n 比特随机量子系统实时状态估计及其反馈控制

张骄阳 [1] 丛 爽 [1] 匡 森 [1]

摘 要 研究了 n 比特随机量子系统实时状态估计及其反馈控制的问题. 对于连续弱测量 (Continuous weak measurement, CWM) 过程存在高斯噪声的情况, 基于在线交替方向乘子法 (Online alternating direction multiplier method, OADM) 推导出一种适用于 n 比特随机量子系统的实时量子状态估计算法, 即 QSE-OADM (Quantum state estimation based on OADM). 运用李雅普诺夫方法设计控制律, 实现基于实时量子状态估计的反馈控制, 并证明所提控制律的收敛性. 以 2 比特随机量子系统为例进行数值仿真实验, 通过与基于 QST-OADM (Quantum state tomography based on OADM) 算法和 OPG-ADMM (Online proximal gradient-based alternating direction method of multipliers) 算法的量子反馈控制方案的性能对比, 验证了所提控制方案的优越性.

关键词 随机量子系统, 量子反馈控制, 在线交替方向乘子法, 李雅普诺夫控制方法

引用格式 张骄阳, 丛爽, 匡森. n 比特随机量子系统实时状态估计及其反馈控制. 自动化学报, 2024, **50**(1): 42−53

DOI 10.16383/j.aas.c210916

Real-time State Estimation and Feedback Control for n-qubit Stochastic Quantum Systems

ZHANG Jiao-Yang[1] CONG Shuang[1] KUANG Sen[1]

Abstract The problem of real-time state estimation and feedback control of n-qubit stochastic quantum systems is investigated in this paper. Considering the presence of Gaussian noises in the continuous weak measurement (CWM) process, a real-time quantum state estimation (QSE) algorithm based on the online alternating direction multiplier method (OADM), short for QSE-OADM, is deduced for n-qubit stochastic quantum systems. The control law is designed via the Lyapunov-based approach to realize real-time quantum state estimation-based feedback control, and the convergence of the proposed control law is proved. Numerical simulations are carried out for 2-qubit stochastic quantum systems, and the superiority of the proposed control scheme is verified in comparison with the performance of quantum feedback control schemes based on the QST-OADM (quantum state tomography based on the online alternating direction multiplier method) algorithm and the OPG-ADMM (online proximal gradient-based alternating direction method of multipliers) algorithm.

Key words Stochastic quantum systems, quantum feedback control, online alternating direction multiplier method (OADM), Lyapunov-based control approach

Citation Zhang Jiao-Yang, Cong Shuang, Kuang Sen. Real-time state estimation and feedback control for n-qubit stochastic quantum systems. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(1): 42−53

自 Huang 等[1] 于 20 世纪 80 年代研究双线性量子系统能控性问题以来, 量子控制这一交叉学科取得了快速发展, 并受到了空前的关注, 越来越多的专家学者开始从系统控制的角度审视量子系统控制, 如早期广泛研究的量子门的制备与操作、退相干抑制等都可以归结为典型的开环控制问题[2−6]. 自 21 世纪以来, 宏观系统控制理论更深入地渗透到量子系统的操纵之中, 两个突出特点是[7−12]: 1) 从建模的角度上, 研究的模型从简单的低维双线性封闭量子系统, 逐渐转变为更符合实际物理系统的开放量子系统, 如马尔科夫 (Markovian) 开放量子系统、非马尔科夫 (Non-Markovian) 开放量子系统以及随机量子系统; 2) 从控制任务的角度上, 研究的问题从分析量子系统的能控性、能观性和可逆性以及针对某一特定的控制目标设计开环控制律, 逐渐深化为借助宏观控制理论设计具有普适性的反馈控制律, 以实现量子系统状态的转移、保持或跟踪等复杂的控制目标. 与 Markovian 和 Non-Markovian 开放量子系统不同的是, 随机量子系统在建模时还考虑了由连续弱测量 (Continuous weak measurement, CWM) 引起的不可忽略的反向效应 (Back-action), 这给实时量子状态估计带来了挑战. 作为未来量子科技中不可或缺的基础理论与关键技

收稿日期 2021-09-26 录用日期 2022-06-06
Manuscript received September 26, 2021; accepted June 6, 2022
国家自然科学基金 (61973290) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61973290)
本文责任编委 刘艳军
Recommended by Associate Editor LIU Yan-Jun
1. 中国科学技术大学自动化系 合肥 230027
1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027

术, 随机量子系统的实时状态估计和高精度反馈控制逐渐成为了量子系统控制领域新的热点问题.

量子状态估计 (Quantum state estimation, QSE) 在量子物理领域又称为量子状态层析 (Quantum state tomography, QST), 分为测量和状态重构两个主要步骤. 传统意义上的 n 比特量子系统的状态层析指的是对 $d\times d$ $(d=2^n)$ 密度矩阵 ρ 的大量全同副本进行至少 d^2-1 次投影测量和多次算法迭代计算出满足单位迹和半正定量子状态约束的厄米 (Hermitian) 矩阵 $\hat{\rho}$. 基于大量全同副本的量子状态估计只能离线完成, 然而高精度量子反馈控制则要求实时估计随时间变化的量子状态, 这是实现基于测量的量子反馈控制必须解决的一个难点问题. Silberfarb 等[13−14] 和 Ralph 等[15] 提出的 CWM 为实时量子状态估计的物理实现提供了可能. 2020 年, 唐雅茹等[16] 和 Harraz 等[17] 以 CWM 为基础, 基于 MATLAB CVX 工具箱中的最小二乘法针对单比特随机量子系统提出了一种密度矩阵实时重构的方案, 并研究了噪声幅值等系统参数对于实时量子状态估计算法性能的影响. Zhang 等[18] 通过在凸优化问题中引入布雷格曼 (Bregman) 散度使得不存在解析解的密度矩阵恢复子问题可以被求解, 并提出了一种基于在线交替方向乘子法 (Online alternating direction multiplier method, OADM) 的实时量子状态层析算法 QST-OADM. 此外, Zhang 等[19] 将实时量子状态估计描述为一个稀疏促进半定规划问题, 并结合在线邻近梯度法 (Online proximal gradient, OPG) 和交替方向乘子法 (Alternating direction method of multipliers, ADMM) 设计出 OPG-ADMM 算法求解该问题.

在量子系统控制领域, 李雅普诺夫控制方法是一种常用的控制律设计方法, 该方法的一大优势是能够得到解析形式的控制律. Kuang 等[20] 于 2008 年总结了非退化的封闭量子系统三种本征态制备方法. Sayrin等[21] 于 2011 年实现了超导腔中微波场中 Fock 态的全局镇定, 进而逆转了退相干引发的量子跃迁效应. Qi 等[22−23] 全面地比较了多种形式的量子主方程本征态反馈镇定控制方案的性能, 并指出 CWM 过程造成的量子状态随机塌缩不仅在一定意义上有利于反馈控制的实现, 还能够完成开环控制理论上无法实现的控制任务. 2019 年, Qamar 等[24] 针对具有马尔科夫退相干的二能级随机量子系统提出了一种基于非线性最优观测器的本征态反馈控制方案, 但该方案难以推广到高维量子系统中. 同年, Harraz 等[25] 在其提出的实时量子状态估计方案的基础上, 针对一类特殊的 n 比特随机量子系统设计出一种连续形式的本征态反馈控制律, 不过没有严格地给出关于控制律收敛性的数学证明. 目前, 状态的实时获取仍然是基于李雅普诺夫控制方法的随机量子系统反馈控制中的瓶颈问题. 对于一个 d 维的随机量子系统, 在线求解其随机主方程就相当于在线求解 d^2-1 个 Itô 随机微分方程, 如此庞大的计算量易导致反馈环路中存在延迟从而导致较差的控制效果. 如能通过快速高效的算法进行实时量子状态估计, 则高性能的量子反馈控制就有可能实现.

本文针对 CWM 过程中存在高斯噪声的 n 比特随机量子系统, 提出一种基于 OADM 的实时量子状态估计算法 (简称 QSE-OADM 算法), 然后基于 QSE-OADM 算法设计了一种反馈控制 (Feedback control, FC) 方案 (简称 QSE-OADM-FC 方案), 实现了基于实时状态估计的量子反馈控制. 本文的贡献在于: 1) 在实时量子状态估计算法的推导过程中, 将时变的密度矩阵实时重构问题和最小化高斯测量噪声问题分开求解, 进行状态在线更新时无需求解一阶随机梯度信息, 得到比文献 [18] 中的 QST-OADM 算法和文献 [19] 中的 OPG-ADMM 算法更快的收敛速度和更短的耗时; 2) 借鉴文献 [26] 的思想, 针对 n 比特随机量子系统, 运用李雅普诺夫控制方法设计出一种新颖的反馈控制律, 并对控制律的渐近收敛性进行了严格的数学证明; 3) 在 2 比特随机量子系统本征态和叠加态的反馈控制数值实验中, 通过与基于 QST-OADM 算法和 OPG-ADMM 算法的量子反馈控制方案进行性能对比, 展现所提量子反馈方案的优越性.

本文的结构安排如下: 第 1 节为在 CWM 作用下, 本文所提出的测量值序列和采样矩阵的构造方法; 第 2 节为用于实时量子状态估计的 QSE-OADM 算法的推导及其性能分析; 第 3 节为基于实时状态估计的 n 比特随机量子系统反馈控制律的设计及其性能对比分析; 第 4 节为结束语.

