考虑交通流非线性特性的交通信号迭代学习控制策略

闫 飞 [1] 李 浦 [1] 阎高伟 [1] 任密蜂 [1]

摘 要 现实中城市交通流的运行具有很强的非线性特性, 采用简单的线性模型难以全面描述交通流的实际运行过程. 本文在考虑城市交通流非线性动态特性的基础上, 提出了一种非线性交通流排队模型, 并基于宏观交通流固有的周期性特征, 设计了交叉口信号的迭代学习控制策略. 通过对交叉口信号的迭代学习控制, 使交叉口各进口道的车辆排队长度尽可能趋于均衡, 提高交叉口信号有效绿灯时间的利用率, 从而提高路网的通行效率. 最后通过严格的数学推导证明了该方法的收敛性, 仿真研究及实验结果验证了所提方法的有效性.

关键词 交通控制, 非线性交通流模型, 迭代学习控制, 排队长度, 收敛性分析

引用格式 闫飞, 李浦, 阎高伟, 任密蜂. 考虑交通流非线性特性的交通信号迭代学习控制策略. 自动化学报, 2021, **47**(9): 2238−2249

DOI 10.16383/j.aas.c190183

An Iterative Learning Control Strategy for Traffic Signals Considering Nonlinear Characteristics of Traffic Flow

YAN Fei[1] LI Pu[1] YAN Gao-Wei[1] REN Mi-Feng[1]

Abstract The operation of urban traffic flow has strong non-linear characteristics in real traffic situation, so it is difficult to describe the actual operation process of traffic flow comprehensively by using simple linear model. Considering the nonlinear dynamic characteristics of urban traffic flow, a nonlinear traffic flow queuing model is proposed, and an iterative learning control strategy for intersection signals is designed based on the inherent periodic characteristics of macroscopic traffic flow. By the iterative learning control of intersection signals, the vehicle queue lengths in the import way are balanced as far as possible, thus the utilization rate of effective green light time at intersections and the efficiency of road network are effectively improved. Finally, the convergence of the method is proved by strict mathematical deduction, and the effectiveness of the proposed method is verified by the simulation research and experimental results.

Key words Traffic control, nonlinear traffic flow model, iterative learning control, queue length, convergence analysis

Citation Yan Fei, Li Pu, Yan Gao-Wei, Ren Mi-Feng. An iterative learning control strategy for traffic signals considering nonlinear characteristics of traffic flow. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(9): 2238−2249

随着我国城市交通的快速发展, 交通拥堵已成为各大城市普遍面临的交通难题, 而交通信号控制作为调控城市交通流运行的最主要措施, 其合理的信号配时对更好地利用现有的道路设施和缓解交通拥堵起着至关重要的作用. 研究表明, 自适应信号控制比固定配时控制能更有效地提高路网的通行效率[1]. 如研究者们早期开发出的绿信比−周期长−相位差优化技术 (Split−cycle−offset optimization technique, SCOOT) 和悉尼协调自适应交通系统 (Sydney coordinated adaptive traffic system, SCATS) 等自适应交通信号控制系统, 这些系统都能根据交通状况实时地对子区或路网的信号配时进行在线优化. 但随着控制路网规模的不断扩大, 路网交通状况愈加复杂, 从而使得整个路网的协调控制变得十分困难[2−3]. 另一类常用的基于交通流模型进行信号配时的交通控制方法, 因现实中交通流具有很强的不确定性和随机性, 很难对其进行精确的数学建模, 因此也难以达到理想的控制效果. 侯忠生教授提出的基于排队长度均衡的交叉口信号配时思想能够实时动态调整各相位的绿灯时间, 从而达到排队长度均衡的控制目标, 并通过采用无模型的自适应控制方法, 使得信号控制具有自学习和自适

收稿日期 2019-03-19 录用日期 2019-08-15
Manuscript received March 19, 2019; accepted August 15, 2019
国家自然科学基金 (61703300), 中国博士后科学基金 (2019M651082), 山西省应用基础研究项目 (201801D221191) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61703300), China Postdoctoral Science Foundation (2019M651082), and Applied Basic Research Program of Shanxi Province (201801D221191)
本文责任编委 侯忠生
Recommended by Associate Editor HOU Zhong-Sheng
1. 太原理工大学电气与动力工程学院 太原 030024
1. College of Electrical and Power Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024

应特性, 因此不依赖于交通流模型[4]. 此后, 文献 [5–6] 基于排队长度均衡的控制思想分别采用不同方法对单个交叉口的信号控制进行了研究.

虽然交通流具有复杂的非线性动态特性, 但从宏观角度看, 一个城市特定区域的交通流, 其每天的运行大体是一个重复的过程, 而交通拥堵通常也发生在相同的时间和相同的地点[7]. 因此, 充分利用宏观交通流运行时固有的周期性特征开展城市交通信号控制的研究, 对提高城市路网的通行效率具有十分重要的意义. 迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 作为一种新型的学习控制策略, 是由日本学者 Arimoto 等[8] 在 1984 年首次提出, 目的在于解决有限区间内重复运行系统的控制问题. 其不依赖于系统的精确数学模型, 而是一种通过应用先前操作信息来获得控制输入使其能够产生期望输出, 并通过控制输入不断地调整最终使实际的输出逼近理想输出的控制方法[9]. 与传统的控制方法相比, 它具有适应性强、易于实现的特点, 并且仅需要较少的先验知识和计算量. 迭代学习控制的收敛性是指在迭代轴上具有收敛性, 而在时间轴上能够实现完全跟踪, 而传统在时间轴上渐进跟踪的收敛性从理论上讲需在时间足够大时才可能满足. 很显然, 具有完全跟踪收敛的迭代学习控制更适合城市交通信号控制. 因此, 本文结合迭代学习控制与城市宏观交通流运行特点, 开展基于迭代学习的城市交通信号控制研究可充分利用迭代学习控制的优点, 弥补传统基于模型的交通控制方法过分依赖交通流模型的不足, 从而避开对交通流进行精确建模的难题.

近年来, 在交通控制领域已有不少基于迭代学习的交通控制方面的研究成果, 如文献 [10] 首次提出将迭代学习控制方法应用于高速公路匝道控制中. 为进一步增强基于迭代学习的匝道控制方法的鲁棒性, 文献 [11−12] 在现有反馈控制的基础上加入迭代学习控制, 提出了基于迭代学习控制和反馈控制相结合的高速公路交通流控制方法, 并讨论了输入受限等问题. 考虑现实中的交通系统并非满足严格的重复性, 文献 [13] 研究了当模型参数和期望轨迹迭代变化时迭代学习控制方法在高速公路交通流控制中的应用. 文献 [14] 结合模糊控制理论与迭代学习控制设计了交通信号自适应控制器对单个交叉口进行控制. 文献 [15] 将交通分配与交通控制相结合, 采用迭代学习控制方法设计了交通信号控制器对路网进行控制. 文献 [16−18] 将迭代学习控制应用于多交叉口的交通路网信号控制, 通过对交叉口信号的迭代学习控制使路网各条道路的车辆数处于合理水平, 以防止交通拥堵的发生, 并分析了交通信号的迭代学习控制策略对路网宏观基本图的影响. 文献 [19] 考虑城市交通流运行初态的不确定性, 通过引入平均迭代算子, 提出了一种具有非一致性迭代区间的迭代学习控制算法, 并证明了算法的收敛性.

上述关于城市交通信号迭代学习控制的研究均采用了由 Gazis 和 Potts[20] 早期提出的存储转发模型, 该模型可将路段内的车辆出入动态情况在整个采样周期内看做是连续的, 避免了更多离散变量的引入, 从而在更多的控制方案中得到应用. 如前所述, 城市交通流具有复杂的非线性动态特性, 采用线性的存储转发模型无法准确地描述交通流的动态特性. 鉴于此, 本文在存储转发模型的基础上结合路段内交通流的运行特点, 提出了一种描述城市交通流的非线性动态模型. 同时, 结合宏观交通流固有的周期性特征, 设计了交叉口信号的迭代学习控制策略, 并对其收敛性进行了分析. 该方法通过对交叉口信号的迭代学习控制, 使交叉口各进口道的车辆排队长度逐渐趋于均衡, 从而使绿灯时间得到更充分的利用, 有效提高了路网的通行效率. 最后通过仿真实验进一步验证了该方法的有效性.

本文的组织结构如下: 第 1 节给出了描述交通流动态特性的非线性交通流模型; 第 2 节给出了对所研究问题的描述; 第 3 节给出了考虑交通流非线性特性的交叉口信号迭代学习控制策略并对其收敛性进行了分析; 第 4 节为仿真研究; 第 5 节是本文的结论.

1　交通流模型

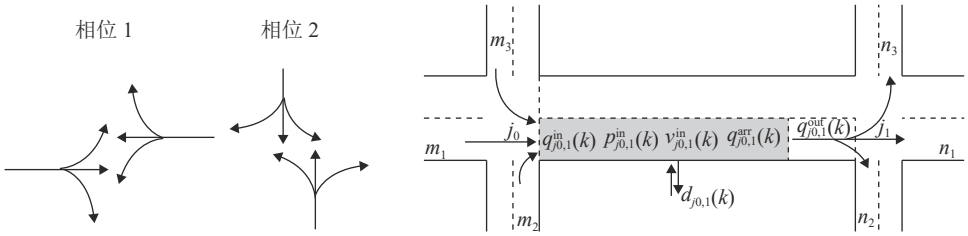
1.1　交通流模型及状态空间表达

本文在存储转发模型的基础上, 结合交通流运行的动态特性, 提出了一种描述城市交通流运行的非线性动态模型, 具体建模过程如下.

