该数据集上当 γ 取自区间 [0.05, 0.5], α 取自区间 [0.00, 1] 时, 有较好的性能 (ACC 和 NMI 取得较高的值). 此外, 本节还探索了参数自适应近邻数目 K 对聚类结果准确率的影响. 结果如图 6 所示, 显示出 ORL 数据集在参数 K 取值由 5 到 9 时 ACC 为递增变化, 并在 $K = 9$ 时取得最大值.

3.4 模型收敛性

本算法采用交替方向乘子法进行多个变量的更新, 具有较快的收敛速度. 图 7 显示了 OTSC 在数据集 BBCSport、ExtendedYaleB 上准确率、停止标准与迭代次数的关系. 可观测出, 算法的残差在 5 次迭代后趋于稳定, 并且准确率也达到峰值而趋于稳定, 都反应出本模型的优化算法的高效收敛性.

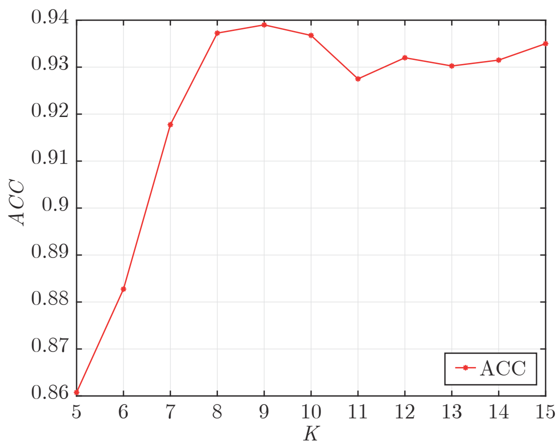
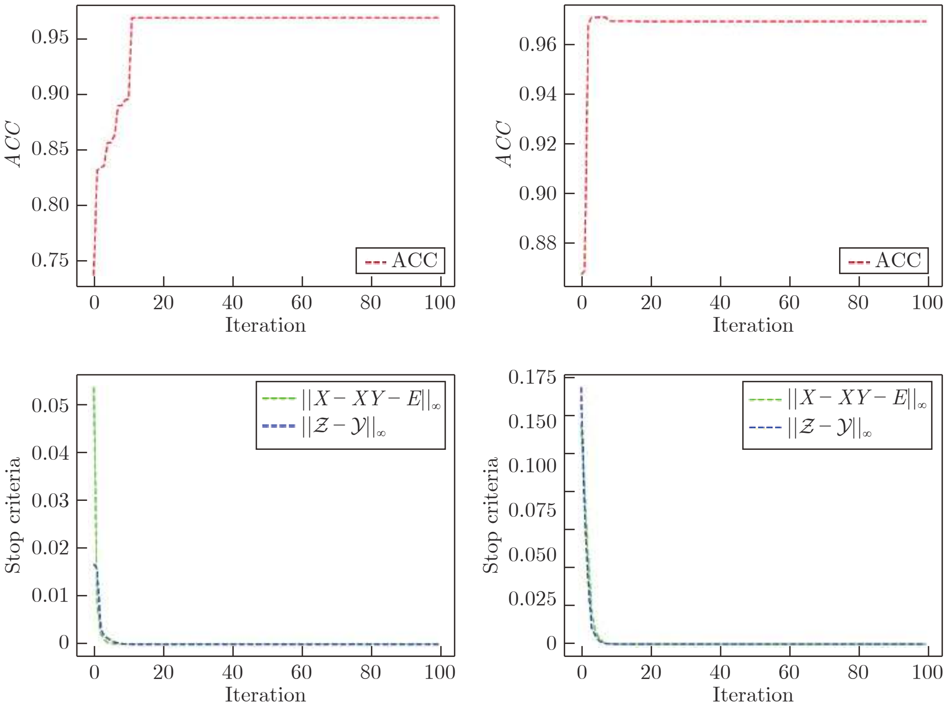


图 6 参数 K 对数据集 ORL 的 ACC 影响

Fig. 6 The effect of parameter K on the ACC of ORL.

