一类 p 规范型非线性系统预设性能有限时间 H_∞ 跟踪控制

李小华 [1]　胡利耀 [1]

摘　要　针对一类带有外部扰动的非严格反馈 p 规范型非线性系统, 在一种新的预设性能控制思想的基础上, 结合加幂积分技术、H_∞ 控制理论及神经自适应技术, 提出了一种自适应神经预设性能有限时间 H_∞ 跟踪控制器的设计方法. 所设计的控制器能够保证系统的跟踪误差被有限时间性能函数约束, 并在任意给定的停息时间内收敛到平衡点的一个预先给定的邻域内, 且能够抑制外部扰动对系统的影响. 特别地, 该停息时间与系统初始状态无关. 两个仿真例子验证了所设计控制器的有效性和优越性.

关键词　p 规范型非线性系统, 预设性能, 有限时间性能函数, H_∞ 跟踪控制, 神经网络自适应技术

引用格式　李小华, 胡利耀. 一类 p 规范型非线性系统预设性能有限时间 H_∞ 跟踪控制. 自动化学报, 2021, **47**(12): 2870−2880

DOI　10.16383/j.aas.c190116

Prescribed Performance Finite-time H_∞ Tracking Control for a Class of p-normal Form Nonlinear Systems

LI Xiao-Hua[1]　HU Li-Yao[1]

Abstract　Based on a new prescribed performance control thought, a design method of adaptive neural prescribed performance finite-time H_∞ tracking controller is proposed for a class of non-strict feedback p-normal form nonlinear systems with external disturbances by combining the adding a power integer technique, the H_∞ control theory with the neural adaptive technology. The designed controller can guarantee that the tracking error of the system is constrained by a finite-time performance function, and the tracking error can converge to a predetermined neighborhood of the equilibrium within the arbitrarily given settling time. And the impact of external disturbances on the system can be attenuated. Specially, the settling time is irrelevant to the initial states of the system. Two simulation examples show the effectiveness and advantage of the proposed method.

Key words　p-normal form nonlinear systems, prescribed performance, finite-time performance function, H_∞ tracking control, neural network adaptive technology

Citation　Li Xiao-Hua, Hu Li-Yao. Prescribed performance finite-time H_∞ tracking control for a class of p-normal form nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(12): 2870−2880

近几年, 凭借快速的收敛性和较强的鲁棒性, 有限时间控制方法已经成为控制理论研究的热点[1−4], 并且已经获得了许多的研究成果[5−9]. 其中, 有一类文献针对有限时间跟踪控制问题进行了研究[6−9]. 文献 [6] 针对一个五阶移动机器人系统采用 Backstepping技术设计了系统的有限时间跟踪控制器, 使得系统的跟踪误差在有限时间内收敛到平衡点; 文献 [7] 利用加幂积分技术, 研究了空间飞行器的有限时间跟踪控制问题; 在文献 [8] 中, 作者利用齐次域方法, 解决了四旋翼飞行器的有限时间跟踪控制问题. 但是对于 p 规范型非线性系统, 很少有文章研究其有限时间跟踪控制问题. 经查找仅有文献 [9] 结合加幂积分技术和凸组合方法, 针对一类切换 p 规范型非线性系统设计了一个状态反馈跟踪控制器, 该跟踪控制器能够保证系统的跟踪误差在有限时间内收敛到平衡点的小的邻域内. 但是上述方法均不能保证系统跟踪误差的整个暂态过程被限制在一个给定的范围内, 而跟踪误差波动太大对实际系统而有一定风险的. 并且, 大多数文献中的系统停息时间均与初始状态有关.

因为预设性能控制方法能够同时兼顾到系统的暂态和稳态性能[10], 所以国内外许多专家学者对此进行了大量的研究[11−13]. 然而, 目前大多数关于预设性能的控制方法均存在一个共性问题, 即在对系统进行误差转换时已设定了该误差的有界性, 然后再去证明它的有界性[10−13], 这是不合理的. 而文献 [14] 提出一种新的误差转换函数, 在解决预设性能控制问题时不需要提前设定误差的有界性, 从而避免了该共性问题. 但该方法只能保证系统在 $t \to \infty$ 时系统状态误差收敛到平衡点的一个小的邻域内, 对于解决一类对收敛时间要求较高的控制问题时不太理想. 为此, 文献 [15] 将预设性能控制方法和有限时间控制方法相结合, 提出了一种有限时间性能函数, 并利用所提出的性能函数, 设计了一类非严格反馈非线性系统的有限时间跟踪控制器, 该控制器能够保证系统的跟踪误差在任意给定的时间内收敛到平衡点的一个预先给定的邻域内, 并且停息时间与系统的初始状态无关. 然而, 该设计方法仍然存在预设性能的共性问题. 并且文献 [14−15] 只考虑了系统的幂 $p = 1$ 的情况. 而我们知道, 许多实际的系统是 p 规范型形式的非线性系统, 其系统的幂 $p \neq 1$, 例如欠驱动弱耦合的机械系统[16] 等等, 文献 [14−15] 给出的方法不能直接用于这类 p 规范型系统中, 且它们也没有考虑外部扰动对系统的影响.

对于系统的外部扰动可以采用 H_∞ 控制方法来抑制其影响. 该方面的成果已有许多[17−22]. 其中有一些成果是针对于非线性系统的 H_∞ 控制问题[19−22]. 特别有文献 [22] 对一类严格反馈非线性系统设计了有限时间 H_∞ 控制器, 但该 H_∞ 控制器是在系统为渐近稳定的前提下得到的, 对于只能满足有界稳定的系统, 该设计方法是失效的. 应该说明的是, 目前还没有关于 p 规范型非线性系统的 H_∞ 控制的研究报道.