假设交叉口相位设置如图 1(a) 所示, 路段内的交通流运行情况如图 1(b) 所示. 本文用 $j_{0,1}$ 表示从交叉口 j_0 至交叉口 j_1 间的路段; $v_{j_{0,1}}(k)$ 为第 k 时刻车辆从 $j_{0,1}$ 上游路段进入 $j_{0,1}$ 路段且到达 $j_{0,1}$ 路段车辆队列末端的车辆平均速度; $\rho_{j_{0,1}}$ 为车辆从 $j_{0,1}$ 路段上游到 $j_{0,1}$ 路段车辆队列末端的车辆密度; $q^{\text{in}}_{j_{0,1}}(k)$ 为第 k 时刻进入 $j_{0,1}$ 路段的车辆数; $q^{\text{out}}_{j_{0,1}}(k)$ 为第 k 时刻驶出 $j_{0,1}$ 路段的车辆数; $d_{j_{0,1}}(k)$ 为第 k 时刻 $j_{0,1}$ 路段的扰动车辆数.

在 $j_{0,1}$ 路段上第 k 时刻的车辆数 $x_{j_{0,1}}(k)$ 的变化情况可以描述为

$$x_{j_{0,1}}(k+1)=x_{j_{0,1}}(k)+q^{\text{in}}_{j_{0,1}}(k)-q^{\text{out}}_{j_{0,1}}(k)+d_{j_{0,1}}(k) \quad (1)$$



(a) 交叉口相位
(a) Intersection phase

(b) 路段交通流模型
(b) Road traffic flow model

图 1 交叉口相位示意图与路段交通流模型

Fig. 1 The intersection phase and road traffic flow model

第 k 时刻进入 $j_{0,1}$ 路段的车辆数 $q^{\text{in}}_{j_{0,1}}(k)$ 为

$$q^{\text{in}}_{j_{0,1}}(k)=\sum_{m\in I_{j_0},i\in F_{j_0}} r_{m,j_{0,1}}s_m u_{j_0,i}(k) \tag{2}$$

其中, I_{j_0} 表示可进入交叉口 j_0 的所有支路段的集合; $r_{m,j_{0,1}}$ 为车流量从上游支路 m 经过交叉口 j_0 进入路段 $j_{0,1}$ 的转向比; 其中 F_{j_0} 为交叉口 j_0 的相位集合; s_m 为对应支路 m 的车辆饱和流率; u_{j_0} 为交叉口 j_0 对应相位的持续绿灯时间.

同理, 第 k 时刻驶出 $j_{0,1}$ 路段的车辆数 $q^{\text{out}}_{j_{0,1}}(k)$ 为

$$q^{\text{out}}_{j_{0,1}}(k)=\sum_{n\in O_{j_1},z\in F_{j_1}} r_{j_{0,1},n}s_{j_{0,1}}u_{j_0,z}(k) \tag{3}$$

其中, O_{j_1} 表示驶出交叉口 j_1 的所有支路段的集合; F_{j_1} 为交叉口 j_1 的相位集合; $r_{j_{0,1},n}$ 为车流量驶出 $j_{0,1}$ 路段并通过交叉口 j_1 进入下游路段的转向比; $s_{j_{0,1}}$ 为对应支路 $j_{0,1}$ 路段的车辆饱和流率; $u_{j_0,z}$ 为交叉口 j_1 对应相位的持续绿灯时间.

对于 $j_{0,1}$ 路段在第 k 时刻路段末端的车辆排队长度 $y_{j_{0,1}}(k)$ 可表示为

$$y_{j_{0,1}}(k+1)=y_{j_{0,1}}(k)+q^{\text{arr}}_{j_{0,1}}(k)-q^{\text{out}}_{j_{0,1}}(k) \tag{4}$$

式 (4) 中, $q^{\text{arr}}_{j_{0,1}}(k)$ 为第 k 时刻到达 $j_{0,1}$ 路段车辆队列末端的车辆数, $q^{\text{arr}}_{j_{0,1}}(k)$ 的动态更新情况具体可以描述为

$$\begin{aligned}q^{\text{arr}}_{j_{0,1}}(k)=\ &\min\big\{\rho_{j_{0,1}}(k)\times v_{j_{0,1}}(k)\times n_{j_{0,1}}\times\Delta t,\\ &x_{j_{0,1}}(k)-y_{j_{0,1}}(k)\big\}\end{aligned} \tag{5}$$

其中, Δt 为系统状态的更新时间; $n_{j_{0,1}}$ 为对应路段 $j_{0,1}$ 的车道数; $\rho_{j_{0,1}}(k)\cdot v_{j_{0,1}}(k)\cdot n_{j_{0,1}}$ 表示第 k 时刻到达 $j_{0,1}$ 路段列队末端的车辆数, 同时受限于 $x_{j_{0,1}}(k)-y_{j_{0,1}}(k)$. 对于速度 $v_{j_{0,1}}(k)$ 取决于 $j_{0,1}$ 路段上游到 $j_{0,1}$ 路段车辆队列末端之间路段的车辆密度 $\rho_{j_{0,1}}(k)$, 具体描述为[21]

$$v_{j_{0,1}}(k)=\begin{cases}v^{\text{free}}, & \rho_{j_{0,1}}(k)<\rho^{\min}\\ v^{\min}, & \rho_{j_{0,1}}(k)>\rho^{\text{jam}}\end{cases} \tag{6}$$

当 $\rho_{j_{0,1}}(k)\in[\rho^{\min},\rho^{\text{jam}}]$ 时, 有

$$\begin{aligned}v_{j_{0,1}}(k)=\ &v^{\min}+\left(v^{\text{free}}-v^{\min}\right)\times\\ &\left[1-\left(\frac{\rho_{j_{0,1}}(k)-\rho^{\min}}{\rho^{\text{jam}}-\rho^{\min}}\right)^{\alpha}\right]^{\beta}\end{aligned} \tag{7}$$

式 (6) 和式 (7) 中, $\rho^{\min}$ 为在路段 $j_{0,1}$ 中车辆以自由速度 $\left(v^{\text{free}}_{j_{0,1}}\right)$ 移动的最小临界密度, 其中最小交通流速度 $v^{\min}$ 对应于阻塞密度 $\left(\rho^{\text{jam}}\right)$, α 和 β 是需要校准的恒定模型参数.

对于式 (6) 和式 (7) 中的 $\rho_{j_{0,1}}(k)$, 具体描述为

$$\rho_{j_{0,1}}(k)=\frac{x_{j_{0,1}}(k)-y_{j_{0,1}}(k)}{n_{j_{0,1}}\left(l_{j_{0,1}}-\frac{y_{j_{0,1}}(k)}{n_{j_{0,1}}\times\rho^{\text{jam}}}\right)} \tag{8}$$

式 (8) 中, $x_{j_{0,1}}(k)-y_{j_{0,1}}(k)$ 表示第 k 时刻在 $j_{0,1}$ 路段的上游到 $j_{0,1}$ 路段车辆队列的末端之间的移动车辆数, $l_{j_{0,1}}-y_{j_{0,1}}(k)/n_{j_{0,1}}\times\rho^{\text{jam}}$ 表示随着时间的推移上游路段到 $j_{0,1}$ 路段车辆队列末端的长度动态变化情况, 其中 $l_{j_{0,1}}$ 为 $j_{0,1}$ 路段的长度.

结合式 (5) ~ (8), 可将 $q^{\text{arr}}_{j_{0,1}}(k)$ 重新写为

$$q^{\text{arr}}_{j_{0,1}}(k)=f(x_{j_{0,1}}(k),y_{j_{0,1}}(k)) \tag{9}$$

在本文中, 假设控制周期与信号周期相同. 根据信号周期的定义, 在城市交通网络中, 交叉口 j 对应的各相位应满足如下条件

$$\sum_{i\in F_j}u_{j,i}(k)+t_L=C \tag{10}$$

式 (10) 中, F_j 为交叉口 j 对应的相位集合; $u_{j,i}(k)$ 为交叉口 j 对应 i 相位的绿灯持续时间; t_L 为一个周期的总损失时间; C 为周期时间.

在实际中, 相位的绿灯时间 $u_{j,i}(k)$ 还应满足如下约束条件

$$u^{\min}_{j,i}(k)\le u_{j,i}(k)\le u^{\max}_{j,i}(k) \tag{11}$$

式 (11) 中, $u^{\min}_{j,i}(k)$ 和 $u^{\max}_{j,i}(k)$ 分别为绿灯时间 $u_{j,i}(k)$ 的最小值和最大值.