1　CWM 作用下测量值序列和采样矩阵的构造

在薛定谔 (Schrödinger) 绘景下, 一类典型的 n 比特随机量子系统的主方程可以表示为[16−18, 23]

$$\begin{aligned}\rho_{t+\Delta t}-\rho_t=&-\frac{i}{\hbar}[H(t),\ \rho_t]\Delta t+[L\rho_tL^\dagger-\\&\frac{1}{2}(L^\dagger L\rho_t+\rho_tL^\dagger L)]\Delta t+\sqrt{\eta}(L\rho_t+\rho_tL^\dagger)\mathrm{d}W=\\&-\frac{i}{\hbar}[H(t),\ \rho_t]\Delta t+\mathcal{D}(L,\ \rho_t)\Delta t+\mathcal{H}(L,\ \rho_t)\mathrm{d}W\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $\hbar$ 为约化普朗克常量 (为方便, 取 $\hbar=1$); ρ_t 为 t 时刻的密度矩阵; $H(t)$ 为系统哈密顿量; L 为测量算符, 上标“$\dagger$”代表共轭转置; $\eta\in(0,\ 1]$ 为测

量效率; $\mathrm{d}W$ 为标准实值维纳过程并满足 $\mathrm{E}[\mathrm{d}W]=0$ 和 $\mathrm{E}[(\mathrm{d}W)^2]=\Delta t$; $\mathcal{D}(L,\ \rho_t)\Delta t$ 刻画了测量过程带来的确定性的退相干作用, 而 $\mathcal{H}(L,\ \rho_t)\mathrm{d}W$ 则刻画了测量过程引起的随机的量子状态塌缩.

根据 CWM 过程及其推导, 可以得到作用在单比特随机量子系统状态上的 2×2 的测量算符为[16]

$$m_0(\Delta t)=I-\left(\frac{L'^{\dagger}L'}{2}+iH'(t)\right)\Delta t$$

$$m_1(\Delta t)=L'\sqrt{\Delta t}$$

其中, I 为 2×2 的单位矩阵, $H'(t)=H_0+H_c(t)=H_0+u_1(t)H_1$, $L'=\xi\sigma$, ξ 为被测量子系统与探测系统之间的相互作用强度, σ 可在 Pauli 矩阵 $\sigma_x=[0\ 1;\ 1\ 0]$, $\sigma_y=[0\ -i;\ i\ 0]$ 和 $\sigma_z=[1\ 0;\ 0\ -1]$ 中选择. 综合考虑测量效率及其反向效应的影响, 可得 2×2 密度矩阵的演化算符为[16–18, 23]

$$a_i(\Delta t)=m_i(\Delta t)+\sqrt{\eta}L'\mathrm{d}W,\quad i=1,\ 2$$

更一般地, 对于 n 比特随机量子系统, 其 $2^n\times 2^n$ 的测量算符、密度矩阵演化算符可以在单比特量子系统的基础上借助 Kronecker 积“$\otimes$”构造为

$$\begin{aligned}
M_0(\Delta t)&=\underbrace{m_0(\Delta t)\otimes\cdots\otimes m_0(\Delta t)\otimes m_0(\Delta t)}_{n}\\
M_1(\Delta t)&=\underbrace{m_0(\Delta t)\otimes\cdots\otimes m_0(\Delta t)\otimes m_1(\Delta t)}_{n}\\
&\vdots\\
M_{2^n-1}(\Delta t)&=\underbrace{m_1(\Delta t)\otimes\cdots\otimes m_1(\Delta t)\otimes m_1(\Delta t)}_{n}
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
A_0(\Delta t)&=\underbrace{a_0(\Delta t)\otimes\cdots\otimes a_0(\Delta t)\otimes a_0(\Delta t)}_{n}\\
A_1(\Delta t)&=\underbrace{a_0(\Delta t)\otimes\cdots\otimes a_0(\Delta t)\otimes a_1(\Delta t)}_{n}\\
&\vdots\\
A_{2^n-1}(\Delta t)&=\underbrace{a_1(\Delta t)\otimes\cdots\otimes a_1(\Delta t)\otimes a_1(\Delta t)}_{n}
\end{aligned}\tag{3}$$

令 $t=k\cdot\Delta t$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$, 可以得到与式 (1) 等价的离散型 n 比特随机量子系统的密度矩阵和测量算符的演化方程为

$$\rho_{k+1}=\sum_{i=0}^{2^n-1}A_i(\Delta t)\rho_k{A_i}^{\dagger}(\Delta t)\tag{4}$$

$$M_{k+1}=\sum_{i=0}^{2^n-1}M_i(\Delta t)M_k{M_i}^{\dagger}(\Delta t)\tag{5}$$

通过宏观测量仪器读出的量子系统实验装置的输出值 y 指的是测量算符 M 作用在密度矩阵上的平均值. 在薛定谔绘景下, 记初始测量算符为 M_1, 每一个采样时刻 k 都可获得一个只与当前时刻的密度矩阵 ρ_k 有关的测量值 $y_k=\langle M_1,\ \rho_k\rangle=\mathrm{tr}(M_1^{\dagger}\rho_k)=\mathrm{vec}^{\dagger}(M_1)\mathrm{vec}(\rho_k)$. 显然, 仅凭借单次测量结果难以实现对密度矩阵的实时重构, 然而得到的测量值是随着测量次数的增加而增多. 本文根据历史测量值与 ρ_k 之间的关系构造一组动态变化的测量值序列来建立含有待估计元素的方程组, 在一定的测量次数后就能实现在每一个测量时刻高精度地实时重构出 ρ_k. 在每一个时刻, 所得到的测量值 $\{y_i\}_{i=1}^{k}$ 与 k 时刻的密度矩阵 ρ_k 之间的关系为

$$\begin{aligned}
y_i&=\mathrm{tr}(M_{k-i+1}^{\dagger}\rho_k)=\\
&\quad\mathrm{vec}^{\dagger}(M_{k-i+1})\mathrm{vec}(\rho_k),\ i=1,\ \cdots,\ k
\end{aligned}\tag{6}$$

本文将 k 时刻及其之前的测量值共同组成一个测量值序列 $b_k=[y_1,\ \cdots,\ y_i,\ \cdots,\ y_k]^{\mathrm{T}}$. 测量值序列的具体构造方法如表 1 所示.

表 1 测量值序列的构造方法

Table 1 Construction approach of the measurement record sequence

	y_1	y_2	$\cdots$	y_k
b_1	$\mathrm{tr}(M_1^{\dagger}\rho_1)$	—	$\cdots$	—
b_2	$\mathrm{tr}(M_2^{\dagger}\rho_2)$	$\mathrm{tr}(M_1^{\dagger}\rho_2)$	$\cdots$	—
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
b_k	$\mathrm{tr}(M_k^{\dagger}\rho_k)$	$\mathrm{tr}(M_{k-1}^{\dagger}\rho_k)$	$\cdots$	$\mathrm{tr}(M_1^{\dagger}\rho_k)$

容易看出, 随着 k 取值的增大会加重实时量子状态估计算法的计算负担, 进而导致较长的迭代时间. 因此, 本文借鉴递推限定记忆最小二乘法的思想引入滑窗以便保证在充分利用测量值的历史信息的同时, 不至于使得计算负担过重. 滑窗中的数据按照“先入先出”的策略进行更新, 即数据量达到滑窗长度 l 之后, 每增加一个新数据信息的同时, 删除一个老数据的信息, 数据的长度维持不变. 带有滑窗的测量值序列为

$$b_k=[\,y_{\max(1,\ k-l+1)},\ \cdots,\ y_{k-1},\ y_k\,]^{\mathrm{T}}\tag{7}$$

与文献 [13–15] 中在海森堡 (Heisenberg) 绘景下借助量子系统动态演化的模型获取 k 时刻量子状态的方法不同, 本文提出的测量值序列构造方法能够实时估计出 k 时刻的量子状态.

根据测量值与密度矩阵之间的关系式 (6), 可以得到与 b_k 对应的采样矩阵 $\mathcal{A}_k$ 为

$$\mathcal{A}_k = [\mathrm{vec}(M_{\min(k,\,l)}),\ \cdots,\ \mathrm{vec}(M_2),\ \mathrm{vec}(M_1)]^{\dagger} \tag{8}$$

当采样次数大于等于 l 时, $\mathcal{A}_k$ 保持不变. 考虑到 CWM 过程额外引入的高斯噪声, 式 (6) 应修正为

$$y_i = \mathrm{vec}^{\dagger}(M_{k-i+1})\mathrm{vec}(\rho_k) + e_i,\ i = 1,\ \cdots,\ k$$

其中, $e_i \in \mathbf{R}$ 为高斯白噪声. 此时, n 比特随机量子系统在 CWM 作用下, b_k 与 $\mathcal{A}_k$ 的关系为

$$b_k = \mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\rho_k) + e_k \tag{9}$$

2　QSE-OADM 算法的推导及其性能分析

本节将推导一种基于 OADM 的 n 比特随机量子系统状态实时估计的算法 QSE-OADM, 并以 2 比特量子系统为例进行数值仿真实验, 研究相互作用强度 ξ、测量算符的初始值 M_1 及其与系统哈密顿量 H' 形成的夹角对所提算法性能的影响.