本文基于预设性能控制方法, 结合加幂积分技术、H_∞ 控制方法以及神经网络自适应技术, 针对于一类带有外部扰动的非严格反馈 p 规范型非线性系统设计了一个自适应神经预设性能有限时间 H_∞ 控制器, 该控制器能够保证被控系统的跟踪误差在任意给定的停息时间内收敛到平衡点的一个预先给定的邻域内, 系统是实际有限时间稳定的, 并且跟踪误差始终在有限时间性能函数约束的范围内, 同时外部扰动对系统的影响能够被抑制.

收稿日期 2019-02-27　录用日期 2019-06-17
Manuscript received February 27, 2019; accepted June 17, 2019
国家自然科学基金 (61403177), 辽宁省科技厅自然科学基金 (20180550319), 辽宁科技大学研究生教育改革和科技创新项目 (LKDYC201812) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61403177), Natural Science Fund Project of Liaoning Province (20180550319), and Graduate Education Reform and Science Technology Innovation Project of University of Science and Technology Liaoning (LKDYC201812)
本文责任编委 季海波
Recommended by Associate Editor JI Hai-Bo
1. 辽宁科技大学电子与信息工程学院 鞍山 114051
1. School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051

本文的主要贡献为: 1) 首次考虑了一类带有外部扰动的非严格反馈 p 规范型非线性系统的预设性能有限时间 H_∞ 控制问题, 并且首次将有限时间性能函数和加幂积分器技术相结合; 2) 由于外部扰动及系统的高次幂的影响, 文献 [14] 中所提出的预设性能方法并不能直接应用. 为了避免预设性能控制方法存在的共性问题, 本文基于文献 [14] 中的思想, 提出一种新的预设性能控制器的设计方法. 该方法亦避免了该共性问题; 3) 不同于文献 [22], 本文解决了非线性系统为有界稳定时设计 H_∞ 控制器的困难; 4) 与文献 [14−15] 相比, 系统的幂 p 被放宽到奇整数之比的形式; 并且考虑了系统带有外部扰动的情况.

1　问题描述和预备知识

1.1　系统描述

本文考虑如下一类非严格反馈 p 规范型非线性系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_i = g_i(\boldsymbol{x})\, x_{i+1}^{p_i} + f_i(\boldsymbol{x}) + \varphi_i(\boldsymbol{x})\, w_i(t), \\ \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ \dot{x}_n = g_n(\boldsymbol{x})\, u + f_n(\boldsymbol{x}) + \varphi_n(\boldsymbol{x})\, w_n(t) \\ y = x_1\end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态向量; $y \in \mathbf{R}$ 是系统的输出; $u \in \mathbf{R}$ 为系统控制输入. $g_i(\boldsymbol{x})$, $f_i(\boldsymbol{x})$ 和 $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ 为未知的 C^1 函数; $w_i(t) \in L_2[0, T]$ 为非零外部扰动; 系统的幂 $p_i \geq 1$ 为两个奇整数之比的形式. 该系统满足如下假设:

假设 1. 系统 (1) 中函数 $g_i(\boldsymbol{x})\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的函数符号已知, 并且存在未知正常数 b 使得 $b \leq |g_i(\boldsymbol{x})| < \infty$. 不失一般性, 假设 $g_i(\boldsymbol{x}) > 0$. 因此 $b \leq g_i(\boldsymbol{x}) < \infty$.

本文考虑系统的跟踪控制, 要求被跟踪信号 $y_d(t)$ 满足:

假设 2. 被跟踪的信号 $y_d(t)$ 及其 k 阶导数 $y_d^{(k)}(t)$ 连续且有界, $k = 1, 2, \cdots, n$.

1.2　预备知识

为了得到主要的结果, 下面给出一些有用的引理与定义.

引理 1[19]**.** 对于任意的实数 $\varepsilon > 0$, 下面不等式成立:

$$xy \leq \frac{\varepsilon^s}{s}|x|^s + \frac{1}{q\varepsilon^q}|y|^q, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

其中, 常数 $s > 1$, $q > 1$ 并且满足 $(s-1)(q-1) = 1$.

引理 2[23]**.** 对于 x_i, $i = 1, \cdots, n$ 和实数 $0 < \ell < 1$, 有下面的不等式成立:

$$(|x_1| + \cdots + |x_n|)^\ell \leq |x_1|^\ell + \cdots + |x_n|^\ell \tag{2}$$

若 $0 < \ell = \ell_1/\ell_2 \leq 1$, 其中 $\ell_1 > 0$ 和 $\ell_2 > 0$ 均为奇整数, 则

$$\left|x^\ell - y^\ell\right| \leq 2^{1-\ell}|x - y|^\ell \tag{3}$$

其中, x 和 y 为任意实数.