结合式 (1) ~ (4) 和式 (9) 可得 $j_{0,1}$路段内累计的车辆数 $x_{j_{0,1}}(k)$ 和 $j_{0,1}$路段末端的排队车辆数 $y_{j_{0,1}}(k)$ 有如下关系

$$x_{j_{0,1}}(k+1)=x_{j_{0,1}}(k)+\sum_{m\in I_{j_0},i\in F_{j_0}} r_{m,j_{0,1}}s_m u_{j_0,i}(k)-\sum_{n\in O_{j_1},z\in F_{j_1}} r_{j_{0,1},n}s_{j_{0,1}}u_{j_0,z}(k)+d_{j_{0,1}}(k) \tag{12}$$

$$y_{j_{0,1}}(k+1)=y_{j_{0,1}}(k)+f(x_{j_{0,1}}(k),y_{j_{0,1}}(k))-\sum_{n\in O_{j_1},z\in F_{j_1}} r_{j_{0,1},n}s_{j_{0,1}}u_{j_0,z}(k) \tag{13}$$

由于

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in I_{j_0},i\in F_{j_0}} r_{m,j_{0,1}}s_m u_{j_0,i}(k)-\sum_{n\in O_{j_1},z\in F_{j_1}} r_{j_{0,1},n}s_{j_{0,1}}u_{j_0,z}(k)=\\&\big[r_{m_1,j_{0,1}}s_{m_1}u_{j_0,1}(k)+r_{m_2,j_{0,1}}s_{m_2}u_{j_0,2}(k)+r_{m_3,j_{0,1}}s_{m_3}u_{j_0,3}(k)\big]-\big[r_{j_{0,1},n_1}s_{j_{0,1}}u_{j_1,1}(k)+r_{j_{0,1},n_2}s_{j_{0,1}}u_{j_1,2}(k)+r_{j_{0,1},n_3}s_{j_{0,1}}u_{j_1,3}(k)\big]=\\&B_1\boldsymbol{u}_1(k)\end{aligned} \tag{14}$$

其中, B_1和 $\boldsymbol{u}_1(k)$ 分别为

$$B_1=\begin{bmatrix}r_{m_1,j_{0,1}}s_{m_1} & r_{m_2,j_{0,1}}s_{m_2} & r_{m_3,j_{0,1}}s_{m_3}\\ -r_{j_{0,1},n_1}s_{j_{0,1}} & -r_{j_{0,1},n_2}s_{j_{0,1}} & -r_{j_{0,1},n_3}s_{j_{0,1}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_1(k)=\begin{bmatrix}u_{j_0,1}(k) & u_{j_0,2}(k) & u_{j_0,3}(k)\\ u_{j_1,1}(k) & u_{j_1,2}(k) & u_{j_1,3}(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&-\sum_{n\in O_{j_1},z\in F_{j_1}} r_{j_{0,1},n}s_{j_{0,1}}u_{j_0,z}(k)=\\&-\big[r_{j_{0,1},n_1}s_{j_{0,1}}u_{j_1,1}(k)+r_{j_{0,1},n_2}s_{j_{0,1}}u_{j_1,2}(k)+r_{j_{0,1},n_3}s_{j_{0,1}}u_{j_1,3}(k)\big]=D_1\boldsymbol{u}_1(k)\end{aligned} \tag{15}$$

其中, D_1具体表示为

$$D_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -r_{j_{0,1},n_1}s_{j_{0,1}}\\ & & & -r_{j_{0,1},n_2}s_{j_{0,1}} & -r_{j_{0,1},n_3}s_{j_{0,1}}\end{bmatrix}$$

结合式 (14) 和式 (15), 可将式 (12) 和式 (13) 重新写为

$$x_{j_{0,1}}(k+1)=x_{j_{0,1}}(k)+B_1\boldsymbol{u}_1(k)+d_{j_{0,1}}(k) \tag{16}$$

$$y_{j_{0,1}}(k+1)=y_{j_{0,1}}(k)+f(x_{j_{0,1}}(k),y_{j_{0,1}}(k))+D_1\boldsymbol{u}_1(k) \tag{17}$$

根据上述描述, 对一个给定路网的全部受控路段均可列写出类似式 (16) 和式 (17) 的状态方程组, 从而可得到路网的状态空间方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{x}(k)+Bu(k)+\boldsymbol{d}(k)\\ \boldsymbol{y}(k+1)=\boldsymbol{y}(k)+f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{y}(k))+Du(k)\end{cases} \tag{18}$$

其中, N 为路网内被控路段的总数; $\boldsymbol{x}(k)=[x_1(k), x_2(k),\cdots,x_N(k)]^{\mathrm{T}}$ 为状态向量, 其中 $x_i(k)$ 为第 k 时刻第 i 条路段内的车辆数; $\boldsymbol{y}(k)=[y_1(k),y_2(k),\cdots,y_N(k)]^{\mathrm{T}}$ 为输出向量, $y_i(k)$ 为对应第 i 条路段在第 k 时刻末端的车辆排队长度; $\boldsymbol{u}(k)=[u_1(k),u_2(k),\cdots,u_N(k)]^{\mathrm{T}}$ 为控制向量, $u_i(k)$ 为对应相位 i 的绿灯时长; $\boldsymbol{d}(k)=[d_1(k),\ d_2(k),\cdots,d_N(k)]^{\mathrm{T}}$ 为状态扰动向量; 状态矩阵 B 和传递矩阵 D 为反映路网特征的定常矩阵, 由路网各交叉口的相位、周期、饱和流量及转向率等因素确定.

2　问题描述

2.1　基本假设

假设 1. 对于交通流模型式 (18) 中, 函数 $f(\cdot,\cdot)$ 在整个区间$[0,K]$中, 满足全局一致的 Lipschitz条件, 即:

$$\|f(\boldsymbol{x}_{n+1}(k),\boldsymbol{y}_{n+1}(k))-f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))\|\le k_{f_x}\|\boldsymbol{x}_{n+1}(k)-\boldsymbol{x}_n(k)\|+k_{f_y}\|\boldsymbol{y}_{n+1}(k)-\boldsymbol{y}_n(k)\| \tag{19}$$

其中, k_{f_x}, k_{f_y}为 Lipschitz 常量.

假设 2. 当给定一个期望输出向量 $\boldsymbol{y}_d(k)$ ($k\in[0,K]$)时, 则存在一个有界的控制输入 $\boldsymbol{u}_d(k)$ 使得满足下列条件

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_d(k+1)=\boldsymbol{x}_d(k)+B\boldsymbol{u}_d(k)\\ \boldsymbol{y}_d(k+1)=\boldsymbol{y}_d(k)+f(\boldsymbol{x}_d(k),\boldsymbol{y}_d(k))+D\boldsymbol{u}_d(k)\end{cases} \tag{20}$$

式中, $\boldsymbol{x}_d(k)$ 为与期望输出 $\boldsymbol{y}_d(k)$ 相对应的期望状态向量.

假设 3. 在重复的迭代过程中满足重新初始化条件, 即

$$\boldsymbol{x}_n(0)=\boldsymbol{x}_d(0),\ \ \boldsymbol{y}_n(0)=\boldsymbol{y}_d(0),\quad \forall n \tag{21}$$

式中, $\boldsymbol{x}_d(0)$ 和 $\boldsymbol{y}_d(0)$ 分别为期望状态和期望输出的初值, n 为迭代次数.

假设 4. 相邻两次扰动的变化量有界, 其界为 b_d , 即

$$\sup_{k\in[0,K]}\|\boldsymbol{d}_{n+1}(k)-\boldsymbol{d}_n(k)\|\le b_d \tag{22}$$

式中, $\boldsymbol{d}_n(k)$ 和 $\boldsymbol{d}_{n+1}(k)$ 分别为第 n 次和第 $n+1$ 次迭代的扰动.

假设 1 中要求交通流模型具有全局 Lipschitz 连续性. 由于交通流模型 (1) ~ (8) 在整个区间 $[0,K]$ 中对所有变量都是连续可微的, 且对于现实交通流

而言, 道路内累积的车辆数 $\boldsymbol{x}(k)$ 和车辆排队长度 $\boldsymbol{y}(k)$ 总会受到道路空间和车道容纳能力的限制, 在实际中不可能是无限的. 同时时间区间 $[0, K]$ 也是有限的, 因此, 假设 1 是合理的.

假设 2 为系统的控制任务可以解决的合理假设, 如果不满足该假设, 则该问题研究将不具有实际意义.

假设 3 中要求系统的状态初值与期望状态初值保持一致. 但在实际中, 交叉口各道路期望的车辆数初值与实际值不一定相同, 因此当两者不同时, 可通过文献 [22–23] 提出的方法进行调整.

2.2 控制目标

根据路网的宏观基本图理论, 在路网条件和车辆数相同的情况下, 路网内各道路的车辆密度分布越均衡, 路网的通行效率就越高[24]. 而各道路的车辆排队长度在一定程度上反映了各道路的车辆密度. 因此, 受文献 [4] 提出的排队长度均衡控制思想的启发, 本文拟采用该思想对交叉口信号进行控制, 控制目标为寻找合适的交叉口相位绿灯时间, 尽可能使路网中同一交叉口各相位所对应的车辆排队长度与该相位的绿灯时长相适应, 保证交叉口各相位的绿灯时间得到充分利用.