4 结论

针对多视图聚类两步化求解亲和度矩阵、如何探索多视图之间的高阶相关性的问题, 本文提出了一种基于一步张量学习的多视图子空间聚类方法.



(a) BBCSport (b) Extended YaleB

图 7 收敛性曲线 ((a) BBCSport; (b) Extended YaleB)

Fig. 7 The convergence curves and ACC versus iterations on ((a) BBCSport; (b) Extended YaleB)

本方法借助图学习的思想, 利用张量三维数据结构的属性来充分挖掘多视图数据的底层低维结构. 具体地, 本算法将特定于视图的表示矩阵拼接为三维张量以探索数据间高阶相关性, 并采用 t-SVD(如式 (4) 所示) 低秩约束以寻求一个'干净'的表示张量. 通过引入'一步化'联合学习框架, 有效地实现表示张量和亲和度矩阵的共同优化, 克服了对亲和度矩阵固定求解的问题. 此外, 还采用自适应最近邻方案, 共同学习一个鲁棒的低秩张量图. 由于该算法涉及多个优化变量, 故采取交替方向乘子法进行交替优化. 在六个多视图数据集上的实验表明本方法的有效性和鲁棒性. 在后续工作中, 考虑将'一步化'联合求解的方法拓展到深度学习中, 借助卷积神经网络来学习更具判别性的亲和度矩阵.

References

1 Du G W, Zhou L H, Yang Y D, Lü K, Wang L Z. Deep multiple auto-encoder-based multi-view clustering. *Data Science and Engineering*, 2021, **6**(3): 323−338

2 Fu L L, Chen Z L, Chen Y Y, Wang S P. Unified low-rank tensor learning and spectral embedding for multi-view subspace clustering. *IEEE Transactions on Multimedia*, DOI: 10.1109/TMM.2022.3185886

3 Wang X Y, Han T X, Yan S C. An HOG-LBP human detector with partial occlusion handling. In: Proceedings of the IEEE 12th International Conference on Computer Vision (ICCV). Kyoto, Japan: IEEE, 2009. 32−39

4 Lades M, Vorbruggen J C, Buhmann J, Lang J, von der Malsburg C, Wurtz R P, et al. Distortion invariant object recognition in the dynamic link architecture. *IEEE Transactions on Computers*, 1993, **42**(3): 300−311

5 Dalal N, Triggs B. Histograms of oriented gradients for human detection. In: Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05). San Diego, USA: IEEE, 2005. 886−893

6 Zhang C Q, Fu H Z, Liu S, Liu G C, Cao X C. Low-rank tensor constrained multiview subspace clustering. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Santiago, Chile: IEEE, 2015. 1582−1590

7 Xie Y, Tao D C, Zhang W S, Liu Y, Zhang L, Qu Y Y. On unifying multi-view self-representations for clustering by tensor multi-rank minimization. *International Journal of Computer Vision*, 2018, **126**(11): 1157−1179

8 Shi D, Zhu L, Li J J, Cheng Z Y, Zhang Z. Flexible multiview spectral clustering with self-adaptation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, DOI: 10.1109/TCYB.2021.3131749

9 Zhao Bo-Yu, Zhang Chang-Qing, Chen Lei, Liu Xin-Wang, Li Ze-Chao, Hu Qing-Hua. Generative model for partial multi-view clustering. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(8): 1867−1875
(赵博宇, 张长青, 陈蕾, 刘新旺, 李泽超, 胡清华. 生成式不完整多视图数据聚类. 自动化学报, 2021, **47**(8): 1867−1875)

10 Qin Y L, Wu H Z, Zhang X P, Feng G R. Semi-supervised structured subspace learning for multi-view clustering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, **31**: 1−14

11 Han Z B, Zhang C Q, Fu H Z, Zhou J Y. Trusted multi-view classification with dynamic evidential fusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, DOI: 10.1109/TPAMI.2022.3171983

12 An J F, Luo H Y, Zhang Z, Zhu L, Lu G M. Cognitive multimodal consistent hashing with flexible semantic transformation.