在本文中, 采用径向基函数神经网络 (Radial basis function neural network , RBFNN) 在线逼近未知非线性函数 $f(\boldsymbol{Z})$. 即

$$f(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Z}) \tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{Z} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m$ 为输入向量; m 为输入维数; $\boldsymbol{\vartheta} = [\bar{\vartheta}_1, \cdots, \bar{\vartheta}_l]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^l$ 是神经网络的权向量; $l > 1$ 是神经网络节点数; $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Z}) = [s_1(\boldsymbol{Z}), \cdots, s_l(\boldsymbol{Z})]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^l$ 是基函数向量, $s_i(\boldsymbol{Z})$ 被选为高斯函数. 即

$$s_i(\boldsymbol{Z}) = \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\sigma}_i)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\sigma}_i)}{\kappa_i^2}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, l$$

其中, σ_i 为基函数的中心, κ_i 为高斯函数的宽度. 我们知道, 只要采用足够多的节点数 l, RBFNN 能够逼近在紧集 $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ 上的任意连续函数 $f(\boldsymbol{Z})$[24]. 即

$$f(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{\vartheta}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Z}) + \delta(\boldsymbol{Z}), \quad \forall \boldsymbol{Z} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m \tag{5}$$

其中, $\boldsymbol{\vartheta}^{*\mathrm{T}}$ 为理想的常数权向量, 定义为

$$\boldsymbol{\vartheta}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbf{R}^l}\left\{\sup_{\boldsymbol{Z} \in \Omega}\left|f(\boldsymbol{Z}) - \boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Z})\right|\right\} \tag{6}$$

$\delta(\boldsymbol{Z})$ 是逼近误差且满足 $|\delta| \leq \delta^*$, 其中, δ^* 为有界正常数.

引理 3[25]**.** 对于任意的正整数 r, n 及神经网络中的基函数 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Z}) = [s_1(\boldsymbol{Z}), \cdots, s_l(\boldsymbol{Z})]^{\mathrm{T}}$, 不等式 (7) 成立.

$$\left\|\boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{Z}}\right)\right\|^2 \leq \|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Z}_r)\|^2 \tag{7}$$

其中, $r \leq n$, $\hat{\boldsymbol{Z}} = [z_1, \cdots, z_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{Z}_r = [z_1, \cdots, z_r]^{\mathrm{T}}$ 为输入向量.

引理 4 (Gronwall 不等式)[26]**.** 假设 $x(t)$, $F(t)$ 和 $\chi(t) \geq 0$ 是定义在 $t \in [a, b]$ 上的连续实值函数. 如果不等式

$$x(t) \leq F(t) + \int_a^t \chi(s)\, x(s)\, \mathrm{d}s \tag{8}$$

成立, 则有

$$x(t) \leq F(t) + \int_a^t \chi(s)\, F(s)\, \mathrm{e}^{\int_s^t \chi(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s \tag{9}$$

定义 1[15]**.** 考虑以下非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{x}$ 是状态向量; $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbf{R}^n$ 是一个在原点的开邻域 Ω 上连续的函数, 并且满足 $\boldsymbol{h}(0) = 0$. 如果当 $t \geq T(\boldsymbol{x}_0)$ 时, 对任意的初始条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ 都有 $\|\boldsymbol{x}\| \leq \epsilon$, 其中 $\epsilon > 0$ 是一个常数, $0 < T(\boldsymbol{x}_0) < \infty$ 表示该系统的停息时间. 则系统 (10) 是实际有限时间稳定的.

注 1. 本文的停息时间与系统初始状态无关.

定义 2. 对于非线性系统 (1), 如果满足: 1) 对于任意的初始状态, 存在一个 Lyapunov 函数 $V > 0$ 满足 $\dot{V} \leq -\zeta V + \bar{\Theta}$; 2) 不等式 (11) 成立

$$d(\boldsymbol{x}_0) + \gamma^2\int_0^t \|\boldsymbol{w}(s)\|^2\,\mathrm{d}s \geq \int_0^t \|e_1(s)\|^2\,\mathrm{d}s \tag{11}$$

则称系统 (1) 满足有界 H_∞ 性能指标. 其中, ζ, $\bar{\Theta}$ 均为正实数; $e_1(t) = y(t) - y_d(t)$ 表示系统跟踪误差, $d(\boldsymbol{x}_0)$ 是一个正数, $\boldsymbol{w}(t) \in L_2[0, T]$ 是非零外部扰动, γ 为给定的干扰抑制系数.

定义 3[15]**.** 如果光滑函数 $\alpha(t)$ 满足: 1) $\alpha(t) > 0$; 2) $\dot{\alpha}(t) \leq 0$; 3) $\lim_{t \to T_f}\alpha(t) = \alpha_{T_f}$; 4) 当 $t \geq T_f$ 时, $\alpha(t) = \alpha_{T_f}$, 则称其为有限时间性能函数, 其中, α_{T_f} 和 T_f 为任意的正实数.

在本文中, 有限时间性能函数被选择为

$$\alpha(t)=\begin{cases}\left(\alpha_0-\dfrac{t}{T_f}\right)\mathrm{e}^{\left(1-\frac{T_f}{T_f-t}\right)}+\alpha_{T_f}, & t\in[0,T_f)\\ \alpha_{T_f}, & t\in[T_f,+\infty)\end{cases}\tag{12}$$

其中, $\alpha_0\geq 1$, $\alpha_{T_f}>0$ 和 $T_f>0$ 均为设计参数. 并且 $\alpha(t)$ 的初始值为 $\alpha(0)=\alpha_0+\alpha_{T_f}$. 易知, 该有限时间性能函数 (12) 满足定义 3. 其光滑性的证明见文献 [15].