以具有 4 个路口的交叉口为例, 同一交叉口各路口之间车辆排队长度的差值可任选其中某一路口的车辆排队长度作为参考, 例如假设选取路口 1 的车辆排队长度作为参考, 则可将其他路口的车辆排队长度与路口 1 的车辆排队长度的差值作为向量 $\tilde{\boldsymbol{y}}_1(k)$, 假设该交叉口在第 k 时刻的 4 个路口的排队长度分别为 $y_1(k)$, $y_2(k)$, $y_3(k)$, $y_4(k)$, 则该交叉口各路口车辆排队长度的差值情况可描述为

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1(k)=\begin{bmatrix} y_2(k)-y_1(k)\\ y_3(k)-y_1(k)\\ y_4(k)-y_1(k)\end{bmatrix}= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(k)\\ y_2(k)\\ y_3(k)\\ y_4(k)\end{bmatrix}=C_1\boldsymbol{y}_1(k) \tag{23}$$

式中, $\boldsymbol{y}_1(k)$ 为交叉口 1 的各路口车辆排队长度向量; 对于车辆排队误差 $\boldsymbol{e}_1(k)$, 可用各路口之间期望的排队长度差值 $\tilde{\boldsymbol{y}}_d(k)$ 减去各路口之间实际的排队长度差值 $\tilde{\boldsymbol{y}}_1(k)$ 得到, 因此对于交叉口 1 第 n 次的迭代误差 $\boldsymbol{e}_{1,n}(k)$, 可表示为

$$\boldsymbol{e}_{1,n}(k)=\tilde{\boldsymbol{y}}_d(k)-\tilde{\boldsymbol{y}}_{1,n}(k) \tag{24}$$

由式 (24) 可推出对于整个路网第 n 次迭代的误差向量 $\boldsymbol{e}(k)$ 为

$$\boldsymbol{e}_n(k)=\tilde{\boldsymbol{y}}_d(k)-\tilde{\boldsymbol{y}}_n(k) \tag{25}$$

其中, $\tilde{\boldsymbol{y}}_d(k)$ 为理想的交叉口排队误差向量; $\tilde{\boldsymbol{y}}_n(k)=[\tilde{y}_{1,n}(k), \tilde{y}_{2,n}(k), \cdots, \tilde{\boldsymbol{y}}_{N,n}(k)]$; 控制目标为通过不断迭代学习控制, 使误差 $\boldsymbol{e}_n(k)$, $\forall k\in[0,K]$ 逐渐趋近于 0, 即

$$\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{e}_n(k)\to 0,\ \ \forall k\in[0,K] \tag{26}$$

其中, $\boldsymbol{e}_n(k)$ 为 $\boldsymbol{e}(k)$ 在第 n 次迭代后的误差.

3 迭代学习控制策略与收敛性分析

文中用到的 $\|\cdot\|$ 表示 1 范数, 即对于 $s\times t$ 的矩阵 M, 其元素记为 $m_{i,j}$, 则有

$$\|M\|=\max_{1\le j\le t}\sum_{i=1}^{s}|m_{i,j}|$$

为了便于收敛性分析, 本文定义向量 $\boldsymbol{u}(k)$ 的 λ 范数为

$$\|\boldsymbol{u}(k)\|_\lambda=\sup_{k\in[0,K]}a^{-\lambda k}\|\boldsymbol{u}(k)\|$$

其中, $\lambda>0$, $a>1$.

交叉口信号的迭代学习控制律构造为

$$\boldsymbol{u}_{n+1}(k)=\boldsymbol{u}_n(k)+\beta\boldsymbol{e}_n(k+1) \tag{27}$$

为了使得到的控制输入 $\boldsymbol{u}_n(k)$ 能够满足交通实际, 因此式 (27) 中的 $\boldsymbol{u}_n(k)$ 应满足上述提到的约束条件 (11), 即 $\boldsymbol{u}_n(k)\in[\boldsymbol{u}_{\min}(k), \boldsymbol{u}_{\max}(k)]$, 同时还需要考虑在控制输入 $\boldsymbol{u}_n(k)$ 受限条件下迭代学习控制律 (27) 仍然具有收敛性. 对于受限的 $\boldsymbol{u}_n(k)\in[\boldsymbol{u}_{\min}(k), \boldsymbol{u}_{\max}(k)]$, 可通过下列饱和函数进行描述, 即

$$\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)]=\begin{cases}\boldsymbol{u}_n(k), & \boldsymbol{u}_{\min}(k)<\boldsymbol{u}_n(k)<\boldsymbol{u}_{\max}(k)\\ \boldsymbol{u}_{\max}(k), & \boldsymbol{u}_n(k)\ge\boldsymbol{u}_{\max}(k)\\ \boldsymbol{u}_{\min}(k), & \boldsymbol{u}_n(k)\le\boldsymbol{u}_{\min}(k)\end{cases}$$

因此, 结合式 (27) 可重新得到

$$\boldsymbol{u}_{n+1}(k)=\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)]+\beta\boldsymbol{e}_n(k+1) \tag{28}$$

为了便于稍后的收敛性分析, 此处给出引理 1.

引理 1.

$$\|\boldsymbol{u}_d(k)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)]\|\le\|\boldsymbol{u}_d(k)-\boldsymbol{u}_n(k)\| \tag{29}$$

证明见文献 [7].

定理 1. 当式 (18) 中描述的交通流系统满足假设 1 ~ 4 时, 若有 $\|I-CD\|<1$, 且相邻两次扰动的变化量上界 $\lim_{b_d\to 0}$ 时, 则在迭代学习控制律 (28) 的作用下, 系统的误差 $\boldsymbol{e}(k)$ 在 $[0,K]$ 内收敛于期望值, 即

$$\lim_{n\to+\infty}\| \tilde{\boldsymbol{y}}_d(k)-\tilde{\boldsymbol{y}}_n(k)\|_\lambda=0,\ k=0,1,2,\cdots,K \tag{30}$$

下面采用类似于文献 [7] 的证明思路对定理 1 进行证明.

证明. 对于系统 (18) 中的状态方程, 对任意给定的受限控制输入 $\boldsymbol{u}_n(k)\in[\boldsymbol{u}_{\min}(k),\boldsymbol{u}_{\max}(k)]$, 可表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_n(k+1)=\boldsymbol{x}_n(k)+B\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)]+\boldsymbol{d}_n(k)\\ \boldsymbol{y}_n(k+1)=\boldsymbol{y}_n(k)+f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))+\\ \qquad\qquad D\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)]\end{cases} \tag{31}$$

由式 (23) 可知

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_n(k)=C\boldsymbol{y}_n(k) \tag{32}$$

定义

$$\begin{cases}\delta\boldsymbol{y}_n(k)=\boldsymbol{y}_d(k)-\boldsymbol{y}_n(k)\\ \delta\boldsymbol{x}_n(k)=\boldsymbol{x}_d(k)-\boldsymbol{x}_n(k)\\ \delta\boldsymbol{u}_n(k)=\boldsymbol{u}_d(k)-\boldsymbol{u}_n(k)\\ \delta\boldsymbol{d}_n(k)=\boldsymbol{d}_d(k)-\boldsymbol{d}_n(k)\\ \delta f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))=\\ \qquad f(\boldsymbol{x}_d(k),\boldsymbol{y}_d(k))-f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))\end{cases} \tag{33}$$

由于 $\boldsymbol{e}_n(k)=\tilde{\boldsymbol{y}}_d(k)-\tilde{\boldsymbol{y}}_n(k)$, 结合式 (33) 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_n(k)&=\widetilde{\boldsymbol{y}}_d(k)-\widetilde{\boldsymbol{y}}_n(k)=\\ &C\boldsymbol{y}_d(k)-C\boldsymbol{y}_n(k)=\\ &C\{\boldsymbol{y}_d(k)-\boldsymbol{y}_d(k)\}=\\ &C\delta\boldsymbol{y}_n(k)\end{aligned} \tag{34}$$

进一步, 通过式 (33) 和式 (34), 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_n(k+1)&=C[\boldsymbol{y}_d(k+1)-\boldsymbol{y}_n(k+1)]=\\ &C[\boldsymbol{y}_d(k)+f(\boldsymbol{x}_d(k),\boldsymbol{y}_d(k))+\\ &D\boldsymbol{u}_d(k)-\boldsymbol{y}_n(k)-f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))-\\ &D\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)]]=C[\delta\boldsymbol{y}_n(k)+\\ &\delta f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))+\\ &D(\boldsymbol{u}_d(k)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)])]=\\ &C[C^{-1}\boldsymbol{e}_n(k)+\delta f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))+\\ &D(\boldsymbol{u}_d(k)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)])]=\\ &\boldsymbol{e}_n(k)+C\delta f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))+\\ &CD(\boldsymbol{u}_d(k)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)])]\end{aligned} \tag{35}$$

根据式 (28) 和式 (35), 可得

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{u}_{n+1}(k)&=\boldsymbol{u}_d(k)-\boldsymbol{u}_{n+1}(k)=\\ &\boldsymbol{u}_d(k)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)]-\beta\boldsymbol{e}_n(k+1)=\\ &\boldsymbol{u}_d(k)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)]-\beta\boldsymbol{e}_n(k)-\\ &\beta C\delta f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))-\\ &\beta CD\boldsymbol{u}_d(k)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)])=\\ &(I-\beta CD)(\boldsymbol{u}_d(k)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)])-\\ &\beta\boldsymbol{e}_n(k)-\beta C\delta f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))\end{aligned} \tag{36}$$