2.1　QSE-OADM 算法的推导

定义二次型伪范数 $||x||_P^2 = x^{\dagger}Px$, 其中, $x \in \mathbf{C}^m$ 为优化变量, $P \in \mathbf{C}^{m\times m}$ 为任意对称正定的权重矩阵. 通过引入一个示性函数 $I_C(\hat{\rho})$ 来表示量子状态的密度矩阵 $\hat{\rho}$ 必须满足的半正定、厄米性以及单位迹三个约束条件, 可以将在采样时刻 k 的实时量子状态估计问题转化为一个带有量子状态约束的凸优化问题, 即

$$\begin{aligned}&\min_{\hat{\rho},\ \hat{e}}\ ||\mathrm{vec}(\hat{\rho}-\hat{\rho}_{k-1})||_{wI_1}^2 + I_C(\hat{\rho}) + ||\hat{e}||_{\gamma I_2}^2\\ &\text{s.t.}\quad \mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\hat{\rho}) + \hat{e} = b_k\end{aligned} \tag{10}$$

其中, $\hat{\rho}$ 代表待估计的密度矩阵; $\hat{e}$ 代表待过滤的测量噪声; $||\mathrm{vec}(\hat{\rho}-\hat{\rho}_{k-1})||_{wI_1}^2$ 代表 k 时刻的估计状态 $\hat{\rho}$ 与 $k-1$ 时刻的估计状态 $\hat{\rho}_{k-1}$ 之间的距离, 它意味着实时估计算法不至于把已经学习的先验信息遗忘; $||\hat{e}||_{\gamma I_2}^2$ 是一种常用的去噪方法, 它意味着减小当前估计状态中由于测量噪声导致的估计误差; $wI_1 \succ 0$、$\gamma I_2 \succ 0$ 分别是 $2^{2n}\times 2^{2n}$、$\min(k,\ l)\times\min(k,\ l)$ 的权重矩阵, 其中, I_1, I_2 为相应维数的单位矩阵; w和 γ为权重参数; $I_C(\hat{\rho})$为非光滑示性函数; 凸集 $C = \{\hat{\rho}\in\mathbf{C}^{2^n\times 2^n}|\hat{\rho}\ \succeq\ 0,\ \hat{\rho}^{\dagger} = \hat{\rho},\ \mathrm{tr}(\hat{\rho}) = 1\}$ 代表满足量子状态约束的密度矩阵的集合, 如果 $\hat{\rho}\in C$, 则 $I_C(\hat{\rho}) = 0$; 反之, 则有 $I_C(\hat{\rho}) = \infty$.

本文采用 OADM 算法进行实时量子状态估计. 对于式 (10) 所示的可分离的双目标在线约束凸优化问题, OADM 算法的基本思想是将其分解为两个子问题并交替求解, 其框架是依次最小化两个原始变量对应的增广拉格朗日 (Lagrangian) 函数, 最后通过对偶梯度上升来更新拉格朗日乘子. 此外, 在每个采样时刻 k 过后, 该算法只需进行一次更新即可计算原始变量和拉格朗日乘子. 式 (10) 对应的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L(\hat{\rho},\ \hat{e},\ \lambda) = &||\mathrm{vec}(\hat{\rho}-\hat{\rho}_{k-1})||_{wI_1}^2 + I_C(\hat{\rho}) +\\ &||\hat{e}||_{\gamma I_2}^2 - \langle\lambda,\ \mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\hat{\rho}) + \hat{e} - b_k\rangle +\\ &\frac{\alpha}{2}||\mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\hat{\rho}) + \hat{e} - b_k||_2^2\end{aligned} \tag{11}$$

其中, λ 为拉格朗日乘子, $\alpha > 0$ 是惩罚参数.

因此, 在采样时刻 k 的密度矩阵的估计值 $\hat{\rho}_k$、测量噪声的估计值 $\hat{e}_k$ 和拉格朗日乘子 λ_k 的优化问题分别转化为

$$\begin{cases}\hat{\rho}_k = \arg\min\limits_{\hat{\rho}}\left\{\dfrac{\alpha}{2}||\mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\hat{\rho}) + \hat{e}_{k-1} - b_k - \dfrac{\lambda_{k-1}}{\alpha}||_2^2 + ||\mathrm{vec}(\hat{\rho}-\hat{\rho}_{k-1})||_{wI_1}^2 + I_C(\hat{\rho})\right\} & (12a)\\ \hat{e}_k = \arg\min\limits_{\hat{e}}\left\{||\hat{e}||_{\gamma I_2}^2 + \dfrac{\alpha}{2}||\mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\hat{\rho}_k) + \hat{e} - b_k - \dfrac{\lambda_{k-1}}{\alpha}||_2^2\right\} & (12b)\\ \lambda_k = \lambda_{k-1} - \alpha(\mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\hat{\rho}_k) + \hat{e}_k - b_k) & (12c)\end{cases}$$

下面通过更新式 (12a) 和式 (12b) 中的原始变量 $\hat{\rho}$ 和 $\hat{e}$ 设计求解这两个子问题的方案. 拉格朗日乘子 λ 可由式 (12c) 直接更新.

2.1.1　求解 $\hat{\rho}_k$ 相关子问题

$\hat{\rho}$ 相关的子问题包含一个关于量子状态约束的不可微的示性函数 $I_C(\hat{\rho})$ 和两个二次项 (一个最小二乘惩罚项和一个二次伪范数项), 其中示性函数可以通过正交投影的方法求解[27]. 简而言之, $\hat{\rho}$ 相关的子问题的求解可以分为两步: 首先忽略示性函数, 求解一个无约束的凸优化问题, 再通过解决一个正交投影的问题获得满足量子状态约束的 $\hat{\rho}_k$.

1) 令 $u = b_k + \lambda_{k-1}/\alpha - \hat{e}_{k-1}$ 并忽略 $I_C(\hat{\rho})$, 式 (12a) 所示的子问题可以表示为一个无约束的凸优化问题, 即

$$\hat{\rho}_k = \arg\min_{\hat{\rho}}\left\{\frac{\alpha}{2}||\mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\hat{\rho}) - u||_2^2 + ||\mathrm{vec}(\hat{\rho}-\hat{\rho}_{k-1})||_{wI_1}^2\right\} \tag{13}$$

由于式 (13) 中的所有项都是可微的, 因此可以借助一阶最优性条件 $\alpha\mathcal{A}_k(\mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\tilde{\rho}_k) - u) + 2w\mathrm{vec}(\tilde{\rho}-\hat{\rho}_{k-1}) = 0$ 直接获得 $\hat{\rho}_k$ 的最优解, 即

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(\tilde{\rho}_k) = &(W^{-1} + \mathcal{A}_k^{\dagger}V^{-1}\mathcal{A}_k)^{-1}\cdot\\ &(W^{-1}\mathrm{vec}(\hat{\rho}_{k-1}) + \mathcal{A}_k^{\dagger}V^{-1}u)\end{aligned} \tag{14}$$

其中, $W^{-1}+\mathcal{A}_k^{\dagger}V^{-1}\mathcal{A}_k$为一满秩方阵, $W=(1/(2w))\times I_1\succ 0$, $V=(1/\alpha)\,I_3\succ 0$, I_3是 $\min(k,\ l)\times\min(k,\ l)$ 的单位矩阵.

根据矩阵求逆引理[28], 得到

$$(W^{-1}+\mathcal{A}_k^{\dagger}V^{-1}\mathcal{A}_k)^{-1}=W-W\mathcal{A}_k^{\dagger}(V+\mathcal{A}_kW\mathcal{A}_k^{\dagger})^{-1}\mathcal{A}_kW \tag{15}$$

$$(W^{-1}+\mathcal{A}_k^{\dagger}V^{-1}\mathcal{A}_k)^{-1}\mathcal{A}_k^{\dagger}V^{-1}=W\mathcal{A}_k^{\dagger}(V+\mathcal{A}_kW\mathcal{A}_k^{\dagger})^{-1} \tag{16}$$

因此, 式 (14) 可以重写为

$$\mathrm{vec}(\tilde{\rho}_k)=\mathrm{vec}(\hat{\rho}_{k-1})+\mathcal{A}_k^{\dagger}\left[\left(\frac{2w}{\alpha}I_3+\mathcal{A}_k\mathcal{A}_k^{\dagger}\right)^{-1}\cdot(u-\mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\hat{\rho}_{k-1}))\right] \tag{17}$$

2) 考虑示性函数 $I_C(\hat{\rho})$ 来获得满足量子状态约束的 $\hat{\rho}_k$, 此时凸优化问题变为

$$\begin{aligned}&\hat{\rho}_k=\arg\min_{\hat{\rho}}\ ||\mathrm{vec}(\hat{\rho}-\tilde{\rho}_k)||_{I_1}^2\\&\text{s.t.}\quad \hat{\rho}\succeq 0,\ \ \hat{\rho}^{\dagger}=\hat{\rho},\ \ \mathrm{tr}(\hat{\rho})=1\end{aligned} \tag{18}$$

利用厄米矩阵 $(\tilde{\rho}_k+\tilde{\rho}_k^{\dagger})/2$ 替换式 (18) 中的 $\tilde{\rho}_k$ 即可保证 $\hat{\rho}_k$ 满足量子状态约束. 由此, 式 (18) 退化为式 (19) 所示的密度矩阵正交投影的问题[25], 即

$$\begin{aligned}&\hat{\rho}_k=\arg\min_{\hat{\rho}}\left\|\hat{\rho}-\frac{\tilde{\rho}_k+\tilde{\rho}_k^{\dagger}}{2}\right\|_{\mathrm{F}}^2\\&\text{s.t.}\quad \hat{\rho}\succeq 0,\ \ \mathrm{tr}(\hat{\rho})=1\end{aligned} \tag{19}$$

式 (19) 本质上是一个非线性半定规划问题, 通常采用内点法求解, 不过本文采用奇异值分解的方法直接求解该问题. $(\tilde{\rho}_k+\tilde{\rho}_k^{\dagger})/2$ 可以被酉相似对角化为 $U\mathrm{diag}\{a_i\}U^{\dagger}$, 其中, $U\in\mathbf{C}^{2^n\times 2^n}$ 为酉矩阵, $\mathrm{diag}\{a_1,\ \cdots,\ a_{2^n}\}$ 的对角元素为$(\tilde{\rho}_k+\tilde{\rho}_k^{\dagger})/2$ 的奇异值, 按照从大到小的顺序排列. 式 (19) 的最优解为

$$\hat{\rho}_k=U\mathrm{diag}\{\sigma_i\}U^{\dagger} \tag{20}$$

其中, $\mathrm{diag}\{\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_{2^n}\}$ 的对角元素为 $\hat{\rho}_k$ 的奇异值, 可通过式 (21) 求解, 即

$$\begin{aligned}&\min_{\{\sigma_i\}}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2^n}(\sigma_i-a_i)^2\\&\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{2^n}\sigma_i=1,\ \ \sigma_i\geq 0\end{aligned} \tag{21}$$

式 (21) 对应的拉格朗日函数为

$$L\{\sigma_i,\ \kappa_i,\ \beta\}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2^n}(\sigma_i-a_i)^2-\kappa_i\sigma_i+\beta\left(\sum_{i=1}^{2^n}\sigma_i-1\right) \tag{22}$$

其中, $\{\kappa_i\}_{i=1}^{2^n}$ 和 β 为拉格朗日乘子.