这里借用文献 [14] 中的思想定义误差转换函数为

$$Q=\frac{\dfrac{\pi}{2}\tan\left(\dfrac{\pi e_1}{2\alpha}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi e_1}{2\alpha}\right)}\tag{13}$$

本文的控制目标为: 针对 p 规范型非线性系统 (1) 设计一个自适应神经预设性能有限时间 H_∞ 跟踪控制器, 使得当 $|e_1(0)|<\alpha(0)$ 时, 该控制器能够保证系统的跟踪误差 $e_1(t)=y(t)-y_d(t)$ 被约束在有限时间性能函数 $(-\alpha(t),\alpha(t))$ 内, 并能够在任意给定的停息时间内收敛到平衡点附近预先给定的邻域内, 且闭环系统 (1) 的所有信号是实际有限时间稳定的; 外部扰动对系统性能的影响能够得到抑制.

为了简化推导过程, 本文将函数 $g_i(\boldsymbol{x})$, $f_i(\boldsymbol{x})$, $\varphi_i(\boldsymbol{x})$, $w_i(t)$ 以及一些相关的函数简写为 g_i, f_i, φ_i, w_i.

2 主要结果

下面将根据控制目标对系统 (1) 设计一个自适应神经预设性能有限时间 H_∞ 跟踪控制器.

首先, 给出一系列坐标变换

$$\begin{aligned}&x_1^{*p_0}=0\\&\xi_1=\tan\left(\frac{\pi e_1}{2\alpha}\right)^{p_0}-x_1^{*p_0}=\tan\left(\frac{\pi e_1}{2\alpha}\right)\\&\xi_2=x_2^{p_1}-x_2^{*p_1}\\&\qquad\vdots\\&\xi_n=x_n^{p_{n-1}}-x_n^{*p_{n-1}}\\&u=x_{n+1}^{*p_n}\end{aligned}\tag{14}$$

其中, $p_0=1$, $p_n=1$, p_i $(i=1,\cdots,n-1)$ 是系统 (1) 的幂; $x_{i+1}^{*p_i}$ 是虚拟控制律 $(i=1,\cdots,n-1)$ 及控制律 $(i=n)$, 它是关于变量 $(\bar{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}},\alpha,\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(i)},y_d,y_d^{(1)},\cdots,y_d^{(i)},\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_i)$ 的 C^1 函数, 这里 $\hat{\theta}_i$ 是未知参数 θ_i 的估计值, 并且 θ_i 定义为

$$\theta_i=\frac{1}{b}\left\|\boldsymbol{\vartheta}_i^{\mathrm{T}}\right\|^2,\quad i=1,\cdots,n\tag{15}$$

估计误差为 $\tilde{\theta}_i=\theta_i-\hat{\theta}_i$.

第 1 步. 选择 Lyapunov 函数为

$$V_1=\frac{1}{2}\xi_1^2+\frac{b}{2\beta_1}\tilde{\theta}_1^2\tag{16}$$

其中, $\beta_1>0$ 为设计参数. 考虑式 (13) 和式 (14), 对 V_1 求导, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1=&\xi_1\dot{\xi}_1-\frac{b}{\beta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1=\\&Q\left(\frac{\dot{e}_1\alpha-e_1\dot{\alpha}}{\alpha^2}\right)-\frac{b}{\beta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1=\\&\frac{Q}{\alpha}\left(g_1x_2^{p_1}+f_1+\varphi_1w_1-\dot{y}_d-\frac{e_1\dot{\alpha}}{\alpha}\right)-\\&\frac{b}{\beta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1=\\&\frac{Q}{\alpha}g_1\left(x_2^{p_1}-x_2^{*p_1}\right)+\frac{Q}{\alpha}g_1x_2^{*p_1}+\\&\frac{Q}{\alpha}\left(f_1-\dot{y}_d-\frac{e_1\dot{\alpha}}{\alpha}\right)+\frac{Q}{\alpha}\varphi_1w_1-\frac{b}{\beta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1=\\&\frac{Q}{\alpha}g_1x_2^{*p_1}+\frac{Q}{\alpha}\left(g_1\xi_2+f_1-\dot{y}_d-\frac{e_1\dot{\alpha}}{\alpha}\right)+\\&\frac{Q}{\alpha}\varphi_1w_1-\frac{b}{\beta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1\end{aligned}\tag{17}$$

根据引理 1 有

$$\frac{Q}{\alpha}\varphi_1w_1\leq\frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\frac{Q^2}{\alpha^2}\varphi_1^2+\bar{\gamma}^2w_1^2\tag{18}$$

其中, $\bar{\gamma}>0$ 为设计参数. 将式 (18) 代入式 (17), 易得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1\leq&\frac{Q}{\alpha}g_1x_2^{*p_1}+\frac{Q}{\alpha}[g_1\xi_2+f_1-\dot{y}_d-\frac{e_1\dot{\alpha}}{\alpha}+\\&\frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\frac{Q}{\alpha}\varphi_1^2-kg_1Q+\frac{4c}{\pi^2}\alpha Q\cos^4\left(\frac{\pi e_1}{2\alpha}\right)+\\&\frac{4}{\pi^2}\alpha Q\cos^4\left(\frac{\pi e_1}{2\alpha}\right)]-\frac{b}{\beta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1+\bar{\gamma}^2w_1^2+\\&kg_1\frac{Q^2}{\alpha}-c\xi_1^2-\xi_1^2=\\&\frac{Q}{\alpha}g_1x_2^{*p_1}+\frac{Q}{\alpha}\Phi_1-\frac{b}{\beta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1+\bar{\gamma}^2w_1^2+\\&kg_1\frac{Q^2}{\alpha}-c\xi_1^2-\xi_1^2\end{aligned}\tag{19}$$

其中, c 为任意正实数, $k>0$ 为设计参数, 函数 $\Phi_1=g_1\xi_2+f_1-\dot{y}_d-\dfrac{e_1\dot{\alpha}}{\alpha}+\dfrac{1}{4\bar{\gamma}^2}\dfrac{Q}{\alpha}\varphi_1^2-kg_1Q+\dfrac{4c}{\pi^2}\alpha Q\cos^4(\dfrac{\pi e_1}{2\alpha})+\dfrac{4}{\pi^2}\alpha Q\cos^4(\dfrac{\pi e_1}{2\alpha})$.