对式 (36) 两边同时取范数, 并结合假设 1 中的 Lipschitz 条件和引理 1, 可得

$$\begin{aligned}\|\delta\boldsymbol{u}_{n+1}(k)\|&\le\|I-\beta CD\|\|\boldsymbol{u}_d(k)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k)]\|+\\ &\|\beta\|\|\boldsymbol{e}_n(k)\|+\|\beta\|\|C\|\|\delta f(\boldsymbol{x}_n(k),\boldsymbol{y}_n(k))\|\le\\ &\|I-\beta CD\|\|\boldsymbol{u}_d(k)-\boldsymbol{u}_n(k)\|+b_\beta\|\boldsymbol{e}_n(k)\|+\\ &b_\beta b_C k_{f_x}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\|+b_\beta b_C k_{f_y}\|\delta\boldsymbol{y}_n(k)\|\le\\ &\|I-\beta CD\|\|\delta\boldsymbol{u}_n(k)\|+b_\beta\|\boldsymbol{e}_n(k)\|+\\ &b_\beta b_C k_{f_x}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\|+b_\beta b_C k_{f_y}\|C^{-1}\boldsymbol{e}_n(k)\|\le\\ &\|I-\beta CD\|\|\delta\boldsymbol{u}_n(k)\|+b_\beta\|\boldsymbol{e}_n(k)\|+\\ &b_\beta b_C k_{f_x}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\|+b_\beta b_C k_{f_y}\|C^{-1}\|\|\boldsymbol{e}_n(k)\|\le\\ &\|I-\beta CD\|\|\delta\boldsymbol{u}_n(k)\|+b_\beta\|\boldsymbol{e}_n(k)\|+\\ &b_\beta b_C k_{f_x}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\|+b_\beta b_C k_{f_y}b_w\|\boldsymbol{e}_n(k)\|\le\\ &\|I-\beta CD\|\|\delta\boldsymbol{u}_n(k)\|+\\ &(b_\beta+b_\beta b_C k_{f_y}b_w)\|\boldsymbol{e}_n(k)\|+b_\beta b_C k_{f_x}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\|\le\\ &\|I-\beta CD\|\|\delta\boldsymbol{u}_n(k)\|+\varepsilon_1(\|\boldsymbol{e}_n(k)\|+\|\delta\boldsymbol{x}_n(k)\|)\end{aligned} \tag{37}$$

其中, $b_C=\|C\|$, $b_\beta=\|\beta\|$, $b_w=\|C^{-1}\|$, 同时 $\varepsilon_1=\max_{k\in[0,K]}\{b_\beta+b_\beta b_C k_{f_y}b_w,b_\beta b_C k_{f_x}\}$.

对式 (35) 两边同时取范数, 可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{e}_n(k)\|&\le\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\|+\\ &\|C\|\|\delta f(\boldsymbol{x}_n(k-1),\boldsymbol{y}_n(k-1))\|+\\ &\|C\|\|D\|\|\boldsymbol{u}_d(k-1)-\text{sat}[\boldsymbol{u}_n(k-1)]\|\le\\ &\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\|+b_C k_{f_x}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\|+\\ &b_C k_{f_y}\|\delta\boldsymbol{y}_n(k-1)\|+\\ &b_C b_D\|\boldsymbol{u}_d(k-1)-\boldsymbol{u}_n(k-1)\|\le\\ &\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\|+b_C k_{f_x}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\|+\\ &b_C k_{f_y}\|C^{-1}\boldsymbol{e}_n(k-1)\|+b_C b_D\|\delta\boldsymbol{u}_n(k-1)\|\le\\ &\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\|+b_C k_{f_x}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\|+\\ &b_C b_w k_{f_y}\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\|+b_C b_D\|\delta\boldsymbol{u}_n(k-1)\|\le\\ &(1+b_C b_w k_{f_y})\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\|+\\ &b_C k_{f_x}\|\delta\boldsymbol{x}_n(k-1)\|+b_C b_D\|\delta\boldsymbol{u}_n(k-1)\|\end{aligned} \tag{38}$$

由式 (18) 可知

$$\delta \boldsymbol{x}_n(k) = \delta \boldsymbol{x}_n(k-1) + B\delta \boldsymbol{u}_n(k-1) + \delta \boldsymbol{d}_n(k-1) \tag{39}$$

对式 (39) 两边同时取范数, 可得

$$\| \delta \boldsymbol{x}_n(k) \| \leq \| \delta \boldsymbol{x}_n(k-1) \| + b_B \| \delta \boldsymbol{u}_n(k-1) \| + b_d \tag{40}$$

结合式 (38) 和式 (40), 可得

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{e}_n(k)\| + \|\delta \boldsymbol{x}_n(k)\| \leq \\
&\quad (1 + b_C b_w k_{f_y})\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\| + \\
&\quad b_C k_{f_x}\|\delta \boldsymbol{x}_n(k-1)\| + \\
&\quad b_C b_D\|\delta \boldsymbol{u}_n(k-1)\| + \\
&\quad \|\delta \boldsymbol{x}_n(k-1)\| + b_B\|\delta \boldsymbol{u}_n(k-1)\| + b_d \leq \\
&\quad (1 + b_C b_w k_{f_y})\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\| + \\
&\quad (1 + b_C k_{f_x})\|\delta \boldsymbol{x}_n(k-1)\| + \\
&\quad (b_C b_D + b_B)\|\delta \boldsymbol{u}_n(k-1)\| + b_d \leq \\
&\quad \varepsilon_2(\|\boldsymbol{e}_n(k-1)\| + \|\delta \boldsymbol{x}_n(k-1)\|) + \\
&\quad \varepsilon_3\|\delta \boldsymbol{u}_n(k-1)\| + b_d \leq \\
&\quad \varepsilon_2^k(\|\boldsymbol{e}_n(0)\| + \|\delta \boldsymbol{x}_n(0)\|) + \\
&\quad \varepsilon_3 \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1}\|\delta \boldsymbol{u}_n(j)\| + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1} b_d
\end{aligned} \tag{41}$$

式 (41) 中, $\varepsilon_2 = \max_{k\in[0,K]}\{1 + b_C k_{f_y} b_w, b_C k_{f_x} + 1\}$, $\varepsilon_3 = (b_C b_D + b_B)$.

将式 (41) 代入式 (37) 中, 得

$$\begin{aligned}
&\| \delta \boldsymbol{u}_{n+1}(k) \| \leq \| 1 - \beta CD \| \| \delta \boldsymbol{u}_n(k) \| + \\
&\quad \varepsilon_1\{\varepsilon_2^k(\| \boldsymbol{e}_n(0) \| + \| \delta \boldsymbol{x}_n(0) \|) + \\
&\quad \varepsilon_3 \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1} \| \delta \boldsymbol{u}_n(j) \| + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1} b_d\} = \\
&\quad \| 1 - \beta CD \| \| \delta \boldsymbol{u}_n(k) \| + \\
&\quad \varepsilon_1\varepsilon_3 \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1} \| \delta \boldsymbol{u}_n(j) \| + \varepsilon_4 + \varepsilon_5
\end{aligned} \tag{42}$$

其中, $\varepsilon_4 = \varepsilon_1\varepsilon_2^k(\| \boldsymbol{e}_n(0) \| + \| \delta \boldsymbol{x}_n(0) \|)$, $\varepsilon_5 = \varepsilon_1 \times \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1} b_d$. 由假设 3 可知 $\varepsilon_4 = 0$.

对式 (42) 两边同时取 λ 范数, 有

$$\begin{aligned}
&\sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k} \| \delta \boldsymbol{u}_{n+1}(k) \| \leq \\
&\quad \| I - \beta CD \| \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k} \| \delta \boldsymbol{u}_n(k) \| + \\
&\quad \varepsilon_1\varepsilon_3 \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1} \| \delta \boldsymbol{u}_n(j) \| + \\
&\quad \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k}\varepsilon_4 + \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k}\varepsilon_5
\end{aligned} \tag{43}$$

其中,

$$\begin{aligned}
&\sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1} \| \delta \boldsymbol{u}_n(j) \| = \\
&\quad \varepsilon_2^{-1} \sup_{k\in[0,K]} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{\lambda j} \| \delta \boldsymbol{u}_n(j) \| \varepsilon_2^{(\lambda-1)(j-k)} \right) \leq \\
&\quad \varepsilon_2^{-1} \sup_{k\in[0,K]} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left(\sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{\lambda j} \| \delta \boldsymbol{u}_n(j) \| \right) \times \right. \\
&\quad \left. \varepsilon_2^{(\lambda-1)(j-k)} \right) \leq \varepsilon_2^{-1} \| \delta \boldsymbol{u}_n(k) \|_\lambda \times \\
&\quad \sup_{k\in[0,K]} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{(\lambda-1)(j-k)} = \\
&\quad \| \delta \boldsymbol{u}_n(k) \|_\lambda \times \frac{1 - \varepsilon_2^{-(\lambda-1)K}}{\varepsilon_2^\lambda - \varepsilon_2}
\end{aligned} \tag{44}$$

将式 (44) 代入式 (43) 中, 得

$$\begin{aligned}
&\| \delta \boldsymbol{u}_{n+1}(k) \|_\lambda \leq \\
&\quad \| I - \beta CD \| \| \delta \boldsymbol{u}_n(k) \|_\lambda + \\
&\quad \varepsilon_1\varepsilon_3 \| \delta \boldsymbol{u}_n(k) \|_\lambda \times \frac{1 - \varepsilon_2^{-(\lambda-1)K}}{\varepsilon_2^\lambda - \varepsilon_2} + \\
&\quad \varepsilon_1 \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1} b_d + \varepsilon_5 = \\
&\quad \left(\| I - \beta CD \| + \varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{1 - \varepsilon_2^{-(\lambda-1)K}}{\varepsilon_2^\lambda - \varepsilon_2} \right) \times \\
&\quad \| \delta \boldsymbol{u}_n(k) \|_\lambda + \varepsilon_6 + \varepsilon_7
\end{aligned} \tag{45}$$

其中, $\varepsilon_6 = \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k}\varepsilon_4$, $\varepsilon_7 = \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k}\varepsilon_5$.