Information Processing & Management, 2022, **59**(1): Article No. 102743

13 Peng Z H, Liu H, Jia Y H, Hou J H. Adaptive attribute and structure subspace clustering network. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, **31**: 3430−3439

14 Huang Z Y, Zhou J T, Zhu H Y, Zhang C, Lv J C, Peng X. Deep spectral representation learning from multi-view data. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2021, **30**: 5352−5362

15 Liang Y W, Huang D, Wang C D, Yu P S. Multi-view graph learning by joint modeling of consistency and inconsistency. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, DOI: 10.1109/TNNLS.2022.3192445

16 Wang H, Yang Y, Liu B. GMC: Graph-based multi-view clustering. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2020, **32**(6): 1116−1129

17 Patel V M, Vidal R. Kernel sparse subspace clustering. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). Paris, France: IEEE, 2014. 2849−2853

18 Yin M, Guo Y, Gao J B, He Z S, Xie S L. Kernel sparse subspace clustering on symmetric positive definite manifolds. In: Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Las Vegas, USA: IEEE, 2016. 5157−5164

19 Wang S Q, Chen Y Y, Zhang L N, Cen Y G, Voronin V. Hyper-laplacian regularized nonconvex low-rank representation for multi-view subspace clustering. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, 2022, **8**: 376−388

20 Li Z L, Tang C, Zheng X, Liu X W, Zhang W, Zhu E. High-order correlation preserved incomplete multi-view subspace clustering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, **31**: 2067−2080

21 Liu G C, Lin Z C, Yan S C, Sun J, Yu Y, Ma Y. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, **35**(1): 171−184

22 Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering: Algorithm, theory, and applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, **35**(11): 2765−2781

23 Yin Ming, Wu Hao-Yang, Xie Sheng-Li, Yang Qi-Yu. Self-attention adversarial based deep subspace clustering. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(1): 271−281
(尹明, 吴浩杨, 谢胜利, 杨其宇. 基于自注意力对抗的深度子空间聚类. 自动化学报, 2022, **48**(1): 271−281)

24 Gao H C, Nie F P, Li X L, Huang H. Multi-view subspace clustering. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Santiago, Chile: IEEE, 2015. 4238−4246

25 Chen Y Y, Xiao X L, Zhou Y C. Multi-view subspace clustering via simultaneously learning the representation tensor and affinity matrix. *Pattern Recognition*, 2020, **106**: 107441

26 Zhang G Y, Zhou Y R, Wang C D, Huang D, He X Y. Joint representation learning for multi-view subspace clustering. *Expert Systems with Applications*, 2021, **166**: 113913

27 Wu J L, Xie X Y, Nie L Q, Lin Z C, Zha H B. Unified graph and low-rank tensor learning for multi-view clustering. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2020, **34**(4): 6388−6395

28 Carroll J D, Chang J J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "eckart-young" decomposition. *Psychometrika*, 1970, **35**(3): 283−319

29 Tucker L R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, 1966, **31**(3): 279−311

30 Kilmer M E, Braman K, Hao N, Hoover R C. Third-order tensors as operators on matrices: A theoretical and computational framework with applications in imaging. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2013, **34**(1): 148−172

31 Liu X W, Wang L, Zhang J, Yin J P, Liu H. Global and local structure preservation for feature selection. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, **25**(6): 1083−1095

32 Chen G L, Lerman G. Spectral curvature clustering (SCC). *International Journal of Computer Vision*, 2009, **81**(3): 317−330

33 Liu G C, Lin Z C, Yu Y. Robust subspace segmentation by low-rank representation. In: Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning (ICML). Haifa, Israel: Omnipress, 2010. 663−670

34 Wang Wei-Wei, Li Xiao-Ping, Feng Xiang-Chu, Wang Si-Qi. A survey on sparse subspace clustering. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(8): 1373−1384
(王卫卫, 李小平, 冯象初, 王斯琪. 稀疏子空间聚类综述. 自动化学报, 2015, **41**(8): 1373−1384)