因为函数 Φ_1 中包含有未知连续函数, 所以这里使用神经网络对其进行估计. 根据式 (5), 有

$$\Phi_1=\boldsymbol{\vartheta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_1\right)+\delta_1\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_1\right),\left|\delta_1\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_1\right)\right|\leq\delta_1^*\tag{20}$$

利用引理 1 和引理 3, 有

$$\frac{Q}{\alpha}\Phi_1=\frac{Q}{\alpha}\frac{\boldsymbol{\vartheta}_1^{\mathrm{T}}}{\left\|\boldsymbol{\vartheta}_1^{\mathrm{T}}\right\|}\boldsymbol{S}_1\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_1\right)\left\|\boldsymbol{\vartheta}_1^{\mathrm{T}}\right\|+\frac{Q}{\alpha}\delta_1\leq$$

$$\frac{b}{2\lambda_1^2}\frac{Q^2}{\alpha^2}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_1\right)\boldsymbol{S}_1\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_1\right)\theta_1+\frac{1}{2}\lambda_1^2+$$

$$\frac{b}{2\bar{\gamma}^2}\frac{Q^2}{\alpha^2}+\frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_1^{*2}\leq$$

$$\frac{b}{2\lambda_1^2}\frac{Q^2}{\alpha^2}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_1\right)\boldsymbol{S}_1\left(\boldsymbol{Z}_1\right)\theta_1+\frac{b}{2\bar{\gamma}^2}\frac{Q^2}{\alpha^2}+$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1^2+\frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_1^{*2}\tag{21}$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{Z}}_1=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\hat{\theta}_1,\alpha,\alpha^{(1)},y_d,y_d^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Z}_1=\left[x_1,\hat{\theta}_1,\alpha,\alpha^{(1)},y_d,y_d^{(1)}\right]^{\mathrm{T}}$$

$\lambda_1>0$ 为设计参数.

将式 (21) 代入式 (19) 并整理, 有

$$\dot{V}_1\leq\frac{Q}{\alpha}[g_1x_2^{*p_1}+\frac{b}{2\lambda_1^2}\frac{Q}{\alpha}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_1\right)\boldsymbol{S}_1\left(\boldsymbol{Z}_1\right)\hat{\theta}_1+$$

$$\frac{b}{2\bar{\gamma}^2}\frac{Q}{\alpha}+kg_1Q]-$$

$$\frac{b}{\beta_1}\tilde{\theta}_1\left(\dot{\hat{\theta}}_1-\frac{\beta_1}{2\lambda_1^2}\frac{Q^2}{\alpha^2}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_1\right)\boldsymbol{S}_1\left(\boldsymbol{Z}_1\right)\right)+$$

$$\bar{\gamma}^2w_1^2-c\xi_1^2-\xi_1^2+\frac{1}{2}\lambda_1^2+\frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_1^{*2}\tag{22}$$

选择虚拟控制律 $x_2^{*p_1}$ 和自适应律 $\dot{\hat{\theta}}_1$ 为

$$x_2^{*p_1}=-\frac{1}{2\lambda_1^2}\frac{Q}{\alpha}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_1\right)\boldsymbol{S}_1\left(\boldsymbol{Z}_1\right)\hat{\theta}_1-\frac{1}{2\bar{\gamma}^2}\frac{Q}{\alpha}-kQ\tag{23}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1=\frac{\beta_1}{2\lambda_1^2}\frac{Q^2}{\alpha^2}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_1\right)\boldsymbol{S}_1\left(\boldsymbol{Z}_1\right)-h\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_1\left(0\right)\geq0\tag{24}$$

其中, $h>0$ 是一个设计参数. 则式 (22) 能够改写为

$$\dot{V}_1\leq-c\xi_1^2-\xi_1^2+h\frac{b}{\beta_1}\tilde{\theta}_1\hat{\theta}_1+\bar{\gamma}^2w_1^2+$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1^2+\frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_1^{*2}\tag{25}$$

为了使后面的推导更易于表达, 将式 (16) 改写为

$$V_1\leq2\xi_1^2+\frac{b}{2\beta_1}\tilde{\theta}_1^2\tag{26}$$

第 i ($2\leq i\leq n-1$) 步. 选择 Lyapunov 函数为

$$V_i=W_i+\frac{b}{2\beta_i}\tilde{\theta}_i^2\geq0\tag{27}$$

其中,

$$W_i=\int_{x_i^*}^{x_i}\left(s^{p_{i-1}}-x_i^{*p_{i-1}}\right)^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\mathrm{d}s\tag{28}$$

$\beta_i>0$ 为设计参数.