当 $\|I - \beta CD\| < 1$ 时, 存在足够大的 λ 使得

$$\left(\| I - \beta CD \| + \varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{1 - \varepsilon_2^{-(\lambda-1)K}}{\varepsilon_2^\lambda - \varepsilon_2} \right) \leq \rho < 1 \tag{46}$$

从而, 有

$$\begin{aligned}
&\| \delta \boldsymbol{u}_{n+1}(k) \|_\lambda \leq \rho \| \delta \boldsymbol{u}_n(k) \|_\lambda + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 \leq \\
&\quad \rho^2 \| \delta \boldsymbol{u}_{n-1}(k) \|_\lambda + \rho(\varepsilon_6 + \varepsilon_7) + \\
&\quad (\varepsilon_6 + \varepsilon_7) \leq \rho^{n+1} \| \delta \boldsymbol{u}_0(k) \|_\lambda + \\
&\quad \frac{(\varepsilon_6 + \varepsilon_7)(1 + \rho^{n+1})}{1 - \rho}
\end{aligned} \tag{47}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty} \| \delta \boldsymbol{u}_{n+1}(k) \|_\lambda = \frac{\varepsilon_6+\varepsilon_7}{1-\rho} \tag{48}$$

由假设 3 可知 $\varepsilon_6=0$, 故可知当$\lim_{n\to+\infty}$ 时, 会使得 $\boldsymbol{u}_n(k)\to\varepsilon_7/(1-\rho), k\in[0,K]$.

对式 (41) 两边同时取 λ 范数, 可得

$$\begin{aligned}
&\| \boldsymbol{e}_n(k)\|_\lambda + \| \delta \boldsymbol{x}_n(k)\|_\lambda \le \\
&\quad \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k}\varepsilon_3 \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_2^{k-j-1} \| \delta \boldsymbol{u}_n(j) \| + \\
&\quad \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k}\varepsilon_2^{k}(\| \boldsymbol{e}_n(0) \| + \| \delta \boldsymbol{x}_n(0) \|) + \varepsilon_7 = \\
&\quad \| \delta \boldsymbol{u}_n(k)\|_\lambda \frac{1-\varepsilon_2^{-(\lambda-1)K}}{\varepsilon_2^{\lambda}-\varepsilon_2} + \\
&\quad \sup_{k\in[0,K]} \varepsilon_2^{-\lambda k}\varepsilon_2^{k}(\| \boldsymbol{e}_n(0) \| + \| \delta \boldsymbol{x}_n(0) \|) + \varepsilon_7
\end{aligned} \tag{49}$$

根据假设 3, 方程右边的第 2 项为零, 而系统相邻两次扰动变化量的上界 b_d 是由系统外界的不确定因素决定的, 因此当 $\lim_{b_d\to 0}$ 时, 方程右边的第 1 项和第 3 项也趋近于零, 故可推导出

$$\lim_{n\to+\infty} \| \tilde{\boldsymbol{y}}_d(k) - \tilde{\boldsymbol{y}}_n(k)\|_\lambda = 0, \quad k=0,1,2,\cdots,K \tag{50}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\sup_{k\in[0,K]} \| \tilde{\boldsymbol{y}}_d(k) - \tilde{\boldsymbol{y}}_n(k) \| \le \\
&\qquad \sup_{k\in[0,K]} a^{-\lambda k} \| \tilde{\boldsymbol{y}}_d(k) - \tilde{\boldsymbol{y}}_n(k) \|_\lambda
\end{aligned} \tag{51}$$

即证得

$$\lim_{n\to+\infty} \| \tilde{\boldsymbol{y}}_d(k) - \tilde{\boldsymbol{y}}_n(k) \| = 0, \quad k=0,1,2,\cdots,K \tag{52}$$

□

通过迭代学习律 (28) 计算得到的各交叉口相位的绿灯时间并没有考虑信号的周期约束, 即式 (10). 为了使迭代学习后同一交叉口各相位的绿灯时间能够满足信号的周期约束, 在迭代学习的基础上对每个交叉口相位的绿灯时间求解如下优化问题

$$\begin{aligned}
&\min_{U_{j,i}} \sum_{i\in F_j} (u_{j,i}-U_{j,i})^2 \\
&\text{s.t.} \sum_{i\in F_j} U_{j,i} + L_j = T \\
&U_{j,i} \in [u_{j,i,\min}, u_{j,i,\max}], \quad \forall i \in F_j
\end{aligned} \tag{53}$$

其中, $u_{j,i}$ 为迭代学习控制律计算得到的绿灯时间, $U_{j,i}$ 为满足周期约束的绿灯时间.

4　仿真研究

为了验证本文所述的交叉口信号迭代学习控制策略的有效性, 本文选取了太原市某区域的部分道路作为仿真测试区域, 道路结构简图如图 2 所示, 并通过 VISSIM 和 MATLAB 软件进行仿真研究实验. 该区域共由 9 个交叉口和 23 条双向通行车道组成, 各路段所包含的车道数如表 1, 每条车道宽约为 3 m, 根据 HCM2000 手册可估算出每条单向行驶车道的饱和流量为 1 800 veh/h.

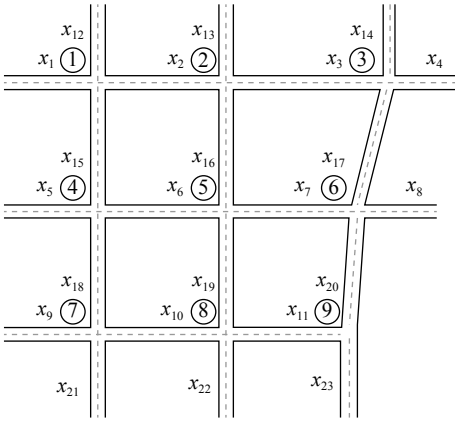


图 2　太原市某区域路网结构简图

Fig. 2　The road network structure of one region in Taiyuan

表 1　各路段车道数

Table 1　The number of lanes in each link

道路情况	道路编号
双向 3 车道道路	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{14}, x_{17}, x_{20}, x_{23}$
双向 4 车道道路	$x_{12}, x_{13}, x_{15}, x_{16}, x_{18}, x_{19}, x_{21}, x_{22}$
双向 7 车道道路	x_5, x_6, x_7, x_8

4.1　仿真实验方案介绍

仿真中分别采用 3 种不同的控制策略对同一路网进行对比仿真实验, 3 种控制方案设置如下:

1) 固定配时. 通过韦伯斯特配时法给出交叉口固定配时的绿信比约为 1 : 1 .

2) 模型预测控制. 根据交通流模型 (18),可将其简化为非线性交通流模型为

$$\boldsymbol{y}(k+1) = F(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{y}(k), \boldsymbol{u}(k)) \tag{54}$$

其中, $F(\cdot)$ 是与 $f(\cdot)$ 相关的非线性函数, 设定预测时域为 N_p, 则有

$$\hat{\boldsymbol{y}}(k) = [\hat{y}(k+1|k)\ \hat{y}(k+2|k)\ \cdots\ \hat{y}(k+N_p|k)]^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k)=[\hat{x}(k|k)\ \hat{x}(k+1|k)\ \cdots\ \hat{x}(k+N_p-1|k)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}(k)=[u(k)\ u(k+1)\ \cdots\ u(k+N_p-1)]^{\mathrm{T}} \tag{55}$$

其中, 符号^表示预测值. 此处选取目标函数为

$$\min_{\boldsymbol{u}(k)} J=\min_{\boldsymbol{u}(k)}\sum J(\hat{\boldsymbol{y}}(k),\boldsymbol{u}(k)) \tag{56}$$

$$\begin{aligned}&\text{s.t. } \hat{\boldsymbol{y}}(k)=\boldsymbol{y}(k)\\&\quad \boldsymbol{u}_{\min}\le\boldsymbol{u}(k)\le\boldsymbol{u}_{\max}\\&\quad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}(k))=0\ (\text{信号周期恒定})\\&\quad \boldsymbol{y}(k+j+1)=F(\boldsymbol{x}(k+j),\boldsymbol{y}(k+j),\\&\qquad \boldsymbol{u}(k+j)),\ \ j=0,1,\cdots,N_p-1\end{aligned} \tag{57}$$

3) 迭代学习控制. 仿真时迭代学习控制的期望为各交叉口的车辆排队长度差值为 0.