对于式 (20) 所示的凸优化问题, 可以通过求解 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件来获取最优解 $\sigma_i^*,\ \kappa_i^*,\ \beta^*$: $\sigma_i^*\geq 0$, $\sum_{i=1}^{2^n}\sigma_i^*=1$, $\kappa_i^*\geq 0$, $\kappa_i^*\sigma_i^*=0$ 和 $\sigma_i^*-a_i-\kappa_i^*+\beta^*=0\ \ (i=1,\ \cdots,\ 2^n)$. 消去变量 κ_i^* 后, 可得

$$\begin{cases}\sigma_i^*\geq 0 & \text{(23a)}\\ \sigma_i^*\geq a_i-\beta^* & \text{(23b)}\\ \sigma_i^*(\sigma_i^*-(a_i-\beta^*))=0 & \text{(23c)}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2^n}\sigma_i^*=1 & \text{(23d)}\end{cases}$$

从式 (23b) 中可知, 需要分两种情况讨论 σ_i^* 的解: 1) 如果 $\sigma_i^*>a_i-\beta^*$, 根据式 (23c) 可知 $\sigma_i^*=0$, 那么可得 $a_i<\beta^*$; 2) 如果 $\sigma_i^*=a_i-\beta^*$, 那么结合式 (23a) 可知 $a_i\geq\beta^*$. 因此可直接得出

$$\sigma_i^*=\max\{a_i-\beta^*,\ 0\} \tag{24}$$

最优的拉格朗日乘子 β^* 可根据式 (23d) 计算. 具体来说, 可令 $\beta^*=a_i\ (i=1,\ \cdots,\ 2^n)$ 来确定最优的 β^* 所在的区间. 假定 $a_q-\beta^*\geq 0$ 且 $a_{q+1}-\beta^*\leq 0$ 在区间 $[a_q,\ a_{q+1}]\ \ (q=1,\cdots,d)$ 内成立, 那么最优的 β^* 可根据 $\sum_{i=1}^{q}(a_i-\beta^*)=1$ 计算, 即

$$\beta^*=\frac{\sum_{i=1}^{q}a_i-1}{q} \tag{25}$$

2.1.2 求解 $\hat{e}_k$ 相关子问题

式 (23b) 是一个典型的无约束二次规划问题, 可通过 $\hat{e}$ 一阶最优性条件直接获得解析解, 即

$$\hat{e}_k=\frac{\alpha}{2\gamma+\alpha}\left(b_k+\frac{\lambda_{k-1}}{\alpha}-\mathcal{A}_k\mathrm{vec}(\hat{\rho}_k)\right) \tag{26}$$

所提出的 QSE-OADM 算法的具体步骤如算法 1 所示.

算法 1. QSE-OADM 算法

初始化. 变量 $\hat{\rho}_0=\hat{e}_0=0$, $\lambda_0=0$; 设定算法的参数 α, w, $\gamma>0$, $l\in\mathbf{Z}^+$.

1) **for** $k=1,2,\cdots,$ **do**

2) 依据式 (5) 计算 M_k;

3) 依据式 (7) 构造 b_k;

4) 依据式 (8) 构造 $\mathcal{A}_k$;

5)　依据式 (17) 计算 $\tilde{\rho}_k$;
6)　对 $(\tilde{\rho}_k+\tilde{\rho}_k^{\dagger})/2$ 进行奇异值分解, 计算 $U\mathrm{diag}\{a_i\}U^{\dagger}$;
7)　依据式 (25) 计算 β^*;
8)　依据式 (24) 计算奇异值 $\mathrm{diag}\{\sigma_i\}$;
9)　依据式 (20) 更新 $\hat{\rho}_k$;
10)　依据式 (26) 更新 $\hat{e}_k$;
11)　依据式 (12c) 更新 λ_k;
12) **end for**

下面讨论 QSE-OADM 算法的计算复杂度. 对于 QSE-OADM 算法而言, 其密度矩阵依据式 (17) 更新时, $((2w/\alpha)I_3+\mathcal{A}_k\mathcal{A}_k^{\dagger})^{-1}$的计算复杂度为 $\mathrm{O}(l^2d^2)$, 由于采样矩阵 $\mathcal{A}_k$ 在采样次数达到 l 之后保持不变, 因此这一部分总的计算复杂度为 $l\times\mathrm{O}(l^2d^2)$. 另外, 奇异值分解的计算复杂度为 $\mathrm{O}(d^3)$, 由于计算过程中待估计的密度矩阵始终严格满足量子状态约束, 因此采样次数为 N 时这一部分总的计算复杂度为 $N\times\mathrm{O}(d^3)$. 综上可知, QSE-OADM 算法总的计算复杂度为 $l\times\mathrm{O}(l^2d^2)+N\times\mathrm{O}(d^3)$.

2.2　QSE-OADM 算法的性能分析

采用保真度 (Fidelity) 来衡量量子状态估计的精度, 其定义为

$$Fidelity(k)=\mathrm{tr}\left(\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_k}\rho_k\sqrt{\hat{\rho}_k}}\right)\tag{27}$$

其中, $\hat{\rho}_k$ 为密度矩阵的估计值, ρ_k 为密度矩阵的真实值. 当 $\hat{\rho}_k=\rho_k$ 时, 有 $Fidelity(k)=1$.

本节将通过 3 组实时量子状态估计的仿真实验来分析 QSE-OADM 算法的性能. 不失一般性, 以 2 比特随机量子系统为例, 分别研究施加不同的外部控制场、选取不同的初始测量算符以及改变相互作用强度对于算法性能的影响. 数值仿真实验中, 固定系统各个参数分别为: $\Delta t=0.2$, $H_0=\sigma_z$, $\eta=0.5$; QSE-OADM 算法中的权重参数 $w=0.1$, $\gamma=\sqrt{2^n}/k$, 惩罚参数 $\alpha=2$, 滑窗长度 $l=15$, 采样次数 $N=30$. 假定测量过程引入信噪比 $SNR=40$ dB 的高斯噪声. 量子系统初始状态选取为叠加态 $\rho_{00}=\rho_0\otimes\rho_0$, 其中 $\rho_0=[1/2\ \ \sqrt{2}(1-i)/4;\ \ \sqrt{2}(1+i)/4\ \ 1/2]$; 估计状态的初值选取为本征态 $\hat{\rho}_e=\hat{\rho}_{e0}\otimes\hat{\rho}_{e0}$, $\hat{\rho}_{e0}=[0\,0;\,0\,1]$.

2.2.1　不同外部控制场的作用对实时量子状态估计性能的影响

外部控制量和控制哈密顿量的乘积 u_1H_1 分别选取为 0, σ_x, σ_y 和 $10\sigma_x$, 固定 $H_0=\sigma_z$, $M_1=\sigma_z\otimes\sigma_z$, $L'=0.7\sigma_z$. 不同方向的外部控制场对 QSE-OADM 算法实时状态估计的实验结果如图 1 所示,

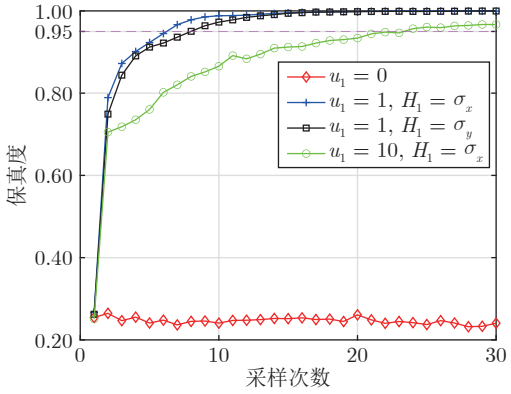


图 1　不同外部控制场的作用下的实时状态估计性能

Fig. 1　Real-time state estimation performance under various external control fields

从中可以看出: 当初始测量算符 M_1 与 H_0 平行时, QSE-OADM 算法无法有效获取到随机量子系统状态演化的信息, 此时该算法失效. 解决该问题的一种可行的方案是通过施加外部控制场来使 M_1 与系统哈密顿量 $H'=H_0+u_1H_1$ 之间存在一定的夹角.

需要注意的是, 外部控制场并非越强越好, 过大的控制量 (如图 1 中带圆圈的曲线所示的情况) 可能导致 M_1 与 H' 之间的夹角接近 90° 而呈现出二者近似正交的情况, 此时 CWM 同样难以获取到系统演化的信息而导致 QSE-OADM 算法估计精度下降.