根据式 (14), 式 (27), 式 (28) 及引理 2, 易有式 (29)~(34) 成立.

$$V_i\leq\int_{x_i^*}^{x_i}\left(x_i^{p_{i-1}}-x_i^{*p_{i-1}}\right)^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\mathrm{d}s+\frac{b}{2\beta_i}\tilde{\theta}_i^2\leq$$

$$\left|\xi_i\right|^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\left|\left(x_i^{p_{i-1}}\right)^{\frac{1}{p_{i-1}}}-\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)^{\frac{1}{p_{i-1}}}\right|+$$

$$\frac{b}{2\beta_i}\tilde{\theta}_i^2\leq$$

$$\left|\xi_i\right|^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}2^{1-\frac{1}{p_{i-1}}}\left|\xi_i\right|^{\frac{1}{p_{i-1}}}+\frac{b}{2\beta_i}\tilde{\theta}_i^2\leq$$

$$2\xi_i^2+\frac{b}{2\beta_i}\tilde{\theta}_i^2\tag{29}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial x_i}=\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\tag{30}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial x_j}=-\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial x_j}\times$$

$$\int_{x_i^*}^{x_i}\left(s^{p_{i-1}}-x_i^{*p_{i-1}}\right)^{1-\frac{1}{p_{i-1}}}\mathrm{d}s,$$

$$1\leq j\leq i-1\tag{31}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial y_d^{(m)}}=-\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial y_d^{(m)}}\times$$

$$\int_{x_i^*}^{x_i}\left(s^{p_{i-1}}-x_i^{*p_{i-1}}\right)^{1-\frac{1}{p_{i-1}}}\mathrm{d}s,$$

$$0\leq m\leq i-1\tag{32}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial\alpha^{(m)}}=-\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial\alpha^{(m)}}\times$$

$$\int_{x_i^*}^{x_i}\left(s^{p_{i-1}}-x_i^{*p_{i-1}}\right)^{1-\frac{1}{p_{i-1}}}\mathrm{d}s,$$

$$0\leq m\leq i-1\tag{33}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial\hat{\theta}_j}=-\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial\hat{\theta}_j}\times$$

$$\int_{x_i^*}^{x_i}\left(s^{p_{i-1}}-x_i^{*p_{i-1}}\right)^{1-\frac{1}{p_{i-1}}}\mathrm{d}s,$$

$$1\leq j\leq i-1\tag{34}$$

因为式 (30)~(34) 的证明过程是容易的, 限于篇幅, 此处省略.

根据引理 2 与式 (14), 有

$$\int_{x_i^*}^{x_i}\left(s^{p_{i-1}}-x_i^{*p_{i-1}}\right)^{1-\frac{1}{p_{i-1}}}\mathrm{d}s\leq$$

$$|\xi_i|^{1-\frac{1}{p_{i-1}}}\left|\left(x_i^{p_{i-1}}\right)^{\frac{1}{p_{i-1}}}-\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)^{\frac{1}{p_{i-1}}}\right|\leq$$

$$2^{1-\frac{1}{p_{i-1}}}|\xi_i|\leq 2|\xi_i| \tag{35}$$

因此, 式 (31)~(34) 能够改写为

$$\left|\frac{\partial W_i}{\partial x_j}\right|\leq 4|\xi_i|\left|\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial x_j}\right| \tag{36}$$

$$\left|\frac{\partial W_i}{\partial y_d^{(m)}}\right|\leq 4|\xi_i|\left|\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial y_d^{(m)}}\right| \tag{37}$$

$$\left|\frac{\partial W_i}{\partial \alpha^{(m)}}\right|\leq 4|\xi_i|\left|\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial \alpha^{(m)}}\right| \tag{38}$$

$$\left|\frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}_j}\right|\leq 4|\xi_i|\left|\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial \hat{\theta}_j}\right| \tag{39}$$

对 V_i 求导并且考虑 $\dfrac{\partial W_i}{\partial x_i}=\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}$ 和 $\xi_{i+1}=x_{i+1}^{p_i}-x_{i+1}^{*p_i}$, 有

$$\dot{V}_i=g_i\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\left(x_{i+1}^{p_i}-x_{i+1}^{*p_i}\right)+g_i\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}x_{i+1}^{*p_i}+$$

$$\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}f_i+\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\varphi_i w_i+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial x_j}\dot{x}_j+$$

$$\sum_{m=0}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial y_d^{(m)}}y_d^{(m+1)}+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha^{(m)}}\alpha^{(m+1)}+$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j-\frac{b}{\beta_i}\tilde{\theta}_i\dot{\hat{\theta}}_i=$$

$$g_i\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}x_{i+1}^{*p_i}+g_i\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\xi_{i+1}+\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}f_i+$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial x_j}\left(g_j x_{j+1}^{p_j}+f_j\right)+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial y_d^{(m)}}y_d^{(m+1)}+$$

$$\sum_{m=0}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha^{(m)}}\alpha^{(m+1)}+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j+$$

$$\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\varphi_i w_i+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial x_j}\varphi_j w_j-\frac{b}{\beta_i}\tilde{\theta}_i\dot{\hat{\theta}}_i \tag{40}$$