35 You C, Robinson D P, Vidal R. Scalable sparse subspace clustering by orthogonal matching pursuit. In: Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Las Vegas, USA: IEEE, 2016. 3918−3927

36 Vidal R, Favaro P. Low rank subspace clustering (LRSC). *Pattern Recognition Letters*, 2014, **43**: 47−61

37 Kheirandishfard M, Zohrizadeh F, Kamangar F. Deep low-rank subspace clustering. In: Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW). Seattle, USA: IEEE, 2020. 864−865

38 Nie F P, Wang X Q, Huang H. Clustering and projected clustering with adaptive neighbors. In: Proceedings of the 20th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (SIGKDD). New York, USA: ACM, 2014. 977−986

39 Yin M, Gao J B, Xie S L, Guo Y. Multiview subspace clustering via tensorial t-product representation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, **30**(3): 851−864

40 Xia R K, Pan Y, Du L, Yin J. Robust multi-view spectral clustering via low-rank and sparse decomposition. In: Proceedings of the 28th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI). Québec City, Canada: AAAI Press, 2014. 2149−2155

41 Chen Y Y, Xiao X L, Peng C, Lu G M, Zhou Y C. Low-rank tensor graph learning for multi-view subspace clustering. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2022, **32**(1): 92−104

42 Guo X J. Robust subspace segmentation by simultaneously learning data representations and their affinity matrix. In: Proceedings of the 24th International Conference on Artificial Intelligence. Buenos Aires, Argentina: AAAI Press, 2015. 3547−3553

43 Wen Jie, Yan Ke, Zhang Zheng, Xu Yong. Low-rank tensor graph learning based incomplete multi-view clustering. *Acta Automatica Sinica*, DOI: 10.16383/j.aas.c200519
(文杰, 颜珂, 张正, 徐勇. 基于低秩张量图学习的不完整多视角聚类. 自动化学报, DOI: 10.16383/j.aas.c200519)

44 Cao X C, Zhang C Q, Fu H Z, Liu S, Zhang H. Diversity-induced multi-view subspace clustering. In: Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Boston, USA: IEEE, 2015. 586−594

45 Nie F P, Cai G H, Li J, Li X L. Auto-weighted multi-view learning for image clustering and semi-supervised classification. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2018, **27**(3): 1501−1511

46 Zhang C Q, Fu H Z, Hu Q H, Cao X C, Xie Y, Tao D C, et al. Generalized latent multi-view subspace clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2020, **42**(1): 86−99

47 Gao Q X, Xia W, Wan Z Z, Xie D Y, Zhang P. Tensor-SVD based graph learning for multi-view subspace clustering. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2020, **34**(4): 3930−3937

赵晓佳　哈尔滨工业大学 (深圳) 计算机科学与技术学院硕士研究生. 主要研究方向为多视图聚类.
E-mail: 21S151152@stu.hit.edu.cn
(**ZHAO Xiao-Jia**　Master student at School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology, Shenzhen. Her main research interest is multi-view clustering.)

徐婷婷　哈尔滨工业大学 (深圳) 计算机科学与技术学院硕士研究生. 主要研究方向为低秩张量近似.
E-mail: 21S151168@stu.hit.edu.cn
(**XU Ting-Ting**　Master student at School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology, Shenzhen. Her main research interest is low-rank tensor approximation.)

陈勇勇　哈尔滨工业大学 (深圳) 计算机科学与技术学院助理教授. 主要研究方向为机器学习和模式识别. 本文通信作者.
E-mail: YongyongChen.cn@gmail.com
(**CHEN Yong-Yong**　Assistant professor at School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology, Shenzhen. His research interest covers machine learning and pattern recognition. Corresponding author of this paper.)

徐　勇　哈尔滨工业大学 (深圳) 计算机科学与技术学院教授. 主要研究方向为机器学习, 模式学习, 生物信息学和视频分析.
E-mail: yongxu@ymail.com
(**XU Yong**　Professor at School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology, Shenzhen. His research interest covers machine learning, pattern recognition, biometrics, and video analysis.)