2.2.2　不同初始测量算符 M_1 对实时量子状态估计性能的影响

初始测量算符 M_1 分别选取为 $\sigma_x\otimes\sigma_x$、$\sigma_y\otimes\sigma_y$ 和 $\sigma_z\otimes\sigma_z$ 三种情况, 固定 $H'=H_0+1\cdot\sigma_x$, $L'=0.7\sigma_z$. 不同初始测量算符对 QSE-OADM 算法估计状态的实验结果如图 2 所示. 从图 2 中可以看出只要 M_1 与系统哈密顿量 H' 不平行且不正交, 三种情

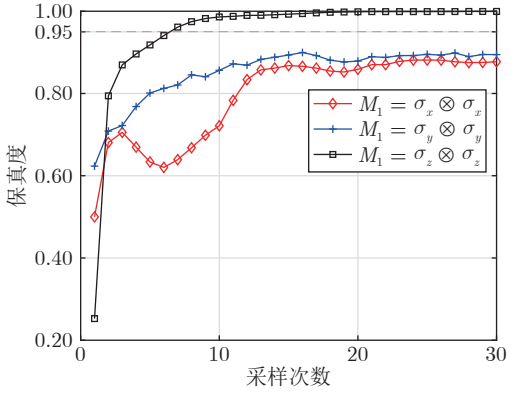


图 2　不同初始测量算符作用下的实时状态估计性能

Fig. 2　Real-time state estimation performance under various initial measurement operators

况均能实现有效的实时量子状态估计, 不过每一种情况下 QSE-OADM 算法的收敛速率不同. 实验结果表明: 当 $M_1 = \sigma_z \otimes \sigma_z$ 时 QSE-OADM 算法的实时状态估计性能最好.

2.2.3 不同相互作用强度 ξ 对实时量子状态估计性能的影响

相互作用强度 ξ 分别取 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 固定 $H' = H_0 + 1 \cdot \sigma_x$, $M_1 = \sigma_z \otimes \sigma_z$, 测量算符选取 σ_z. 被测量子系统与探测系统之间不同的相互作用强度对于 QSE-OADM 算法性能影响的实验结果如图 3 所示, 从中可以看出: ξ 与保真度成正相关, 即 ξ 越大 QSE-OADM 算法的收敛性越好.

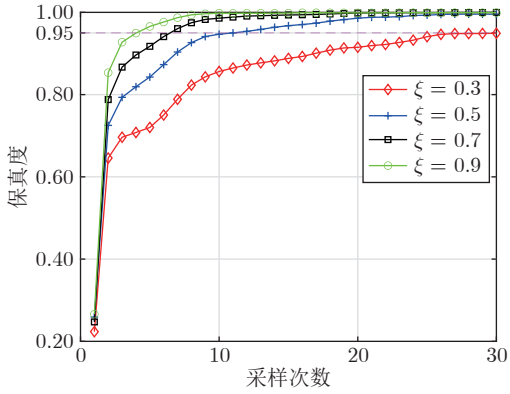
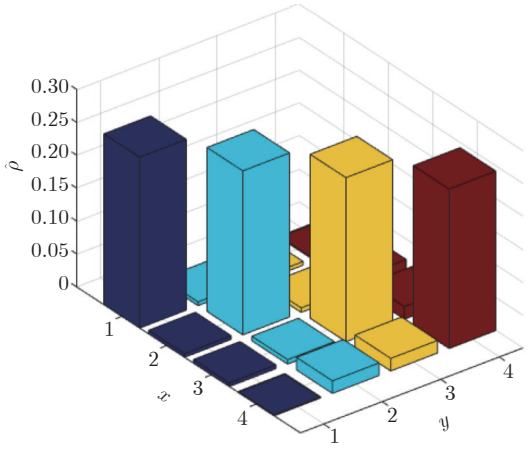


图 3 不同的相互作用强度作用下的实时状态估计性能

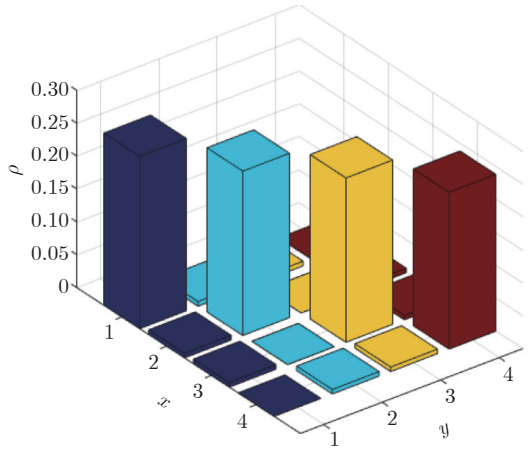
Fig. 3 Real-time state estimation performance under various interaction strengths

当 $\xi \geq 0.7$ 时, QSE-OADM 算法已经具有良好的实时量子状态估计性能, 第 7 次采样过后保真度高于 95%, 第 30 次采样时保真度高于 99.95%. 第 30 次采样时的估计状态和真实状态如图 4 所示, 其中, x 轴和 y 轴分别代表密度矩阵的行和列, z 轴代表密度矩阵元素的实部数值.



(a) QSE-OADM 算法的实时估计状态

(a) Real-time estimated state by using the QSE-OADM algorithm



(b) 系统真实状态

(b) Real state of the system

图 4 第 30 次采样时 2 比特量子系统估计状态与真实状态比较 ($H' = H_0 + 1 \cdot \sigma_x$, $M_1 = \sigma_z \otimes \sigma_z$, $L' = 0.7\sigma_z$)

Fig. 4 Comparison between the estimated state and the real state of a 2-qubit system at the 30th sampling time ($H' = H_0 + 1 \cdot \sigma_x$, $M_1 = \sigma_z \otimes \sigma_z$, $L' = 0.7\sigma_z$)

3 基于实时状态估计的量子反馈控制律的设计及其性能对比分析

本节将采用基于李雅普诺夫稳定性定理的控制方法设计反馈控制律, 结合所提出的实时量子状态估计算法实现 n 比特随机量子系统的反馈控制, 并以 2 比特随机量子系统为例针对目标态为本征态和叠加态的情况分别进行数值仿真实验及其性能对比分析.

3.1 反馈控制律的设计及其收敛性的证明

第 2 节基于 QSE-OADM 算法实现了 n 比特随机量子系统的实时状态估计, 因此可将式 (1) 改写为包含估计状态 $\hat{\rho}_k$ 的随机主方程, 即

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{k+1} - \hat{\rho}_k = &-\frac{i}{\hbar}[H(t),\ \hat{\rho}_k]\Delta t + \\ &\mathcal{D}(L,\ \hat{\rho}_k)\Delta t + \mathcal{H}(L,\ \hat{\rho}_k)\mathrm{d}W = \\ &\left(-\frac{i}{\hbar}[H_0,\ \hat{\rho}_k] - \frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{r} u_i(t)[H_i,\ \hat{\rho}_k]\right)\Delta t + \\ &\mathcal{D}(L,\ \hat{\rho}_k)\Delta t + \mathcal{H}(L,\ \hat{\rho}_k)\mathrm{d}W \end{aligned} \tag{28}$$

其中, 系统哈密顿量为 $H(t) = H_0 + H_c(t)$, 内部哈密顿量为 H_0, 相互作用哈密顿量为 $H_c(t) = \sum_{i=1}^{r} u_i(t)H_i$, 其中控制哈密顿量的个数 $r \geq 2$, $u_i(t)$ 表示控制场的第 i 个分量.

基于实时状态估计的 n 比特随机量子系统反馈

控制系统的框图如图 5 所示, 其中, S, P, $S\otimes P$ 分别代表被测量子系统、探测系统和联合系统, $|\psi(\Delta t)\rangle$ 代表联合系统的状态矢量, $|o\rangle$ 代表系统 P 在投影测量后随机塌缩到的某个本征态, M 代表测量算符, 它们一起组成 CWM 过程. 联合系统 y 的输出中包含测量过程引入的高斯噪声, $\hat{\rho}_k$ 和 $\hat{e}_k$ 分别为在 k 时刻的密度矩阵 ρ_k 和测量噪声 e_k 的估计值, $u(k)$ 为 k 时刻的控制场, q^{-1} 为单位延迟算子, ρ_f 为目标态.

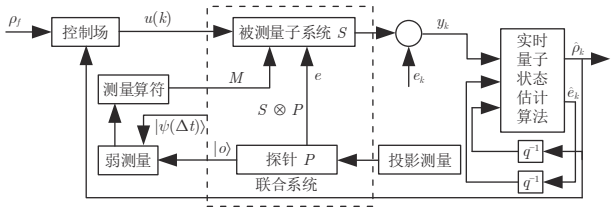


图 5　基于实时状态估计的 n 比特随机量子系统反馈控制方案的框图

Fig. 5　Real-time state estimation-based feedback control scheme for n-qubit stochastic quantum systems

定理 1. 对于 n 比特随机量子系统 (28), 当满足能控性条件 $L=L^\dagger$ 和 $[H_0,\ L]=0$ [29] 时, 在式 (29) 和式 (30) 所示的反馈控制律的作用下, 量子系统的状态可以从任意初态 ρ_0 以概率 1 收敛到任意期望的目标态 ρ_f. 控制律的表达式为

1) 当采样时刻 $k=1$ 时

$$u(1)=\left[\begin{array}{cccc} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{r1}\end{array}\right]^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{cccc}\varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon\end{array}\right]^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

2) 当采样时刻 $k\geq 2$ 时

$$u(k)=\left[\begin{array}{cccc} u_{1k} & u_{2k} & \ldots & u_{rk}\end{array}\right]^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{cccc}-\dfrac{C}{T_1} & -g_2T_2 & \ldots & -g_rT_r\end{array}\right]^{\mathrm{T}} \tag{30}$$

其中, ε 为一非常小的正实数, 本文取 0.01; $T_i(\hat{\rho}_k)=\mathrm{tr}(-(i/\hbar)\cdot[H_i,\ \hat{\rho}_k](\hat{\rho}_k-\rho_f))$, $C(\hat{\rho}_k)=\mathrm{tr}((\mathcal{D}(L,\ \hat{\rho}_k)-(i/h)\cdot[H_0,\ \hat{\rho}_k])(\hat{\rho}_k-\rho_f)+(1/2)\cdot\mathcal{H}^2(L,\ \hat{\rho}_k))$ 为漂移项, 其符号可正可负, 当估计状态 $\hat{\rho}_k$ 与 ρ_f 十分接近时, $T_i(\hat{\rho}_k)$ 和 $C(\hat{\rho}_k)$ 都趋于 0; $g_i>0$ 为设计参数, 决定状态转移的速率.