下面分别对式 (40) 中一些项进行处理. 根据式 (36) 及引理 1, 易得

$$\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial x_j}\left(g_j x_{j+1}^{p_j}+f_j\right)\leq$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}|\xi_i|\left|4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial x_j}\left(g_j x_{j+1}^{p_j}+f_j\right)\right|\times 1\leq$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^2\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial x_j}\left(g_j x_{j+1}^{p_j}+f_j\right)\right)^2+$$

$$\frac{i-1}{2} \tag{41}$$

类似地, 根据式 (37)~(39) 及引理 1, 可得

$$\sum_{m=0}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial y_d^{(m)}}y_d^{(m+1)}\leq$$

$$\sum_{m=0}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^2\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial y_d^{(m)}}y_d^{(m+1)}\right)^2+\frac{i}{2} \tag{42}$$

$$\sum_{m=0}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha^{(m)}}\alpha^{(m+1)}\leq$$

$$\sum_{m=0}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^2\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial \alpha^{(m)}}\alpha^{(m+1)}\right)^2+\frac{i}{2} \tag{43}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j\leq$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^2\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial \hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j\right)^2+\frac{i-1}{2} \tag{44}$$

同理, 根据式 (36) 以及引理 1, 易得知 $\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\varphi_i+\sum_{j=1}^{i-1}\dfrac{\partial W_i}{\partial x_j}\varphi_j w_j$ 满足不等式

$$\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\varphi_i\times w_i+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial W_i}{\partial x_j}\varphi_j\times w_j\leq$$

$$\frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\xi_i^{2\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)}\varphi_i^2+\frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\xi_i^2\sum_{j=1}^{i-1}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial x_j}\right)^2\times$$

$$\varphi_j^2+\sum_{j=1}^{i}\bar{\gamma}^2 w_j^2 \tag{45}$$

将式 (41)~(45) 代入式 (40) 并整理, 有

$$\dot{V}_i \le g_i\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}x_{i+1}^{*p_i}+\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\Bigg[g_i\xi_{i+1}+f_i+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial x_j}\left(g_jx_{j+1}^{p_j}+f_j\right)\right)^2+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial y_d^{(m)}}y_d^{(m+1)}\right)^2+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial\alpha^{(m)}}\alpha^{(m+1)}\right)^2+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial\hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j\right)^2+\frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\varphi_i^2+\frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\times\sum_{j=1}^{i-1}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial x_j}\right)^2\varphi_j^2-kg_i\xi_i^{2+\frac{1}{p_{i-1}}}+c\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\Bigg]-\frac{b}{\beta_i}\tilde{\theta}_i\dot{\hat{\theta}}_i+2i-1+\sum_{j=1}^{i}\bar{\gamma}^2w_j^2+kg_i\xi_i^4-c{\xi_i}^2=g_i\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}x_{i+1}^{*p_i}+\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\Phi_i-\frac{b}{\beta_i}\tilde{\theta}_i\dot{\hat{\theta}}_i+2i-1+\sum_{j=1}^{i}\bar{\gamma}^2w_j^2+kg_i\xi_i^4-c\xi_i^2 \quad (46)$$

其中,

$$\Phi_i=g_i\xi_{i+1}+f_i+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\left(4\left(g_jx_{j+1}^{p_j}+f_j\right)\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial x_j}\right)^2+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial y_d^{(m)}}y_d^{(m+1)}\right)^2+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial\alpha^{(m)}}\alpha^{(m+1)}\right)^2+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial\hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j\right)^2+\frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\varphi_i^2+\frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}\sum_{j=1}^{i-1}\left(4\frac{\partial\left(x_i^{*p_{i-1}}\right)}{\partial x_j}\right)^2\varphi_j^2-kg_i\xi_i^{2+\frac{1}{p_{i-1}}}+c\xi_i^{\frac{1}{p_{i-1}}}$$

因为 Φ_i 为未知连续函数, 所以利用神经网络对其进行估计. 类似于式 (20) 和式 (21), 利用引理 1、引理 3 和式 (5), 有

$$\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\Phi_i\le\frac{b}{2\lambda_i^2}\xi_i^{2\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)}\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_i\right)\boldsymbol{S}_i\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_i\right)\theta_i+\frac{1}{2}\lambda_i^2+\frac{b}{2\bar{\gamma}^2}\xi_i^{2\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)}+\frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_i^{*2}\le\frac{b}{2\lambda_i^2}\xi_i^{2\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)}\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_i\right)\boldsymbol{S}_i\left(\boldsymbol{Z}_i\right)\theta_i+\frac{b}{2\bar{\gamma}^2}\xi_i^{2\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)}+\frac{1}{2}\lambda_i^2+\frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_i^{*2} \quad (47)$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{Z}}_i=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_i,\alpha,\cdots,\alpha^{(i)},y_d,\cdots,y_d^{(i)}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Z}_i=\left[\bar{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}},\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_i,\alpha,\cdots,\alpha^{(i)},y_d,\cdots,y_d^{(i)}\right]^{\mathrm{T}}$$

$\lambda_i>0$ 为设计参数.