具体仿真参数设置如下: 不同路段间的转向率直行:左转:右转均设置为 3 : 1 : 1; 所有交叉口均设置为东西和南北 2 个相位; 各交叉口信号周期时长均为 120 s; 迭代学习控制和模型预测控制方案绿信比初始设置为 1:1; 每次仿真时长为 3 600 s, 迭代学习控制的仿真迭代次数为 20 次; 各路段输入的起始流量如表 2 所示; 路网各交叉口的学习增益 β 取值如表 3 所示, 且均满足收敛条件$\|I-\beta\boldsymbol{CD}\|<1$. 其他仿真参数采用 VISSIM 的默认值.

仿真中分别采用上述的三种控制方案对各个交叉口相位的车辆排队长度差值, 车辆的实际排队长度, 车辆的平均延迟时间, 车辆平均停车次数以及所选区域内车辆的平均速度进行对比研究, 仿真结果如图 3 ~ 9 所示.

4.2 仿真结果分析

通过仿真得到固定配时, 模型预测控制和迭代学习控制三种方案下的交叉口各相位的车辆排队长度的差值, 如图 3 所示. 图 4 和图 5 分别给出了不同控制方案下交叉口 4 和交叉口 9 各相位的实际车辆排队情况. 此处选择交叉口 4 和交叉口 9 是由于交叉口 4 为该区域的主要干道交叉口, 而交叉口 9 为不同于其他路口的丁字路口, 交通情况复杂容易造成拥堵. 图 6 反映了交叉口车辆的平均排队长度差值随迭代次数的变化情况. 上述仿真实验及结果分析表明当信号控制方式为固定配时时, 各交叉口车辆的平均排队长度差值波动相对较大, 而迭代学习控制和模型预测控制两种自适应控制方案下车辆的平均排队长度差值波动相对较小. 从图 3(b) 和图 3(c) 可以看出, 与模型预测控制相比, 迭代学习控制方案下各交叉口车辆的平均排队长度差值波动更小, 表明车辆在路段中的分布更加均衡. 与此同时, 通过仿真得到路网中车辆的平均延迟时间如图 7 所示, 可以看出, 与固定配时和模型预测控制方案相比, 经过 20 次迭代学习控制后, 路网中车辆的平均延迟时间明显减少; 图 8 的仿真结果为车辆的平均停车次数, 可以看出迭代学习控制方案下车辆的平均停车次数整体也少于固定配时和模型预测两种方案下车辆的平均停车次数; 关于 3 种控制方案对路网中车辆平均速度的影响, 通过图 9 可以看出, 进行 20 次迭代学习控制后路网内车辆的平均

表 2 路网的输入流量 (veh/h)

Table 2 The inflows of the road network (veh/h)

时段/min	$x_1,x_4,x_9,x_{12},x_{14},x_{21},x_{23}$	x_{13},x_{22}	x_5,x_8
0 ~ 20	1 600	3 000	2 000
20 ~ 40	2 000	3 400	2 400
40 ~ 60	1 800	3 200	2 200

表 3 交叉口的迭代学习增益

Table 3 The iterative learning gains at different intersections

交叉口编号	学习增益值
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0.1

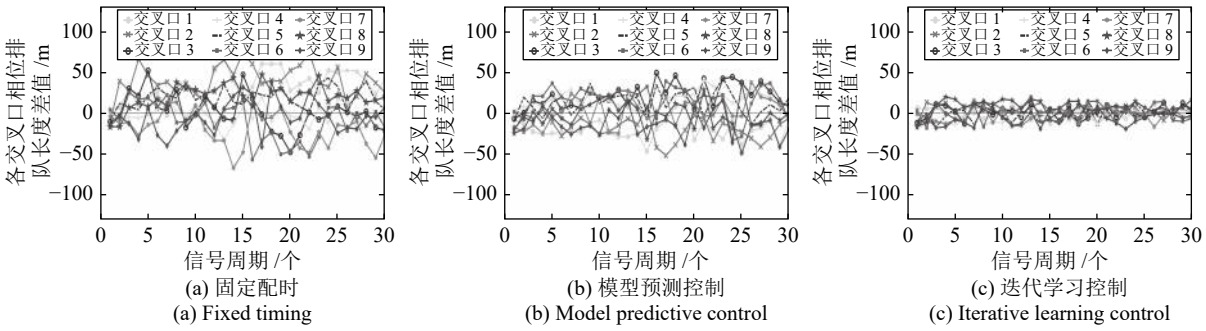


图 3 三种控制方案下各交叉口相位车辆排队长度差值

Fig. 3 The differences of queue lengths at different phases of each intersection for the three control schemes

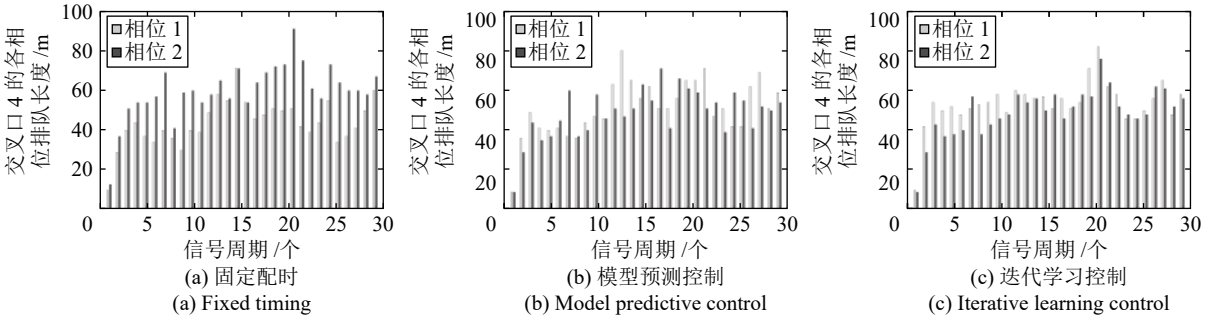


图 4　三种控制方案下交叉口 4 各相位的车辆排队情况

Fig. 4　The queue lengths at Intersection 4 for the three control schemes

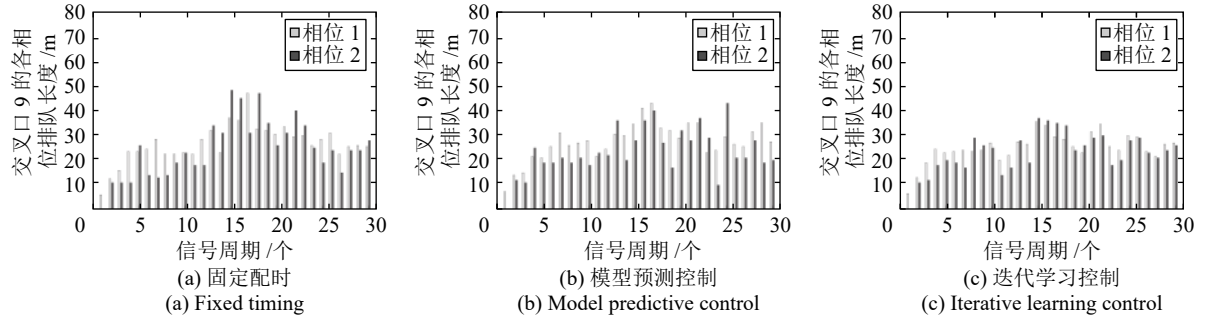


图 5　三种控制方案下交叉口 9 各相位的车辆排队情况

Fig. 5　The queue lengths at Intersection 9 for the three control schemes

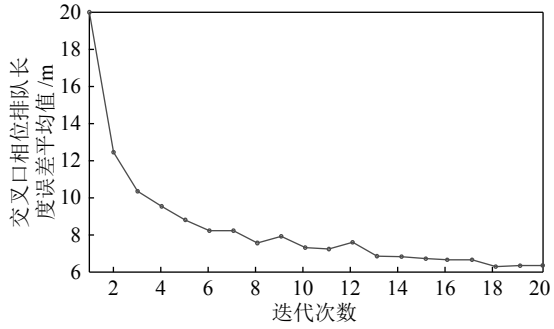


图 6　平均车辆排队长度差值随迭代次数的变化情况

Fig. 6　The average difference of queue lengths of all intersections after each iteration