证明. 选取 $V(\hat{\rho}_k)=(1/2)\cdot\mathrm{tr}((\hat{\rho}_k-\rho_f)^2)$ 作为李雅普诺夫函数. 显然, $V(\hat{\rho}_k)\geq 0$ 始终成立且 $V(\hat{\rho}_k)=0$ 当且仅当 $\hat{\rho}_k=\rho_f$. 因此反馈控制律设计的关键就是保证当 $\hat{\rho}_k\neq\rho_f$ 时, $\mathcal{L}V(\hat{\rho}_k)<0$ 始终成立, 其中 $\mathcal{L}(\cdot)$ 代表无穷小生成元.

1) 系统 (28) 存在多个平衡点, 如 $\rho_{s1}=\mathrm{diag}\{1,0\}^{\otimes n}$ 和 $\rho_{s2}=\mathrm{diag}\{0,1\}^{\otimes n}$. 当初始估计状态 $\hat{\rho}_1$ 与目标态 ρ_f 选取为同一个平衡点时, 有 $T_i(\hat{\rho}_k)=0$, 意味着式 (30) 所示的控制律无法施加到该量子系统中. 因此在 $k=1$ 时, 首先施加微扰形式的控制律驱动系统离开平衡点; 即便是系统初始状态不是平衡点, 该微扰形式的控制律也不会对系统动力学产生较大的影响.

2) 当 $k\geq 2$ 时, 设计 u_{1k} 来抵消漂移项的影响, 设计 $u_{ik}\ (i=2,\cdots,r)$ 用于保证 $\mathcal{L}V(\hat{\rho}_k)\leq 0$.

$$\mathcal{L}V(\hat{\rho}_k)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(\mathrm{tr}(\hat{\rho}_k^2)-2\mathrm{tr}(\hat{\rho}_k\rho_f)+\mathrm{tr}(\rho_f^2))=\frac{1}{2}\mathcal{L}\mathrm{tr}(\hat{\rho}_k^2)-\mathcal{L}\mathrm{tr}(\hat{\rho}_k\rho_f) \tag{31}$$

依据 Itô 法则, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathrm{tr}(\hat{\rho}_k^2)=\mathrm{tr}(2\hat{\rho}_k(&-i[H_0,\ \hat{\rho}_k]-\sum_{i=1}^{r}u_{ik}\cdot i[H_i,\ \hat{\rho}_k]+\\&\mathcal{D}(L,\ \hat{\rho}_k))+\mathcal{H}^2(L,\ \hat{\rho}_k))\mathrm{d}t+\\&2\mathrm{tr}(\mathcal{H}(L,\ \hat{\rho}_k)\hat{\rho}_k)\mathrm{d}W\end{aligned} \tag{32}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathrm{tr}(\hat{\rho}_k^2)=\mathrm{tr}\Bigg(2\hat{\rho}_k\Bigg(&-i[H_0,\hat{\rho}_k]-\sum_{i=1}^{r}u_{ik}\cdot i[H_i,\ \hat{\rho}_k]+\\&\mathcal{D}(L,\hat{\rho}_k)\Bigg)+\mathcal{H}^2(L,\hat{\rho}_k)\Bigg)\end{aligned} \tag{33}$$

依据式 (28), 可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathrm{tr}(\hat{\rho}_k\rho_f)=\mathrm{tr}\Bigg(&-i[H_0,\ \hat{\rho}_k]\rho_f-\sum_{i=1}^{r}u_{ik}\cdot i[H_i,\ \hat{\rho}_k]\rho_f+\\&\mathcal{D}(L,\ \hat{\rho}_k)\rho_f\Bigg)\mathrm{d}t+\mathcal{H}(L,\ \hat{\rho}_k)\rho_f\mathrm{d}W\end{aligned} \tag{34}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathrm{tr}(\hat{\rho}_k\rho_f)=\mathrm{tr}\Bigg(&-i[H_0,\ \hat{\rho}_k]\rho_f-\sum_{i=1}^{r}u_{ik}\times\\&i[H_i,\ \hat{\rho}_k]\rho_f+\mathcal{D}(L,\ \hat{\rho}_k)\rho_f\Bigg)\end{aligned} \tag{35}$$

将式 (33) 和式 (35) 代入式 (31), 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(\hat{\rho}_k)=&\sum_{i=1}^{r}u_{ik}\cdot\mathrm{tr}(-i[H_i,\ \hat{\rho}_k](\ \hat{\rho}_k-\rho_f))+\\&\mathrm{tr}(\mathcal{D}(L,\ \hat{\rho}_k)-i[H_0,\ \hat{\rho}_k](\ \hat{\rho}_k-\rho_f))+\\&\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{H}^2(L,\ \hat{\rho}_k))\end{aligned} \tag{36}$$

将式 (30) 所示控制律代入式 (36), 可得

$$\mathcal{L}V(\hat{\rho}_k)=\sum_{i=1}^{r}u_{ik}\cdot T_i(\hat{\rho}_k)+C(\hat{\rho}_k)=$$
$$-\sum_{i=2}^{r}g_i\cdot T_i^2(\hat{\rho}_k)-\frac{C(\hat{\rho}_k)}{T_1(\hat{\rho}_k)}T_1(\hat{\rho}_k)+$$
$$C(\hat{\rho}_k)=-\sum_{i=2}^{r}g_i\cdot T_i^2(\hat{\rho}_k) \tag{37}$$

当 $\hat{\rho}_k\neq\rho_f$ 时, $\mathcal{L}V(\hat{\rho}_k)<0$ 始终成立; 当 $\hat{\rho}_k=\rho_f$ 时, $\mathcal{L}V(\hat{\rho}_k)=0$. 因此本文所提的反馈控制律几乎必然是李雅普诺夫意义上渐近收敛的. □

基于 QSE-OADM 算法进行实时量子状态估计的反馈控制方案 QSE-OADM-FC 的具体步骤如算法 2 所示.

算法 2. QSE-OADM-FC 方案

初始化. 设置 QSE-OADM 算法的参数和估计状态; 设置 2 比特量子系统的初始状态 ρ_0, 目标态 ρ_f, 系统哈密顿量 H 和设计参数 $g_2\sim g_4$.

1) **for** $k=1,2,\cdots,$ **do**
2) 设置 $H(k)=H_0+u_{1k}H_1+\cdots+u_{4k}H_4$;
3) 依据式 (4) 计算 ρ_k;
4) 依据算法 1 所示的 QSE-OADM 算法计算 $\hat{\rho}_k$;
5) 计算 $T_i(\hat{\rho}_k)$ 和 $C(\hat{\rho}_k)$;
6) 依据式 (29) 或式 (30) 更新控制律;
7) **end for**

3.2 量子反馈控制的数值仿真实验及其性能对比分析

本节仍以 2 比特随机量子系统为例进行数值仿真实验. 仿真实验中, $H_0=\sigma_z\otimes I+I\otimes\sigma_z$, 4 个控制哈密顿量分别为 $H_1=\sigma_x\otimes I+I\otimes\sigma_x$; $H_2=\sigma_y\otimes I+I\otimes\sigma_y$; $H_3=(\sigma_y+\sigma_z)\otimes I+I\otimes(\sigma_y+\sigma_z)$; $H_4=(\sigma_x+\sigma_z)\otimes I+I\otimes(\sigma_x+\sigma_z)$. 除滑窗长度改为 $l=30$ 外, 其他系统参数以及 QSE-OADM 算法的参数均与第 2 节相同.