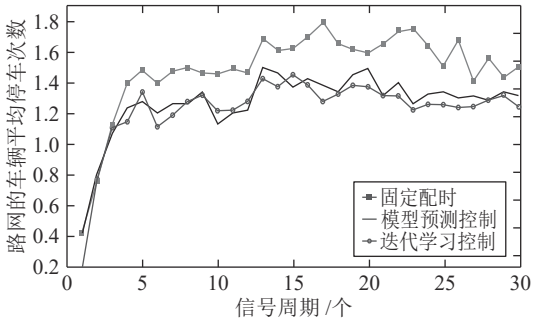


图 8　三种控制方案下路网的平均停车次数

Fig. 8　The average number of stops for the three control schemes

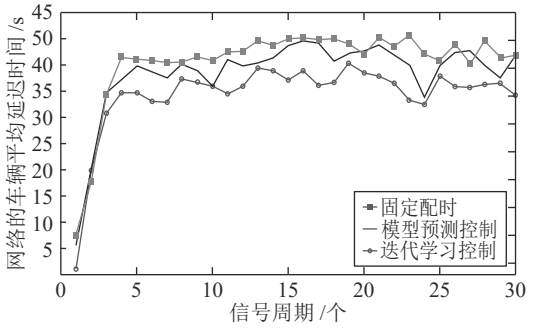


图 7　三种控制方案下路网的平均延迟时间

Fig. 7　The average delay time of road network for the three control schemes

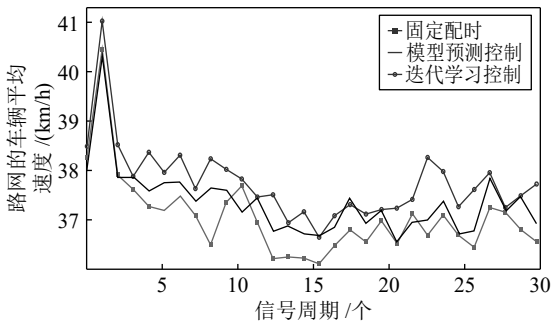


图 9　三种控制方案下路网内车辆的平均速度

Fig. 9　The average speed of vehicles for the three control schemes

速度整体也略高于固定配时和模型预测控制配时下车辆的平均速度. 综合仿真结果的分析, 迭代学习控制方案可在不改变道路设施的基础上, 通过对交叉口信号的控制调节, 能有效提高路网的通行效率.

5 结束语

针对城市交通流具有的非线性特性, 建立了描述交通流运行过程的非线性交通流排队模型. 并在建模的基础上利用宏观交通流所固有的周期性特征, 设计了交叉口信号的迭代学习控制策略, 证明了迭代学习律的收敛性. 最后以太原市某区域路网为例, 通过经典的韦伯斯特法, 模型预测控制算法和本文方法进行了对比仿真实验. 实验结果表明, 通过对交叉口信号的迭代学习控制, 可以使交叉口进口道的车辆排队长度逐渐趋于均衡, 提高交叉口信号有效绿灯时间的利用率, 从而改善路网的通行效率. 迭代学习控制方法因其计算量小, 从而易于对路网进行集中式控制. 但随着控制路网规模的增大, 不同区域间交通流特性的差异性会增强. 因此, 为了适应大规模城市路网的控制, 未来开展对分散式城市道路交通信号迭代学习控制方法的研究将会有更大的应用价值.

References

1 Genders W, Razavi S. Asynchronous n-step Q-learning adaptive traffic signal control. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 2019, **23**(4): 319−331

2 van de Weg G S, Vu H L, Hegyi A, Hoogendoorn S P. A hierarchical control framework for coordination of intersection signal timings in all traffic regimes. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2019, **20**(5): 1815−1827

3 Zhang Y N, Zhou Y H. Distributed coordination control of traffic network flow using adaptive genetic algorithm based on cloud computing. *Journal of Network and Computer Applications*, 2018, **119**: 110−120

4 Zhao Huan. Model-free adaptive control of green light time at single signalized intersection [Master thesis], Beijing Jiaotong University, China, 2009.
(赵欢. 单信号交叉口绿灯时间无模型自适应控制 [硕士学位论文]. 北京交通大学, 中国, 2009.)

5 Hao J G, Hou Z S, Bu X H. The iterative learning approach for vehicle queuing length balanced-control of the signalized isolated intersection. In: Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Yantan, China: IEEE, 2011. 5556−5561

6 Qi Chi, Hou Zhong-Sheng, Jia Yan. Optimal signal timing strategy based on the equilibrium of queue length. *Control and Decision*, 2012, **27**(8): 1191−1194
(齐驰, 侯忠生, 贾琰. 基于排队长度均衡的交叉口信号配时优化策略. 控制与决策, 2012, **27**(8): 1191−1194)

7 Hou Z S, Xu J X, Yan J W. An iterative learning approach for density control of freeway traffic flow via ramp metering. *Transportation Research Part C*, 2008, **16**(1): 71−97

8 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, **1**(2): 123−140

9 Chi Rong-Hu, Hou Zhong-Sheng, Huang Biao. Optimal iterative learning control of batch processes: from model-based to data-driven. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(6): 917−932
(池荣虎, 侯忠生, 黄彪. 间歇过程最优迭代学习控制的发展: 从基于模型到数据驱动. 自动化学报, 2017, **43**(6): 917−932)

10 Hou Z S, Xu J X. Freeway traffic density control using iterative learning control approach. In: Proceedings of the 6th International conference on Intelligent Transportation Systems. Shanghai, China: IEEE, 2003. 1081−1086

11 Hou Zhong-Sheng, Yan Jing-Wen. Model free adaptive control based freeway ramp metering with feedforward iterative learning controller. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(5): 588−595
(侯忠生, 宴静文. 带有迭代学习前馈的快速路无模型自适应入口匝道控制. 自动化学报, 2009, **35**(5): 588−595)

12 Hou Z S, Xu X, Yan J W, Xu J W, Xiong G. A complementary modularized ramp metering approach based on iterative learning control and ALINE. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2011, **12**(4): 1305−1318

13 Hou Z S, Xu X, Yan J W, Xu J W, Li Z J. Modified iterative-learning-control-based ramp metering strategies for freeway traffic control with iteration-dependent factors. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2012, **13**(3): 606−618

14 Zheng Yi-Chen, Zhang Yi, Hu Jian-Ming. Iterative learning based adaptive traffic signal contral. *Journal of Transporation Systems Engineering and Information Technology*, 2010, **10**(6): 34−40
(郑一辰, 张毅, 胡坚明. 一种基于迭代学习的自适应交通信号控制方法. 交通运输系统工程与信息, 2010, **10**(6): 34−40)

15 Huang W, Viti F, Tampère C. An iterative learning approach for signal control in urban traffic networks. In: Proceedings of the 16th Internaing conference on Intelligent Transportation Systems. Hague, the Netherland: IEEE, 2013. 468−473

16 Yan F, Tian F L, Shi Z K. An iterative learning approach for traffic signal control of urban road networks. *IET Control Theory and Applications*, 2017, **11**(4): 466−475

17 Yan F, Tian F L, Shi Z K. An extended signal control strategy for urban network traffic flow. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2016, **445**: 117−127

18 Yan F, Tian F L, Shi Z K. Effects of iterative learning based signal control strategies on macroscopic fundamental diagrams of urban road networks. *International Journal of Modern Physics C*, 2016, **27**(4): 1650045

19 Yan F, Yan G W, Ren M F, Tian J Y, Shi Z K. A novel control strategy for balancing traffic flow in urban traffic network based on iterative learning control. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2018, **508**: 519−531

20 Gazis D C, Potts R B. The oversaturated intersection. In: Pro-

ceedings of the 2nd International Symposium on the Theory of Road Traffic Flow. London, UK: 1963: 231−237

21 Liu Y, Chang G L. An arterial signal optimization model for intersections experiencing queue spillback and lane blockage. *Transportation Research Part C*, 2011, **19**(1): 130−144

22 Sun M X, Wang D W. Initial shift issues on discrete-time iterative learning control with system relative degree. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(1): 144−148

23 Yan Qiu-Zhen, Sun Ming-Xuan, Cai Jian-Ping. Reference-signal rectifying method of iterative learning control. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(8): 1470−1477
(严求真, 孙明轩, 蔡建平. 迭代学习控制的参考信号初始修正方法. 自动化学报, 2017, **43**(8): 1470−1477)

24 Shim J, Yeo J, Lee S, Hamdar S H, Jang K. Empirical evaluation of influential factors on bifurcation in macroscopic fundamental diagrams. *Transportation Research Part C*, 2019, **102**: 509−520

闫 飞 太原理工大学电气与动力工程学院副教授. 主要研究方向为迭代学习控制, 城市交通信号控制, 智能交通系统. 本文通信作者.
E-mail: yanfei@tyut.edu.cn
(**YAN Fei** Associate professor at the College of Electrical and Power Engineering, Taiyuan University of Technology. His research interest covers iterative learning control, urban traffic signal control, and intelligent traffic system. Corresponding author of this paper.)

李 浦 太原理工大学电气与动力工程学院硕士研究生. 主要研究方向为迭代学习控制, 城市交通信号控制.
E-mail: lipu12281@163.com
(**LI Pu** Master student at the College of Electrical and Power Engineering, Taiyuan University of Technology. His research interest covers iterative learning control and urban traffic signal control.)

阎高伟 太原理工大学电气与动力工程学院教授. 主要研究方向为复杂工业控制系统, 智能控制理论及其应用, 智能信息处理.
E-mail: yangaowei@tyut.edu.cn
(**YAN Gao-Wei** Professor at the College of Electrical and Power Engineering, Taiyuan University of Technology. His research interest covers complex industrial control system, intelligent control theory and application, and intelligent information processing.)

任密蜂 太原理工大学电气与动力工程学院副教授. 主要研究方向为随机控制, 性能评价, 故障诊断.
E-mail: renmifeng@126.com
(**REN Mi-Feng** Associate professor at the College of Electrical and Power Engineering, Taiyuan University of Technology. Her research interest covers stochastic control, control performance assessment, and fault diagnosis.)