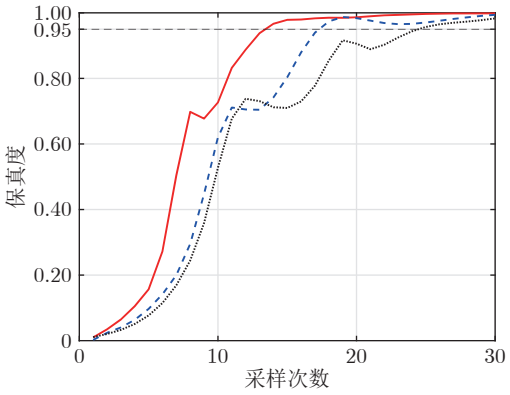
为了验证本文所提方案性能的优越性, 将所提出的 QSE-OADM-FC 方案与 QST-OADM-FC 方案以及 OPG-ADMM-FC 方案进行比较, 其中 QST-OADM 算法和 OPG-ADMM 算法的参数已分别依据文献 [18] 和文献 [19] 调整至最佳. 除李雅普诺夫函数数值之外, 本文还借助控制场能量这一指标来衡量反馈控制方案的优越性, 其定义为

$$J(k)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}u_{ij}^2 \tag{38}$$

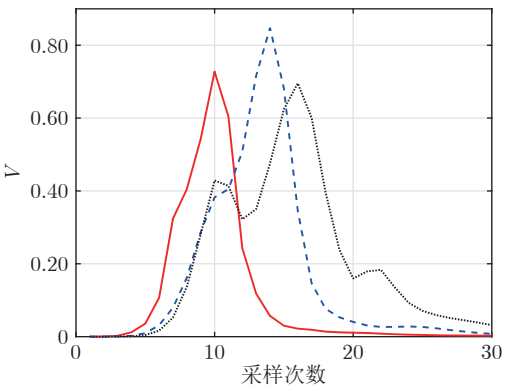
3.2.1 本征态的反馈控制

2 比特量子系统的初态为本征态 $\rho_0=\rho_{00}\otimes\rho_{00}$, 其中 $\rho_{00}=[1\ 0;\ 0\ 0]$; 目标态为本征态 $\rho_f=\rho_{f0}\otimes\rho_{f0}$, 其中 $\rho_{f0}=[0\ 0;\ 0\ 1]$, 设计参数为 $g_2=6$, $g_3=1$, $g_4=1$. 本征态反馈控制的仿真结果如图 6 所示, 其中, 图 6(a) 和图 6(b) 中的实线、虚线和点线分别代表 QSE-OADM-FC、QST-OADM-FC 和 OPG-ADMM-FC 方案中保真度和李雅普诺夫函数的变化曲线, 图 6(c) 中的实线、虚线、点划线和带"+"的曲线分别代表 3 种方案中控制场分量 u_1, u_2, u_3 和 u_4 的变化曲线, 图 6(d) 中的实线、虚线、点划线和带"+"的曲线分别代表 3 种方案中密度矩阵对角线元素 ρ_{11}, ρ_{22}, ρ_{33} 和 ρ_{44} 的变化曲线.

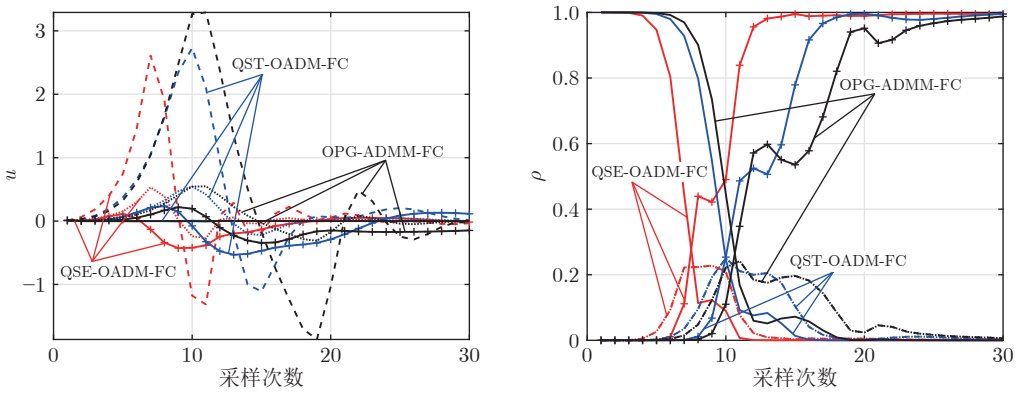
在 QSE-OADM-FC 方案中, 第 14 次采样过后即可保证实时量子状态估计的保真度高于 95%; 第 15 次采样过后即可保证李雅普诺夫函数数值小于 0.01; 第 30 次采样时保真度为 99.84%, 李雅普诺夫函数数值为 5.399×10^{-4}. 如采用 QST-OADM-FC 方案, 则第 18 次采样过后才能保证实时量子状态估计的保真度高于 95%, 李雅普诺夫函数数值小于 0.01; 第 30 次采样时保真度为 99.40%, 李雅普诺夫



(a) 实时量子状态估计中保真度变化曲线
(a) Variation curves of fidelity in real-time quantum state estimation



(b) 李雅普诺夫函数变化曲线
(b) Variation curves of Lyapunov functions



(c) 控制场变化曲线
(c) Variation curves of control fields

(d) 密度矩阵对角线元素的变化曲线
(d) Variation curves of diagonal elements of density matrices

图 6　本征态反馈控制的仿真结果

Fig. 6　Simulation results on feedback control of an eigenstate

函数数值为 1.484×10^{-3}. 如采用 OPG-ADMM-FC 方案, 则第 25 次采样过后才能保证实时量子状态估计的保真度高于 95%; 第 28 次采样过后才能保证李雅普诺夫函数数值小于 0.01; 第 30 次采样时保真度为 98.29%, 李雅普诺夫函数数值为 6.312×10^{-3}. 此外, 采用 QSE-OADM-FC 方案在达到更好的本征态反馈控制效果的同时所需要的控制场能量更小, 仅为 QST-OADM-FC 方案的 60% 左右, 为 OPG-ADMM-FC 方案的 35% 左右.

3 种方案下, 本征态反馈控制性能指标的对比如表 2 所示. 其中, 方案 1 代表 QSE-OADM-FC 方案; 方案 2 代表 QST-OADM-FC 方案; 方案 3 代表 OPG-ADMM-FC 方案. k_{s1} 代表使得保真度持续稳定在 95% 以上的首个采样时刻; k_{s2} 代表使得李雅普诺夫函数数值持续低于 0.01 的首个采样时刻.

表 2　本征态反馈控制性能指标的对比

Table 2　Comparison of performance indicators of feedback control of an eigenstate

指标	方案 1	方案 2	方案 3
k_{s1}	14	18	25
k_{s2}	15	18	28
$Fidelity(30)$ (%)	99.84	99.40	98.29
$V(30)$	5.399×10^{-4}	1.484×10^{-3}	6.312×10^{-3}
$J(30)$	18.247	28.721	52.112

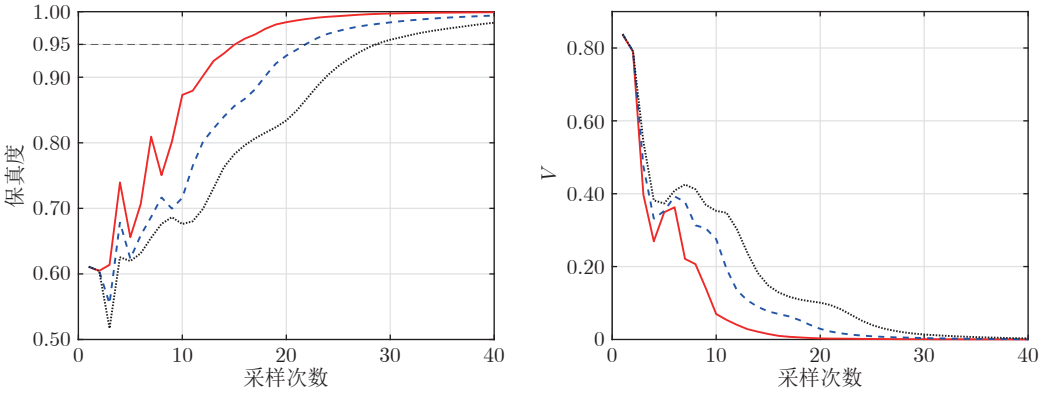
3.2.2　叠加态的反馈控制

2 比特量子系统的初态为叠加态 $\rho_0=\rho_{00}\otimes\rho_{00}$, 其中, $\rho_{00}=[3/8\ \ -\sqrt{15}/8;\ \ -\sqrt{15}/8\ \ 5/8]$; 目标态为叠加态 $\rho_f=\rho_{f0}\otimes\rho_{f0}$, 其中, $\rho_{f0}=[3/4\ \ -\sqrt{3}/4;\ -\sqrt{3}/4\ \ 1/4]$, 设计参数为 $g_2=5$, $g_3=2$, $g_4=0.8$. 叠加态反馈控制的仿真结果如图 7 所示, 其中各组曲线的含义与图 6 相同. 在 QSE-OADM-FC 方案中, 第 16 次采样过后即可保证实时量子状态估计的保真度高于 95%, 李雅普诺夫函数数值小于 0.01; 第 40 次采样时保真度为 99.90%, 李雅普诺夫函数数值为 3.220×10^{-4}. 如采用 QST-OADM-FC 方案, 则第 22 次采样过后才能保证实时量子状态估计的保真度高于 95%; 第 25 次采样过后才能保证李雅普诺夫函数数值小于 0.01; 第 40 次采样时保真度为 99.40%, 李雅普诺夫函数数值为 6.180×10^{-4}. 如采用 OPG-ADMM-FC 方案, 则第 29 次采样过后才能保证实时量子状态估计的保真度高于 95%; 第 33 次采样过后才能保证李雅普诺夫函数数值小于 0.01; 第 40 次采样时保真度为 98.30%, 李雅普诺夫函数数值为 2.854×10^{-3}. 相对而言, QSE-OADM-FC 方案所需的控制场能量稍小于 QST-OADM-FC 方案和 OPG-ADMM-FC 方案.

3 种方案下, 叠加态反馈控制性能指标的对比如表 3 所示, 其中 k_{s1} 和 k_{s2} 的含义与表 2 相同. 与本征态的反馈控制相比, 叠加态的反馈控制实现起来难度更大, 具体表现在其调节时间更长且所需的控制场能量更大上.

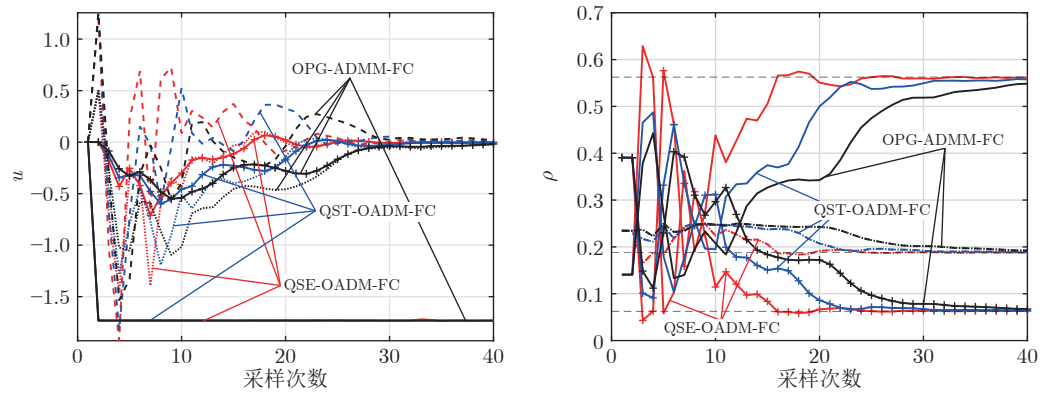
4　结束语

本文解决了 n 比特随机量子系统的实时状态估计及其反馈控制的问题. 针对 CWM 过程中存在高斯噪声的 n 比特随机量子系统, 通过测量序列和采样矩阵的构造、基于在线交替方向乘子法的实时量子状态估计算法的设计以及借助李雅普诺夫方法的反馈控制律的设计, 提出了一种基于实时状态估计



(a) 实时量子状态估计中保真度变化曲线
(a) Variation curves of fidelity in real-time quantum state estimation

(b) 李雅普诺夫函数变化曲线
(b) Variation curves of Lyapunov functions



(c) 控制场变化曲线
(c) Variation curves of control fields

(d) 密度矩阵对角线元素的变化曲线
(d) Variation curves of diagonal elements of density matrices

图 7 叠加态反馈控制的仿真结果

Fig. 7 Simulation results on feedback control of a superposition state

表 3 叠加态反馈控制性能指标的对比

Table 3 Comparison of performance indicators of feedback control of a superposition state

指标	方案 1	方案 2	方案 3
k_{s1}	16	22	29
k_{s2}	16	25	33
$Fidelity(40)$ (%)	99.90	99.40	98.30
$V(40)$	1.651×10^{-4}	6.180×10^{-4}	2.854×10^{-3}
$J(40)$	133.179	133.880	136.223

的量子反馈控制方案. 最后, 与基于其他两种不同的实时状态估计算法的量子反馈控制方案进行性能对比, 展现了本文所提方案的优越性.

References

1 Huang G M, Tarn T J, Clark J W. On the controllability of quantum-mechanical systems. *Journal of Mathematical Physics*, 1983, **24**(11): 2608−2618

2 Tesch C M, Kurtz L, Vivie-Riedle R D. Applying optimal control theory for elements of quantum computation in molecular systems. *Chemical Physics Letters*, 2001, **343**(5−6): 633−641

3 Nigmatullin R, Schirmer S G. Implementation of fault-tolerant quantum logic gates via optimal control. *New Journal of Physics*, 2009, **11**(10): Article No. 105032

4 Nourallah G, Cong S. Preparation of Hadamard gate for open quantum systems by the Lyapunov control method. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, **5**(3): 733−740

5 Viola L, Lloyd S. Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems. *Physical Review A*, 1998, **58**(4): 2733−2744

6 Zhang M, Ou B Q, Dai H Y, Hu D W. Control decoherence by quantum generalized measurement. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(4): 433−437

7 Dong D, Petersen I R. Quantum control theory and applications: A survey. *IET Control Theory and Applications*, 2009, **4**(12): 2651−2671

8 Cong Shuang. Manipulation technology and system control theory in quantum molecular dynamics. *Control Theory and Applications*, 2010, **27**(1): 1−12
(丛爽. 量子分子动力学中的操纵技术及其系统控制理论. 控制理论与应用, 2010, **27**(1): 1−12)

9 Cong S. *Control of Quantum Systems: Theory and Methods*. Singapore: Wiley, 2014.

10 Dong W, Wu R, Yuan X, Li C, Tarn T J. The modelling of quantum control systems. *Science Bulletin*, 2015, **60**(17):

1493−1508

11 Zhang J, Liu Y X, Wu R B, Jacobs K, Nori F. Quantum feedback: Theory, experiments, and applications. *Physics Reports*, 2017, **679**: 1−60

12 D′Alessandro D. *Introduction to Quantum Control and Dynamics*. New York: Chapman & Hall/CRC, 2020.

13 Silberfarb A, Jessen P S, Deutsch I H. Quantum state reconstruction via continuous measurement. *Physical Review Letters*, 2005, **95**(3): Article No. 030402

14 Smith G A, Silberfarb A, Deutsch I H, Jessen P S. Efficient quantum-state estimation by continuous weak measurement and dynamical control. *Physical Review Letters*, 2006, **97**(18): Article No. 180403

15 Ralph J F, Jacobs K, Hill C D. Frequency tracking and parameter estimation for robust quantum state-estimation. *Physical Review A*, 2011, **84**(5): 1398−1405

16 Tang Ya-Ru, Cong Shuang, Yang Jing-Bei. On-line state estimation of one-qubit system. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(8): 1592−1599
(唐雅茹, 丛爽, 杨靖北. 单量子比特系统状态的在线估计. 自动化学报, 2020, **46**(8): 1592−1599)

17 Harraz S, Cong S, Li K. Online quantum state tomography of N-qubit via continuous weak measurement and compressed sensing. *International Journal of Quantum Information*, 2020: Article No. 2040006

18 Zhang K, Cong S, Li K, Wang T. An online optimization algorithm for the real-time quantum state tomography. *Quantum Information Processing*, 2020, **19**(10): Article No. 361

19 Zhang K, Cong S, Tang Y, Freris N M. An efficient online estimation algorithm for evolving quantum states. In: Proceedings of the European Signal Processing Conference (EUSIPCO). Amsterdam, the Netherlands: IEEE, 2020. 2249−2253

20 Kuang S, Cong S. Lyapunov control methods of closed quantum systems. *Automatica*, 2008, **44**(1): 98−108

21 Sayrin C, Dotsenko I, Zhou X, Peaudecerf B, Rybarczyk T, Gleyzes S, et al. Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states. *Nature*, 2011, **477**(7362): 73−77

22 Qi B, Guo L. Is measurement-based feedback still better for quantum control systems? *Systems and Control Letters*, 2010, **59**(6): 333−339

23 Qi B, Pan H, Guo L. Further results on stabilizing control of quantum systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(5): 1349−1354

24 Qamar S, Cong S. Observer-based feedback control of two-level open stochastic quantum system. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, **356**(11): 5675−5691

25 Harraz S, Cong S. State transfer via on-line state estimation and Lyapunov-based feedback control for a N-qubit system. *Entropy*, 2019, **21**(8): Article No. 751

26 Cong Shuang, Hu Long-Zhen, Yang Fei, Liu Jian-Xiu. Characteristics analysis and state transfer for Non-Markovian open quantum systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 360−370
(丛爽, 胡龙珍, 杨霏, 刘建秀. Non-Markovian 开放量子系统的特性分析与状态转移. 自动化学报, 2013, **39**(4): 360−370)

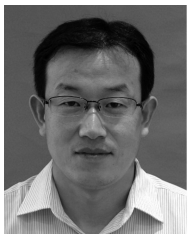
27 Bosse J, Rabaste O. Subspace rejection for matching pursuit in the presence of unresolved targets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, **66**(8): 1997−2010

28 Zhang Xian-Da. *Matrix Analysis and Applications*. Beijing: Tsinghua University Press, 2013.
(张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2013.)

29 Ge S S, Vu T L, Hang C C. Non-smooth Lyapunov function-based global stabilization for quantum filters. *Automatica*, 2012, **48**(6): 1031−1044

张骄阳 2020 年获得中国海洋大学自动化专业学士学位, 2023 年获得中国科学技术大学控制科学与工程专业硕士学位. 自 2023 年 9 月起为华中科技大学人工智能与自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性与自适应控制, 随机控制, 量子信息与控制.
E-mail: jyzhang_lemon@sina.com
(**ZHANG Jiao-Yang** Received his bachelor degree in automation and master degree in control science and engineering from Ocean University of China and University of Science and Technology of China, in 2020 and 2023, respectively. He has been a Ph.D. candidate at the School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology since September, 2023. His research interest covers nonlinear and adaptive control, stochastic control, and quantum information and control.)

丛 爽 中国科学技术大学自动化系教授. 1995 年获得意大利罗马大学系统工程博士学位. 主要研究方向为运动控制中的先进控制策略, 模糊逻辑控制, 神经网络设计与应用, 机器人协调控制和量子系统控制. 本文通信作者. E-mail: scong@ustc.edu.cn
(**CONG Shuang** Professor in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. She received her Ph.D. degree in system engineering from the University of Rome "La Sapienza", Italy, in 1995. Her research interest covers advanced control strategies for motion control, fuzzy logic control, neural networks design and applications, robotic coordination control, and quantum systems control. Corresponding author of this paper.)



匡 森 中国科学技术大学自动化系副教授. 2007 年获得中国科学技术大学控制理论与控制工程专业博士学位. 主要研究方向为量子信息与控制, 量子人工智能, 智能控制及其应用.
E-mail: skuang@ustc.edu.cn
(**KUANG Sen** Associate professor in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. He received his Ph.D. degree in control theory and control engineering from University of Science and Technology of China in 2007. His research interest covers quantum information and control, quantum artificial intelligence, and intelligent control and its applications.)