将式 (47) 代入式 (46), 有

$$\dot{V}_i=-c\xi_i^2+\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\Bigg[g_ix_{i+1}^{*p_i}+\frac{b}{2\lambda_i^2}\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_i\right)\boldsymbol{S}_i\left(\boldsymbol{Z}_i\right)\hat{\theta}_i+\frac{b}{2\bar{\gamma}^2}\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}+kg_i\xi_i^{2+\frac{1}{p_{i-1}}}\Bigg]-\frac{b}{\beta_i}\tilde{\theta}_i\left(\dot{\hat{\theta}}_i-\frac{\beta_i}{2\lambda_i^2}\xi_i^{2\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)}\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_i\right)\boldsymbol{S}_i\left(\boldsymbol{Z}_i\right)\right)+\frac{1}{2}\lambda_i^2+\frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_i^{*2}+2i-1+\sum_{j=1}^{i}\bar{\gamma}^2w_j^2$$

选择虚拟控制律 $x_{i+1}^{*p_i}$ 和自适应律 $\dot{\hat{\theta}}_i$ 分别为

$$x_{i+1}^{*p_i}=-\frac{1}{2\lambda_i^2}\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_i\right)\boldsymbol{S}_i\left(\boldsymbol{Z}_i\right)\hat{\theta}_i-\frac{1}{2\bar{\gamma}^2}\xi_i^{2-\frac{1}{p_{i-1}}}-k\xi_i^{2+\frac{1}{p_{i-1}}} \quad (48)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i=\frac{\beta_i}{2\lambda_i^2}\xi_i^{2\left(2-\frac{1}{p_{i-1}}\right)}\boldsymbol{S}_i^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Z}_i\right)\boldsymbol{S}_i\left(\boldsymbol{Z}_i\right)-h\hat{\theta}_i,\ \hat{\theta}_i\left(0\right)\ge0 \quad (49)$$

则

$$\dot{V}_i\le-c\xi_i^2+h\frac{b}{\beta_i}\tilde{\theta}_i\hat{\theta}_i+\frac{1}{2}\lambda_i^2+\frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_i^{*2}+2i-1+\sum_{j=1}^{i}\bar{\gamma}^2w_j^2 \quad (50)$$

第 n 步. 选择新的 Lyapunov 函数为

$$V_n=W_n+\frac{b}{2\beta_n}\tilde{\theta}_n^2+\varepsilon>0 \quad (51)$$

其中,

$$W_n = \int_{x_n^*}^{x_n} \left(s^{p_{n-1}} - x_n^{*p_{n-1}}\right)^{2-\frac{1}{p_{n-1}}} \mathrm{d}s \tag{52}$$

$\beta_n > 0$ 为设计参数; $\varepsilon > 0$ 为实数.

注 2. 特别地, 在 Lyapunov 函数选择中加入 ε 是为了确保 $V_n > 0$ 恒成立, 其目的是为了便于证明 H_∞ 性能指标. 它只是一个辅助参数, 并不参与最终控制器的设计, 因此其具体值并不需要知道.

类似于第 i 步, 有

$$V_n \le 2\xi_n^2 + \frac{b}{2\beta_n}\tilde{\theta}_n^2 + \varepsilon \tag{53}$$

$$\dot{V}_n \le g_n \xi_n^{2-\frac{1}{p_{n-1}}} u + \xi_n^{2-\frac{1}{p_{n-1}}} \Phi_n - c\xi_n^2 + k g_n \xi_n^4 + \sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}^2 w_j^2 + 2n - 1 - \frac{b}{\beta_n}\tilde{\theta}_n \dot{\hat{\theta}}_n \tag{54}$$

其中,

$$\begin{aligned}\Phi_n = {} & f_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2}\xi_n^{\frac{1}{p_{n-1}}} \left(4\left(g_j x_{j+1}^{p_j} + f_j\right)\frac{\partial\left(x_n^{*p_{n-1}}\right)}{\partial x_j}\right)^2 + \\ & \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2}\xi_n^{\frac{1}{p_{n-1}}} \left(4\frac{\partial\left(x_n^{*p_{n-1}}\right)}{\partial y_d^{(m)}} y_d^{(m+1)}\right)^2 + \\ & \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2}\xi_n^{\frac{1}{p_{n-1}}} \left(4\frac{\partial\left(x_n^{*p_{n-1}}\right)}{\partial \alpha^{(m)}} \alpha^{(m+1)}\right)^2 + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2}\xi_n^{\frac{1}{p_{n-1}}} \left(4\frac{\partial\left(x_n^{*p_{n-1}}\right)}{\partial \hat{\theta}_j} \dot{\hat{\theta}}_j\right)^2 + \\ & \frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\xi_n^{2-\frac{1}{p_{n-1}}}\varphi_n^2 + \frac{1}{4\bar{\gamma}^2}\xi_n^{\frac{1}{p_{n-1}}} \times \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \left(4\frac{\partial\left(x_n^{*p_{n-1}}\right)}{\partial x_j}\right)^2 \varphi_j^2 - \\ & k g_n \xi_n^{2+\frac{1}{p_{n-1}}} + c\xi_n^{\frac{1}{p_{n-1}}}\end{aligned}$$

因为 Φ_n 中包含未知项, 根据引理 1, 可得

$$\begin{aligned}\xi_n^{2-\frac{1}{p_{n-1}}}\Phi_n \le {} & \frac{b}{2\lambda_n^2}\xi_n^{2\left(2-\frac{1}{p_{n-1}}\right)} \boldsymbol{S}_n^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right)\boldsymbol{S}_n\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right)\theta_n + \\ & \frac{b}{2\bar{\gamma}^2}\xi_n^{2\left(2-\frac{1}{p_{n-1}}\right)} + \frac{1}{2}\lambda_n^2 + \frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_n^{*2}\end{aligned} \tag{55}$$

其中, $\lambda_n > 0$ 为设计参数.

$$\hat{\boldsymbol{Z}}_n = \left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_n, \alpha, \cdots, \alpha^{(n)}, y_d, \cdots, y_d^{(n)}\right]^{\mathrm{T}}$$

将式 (55) 代入式 (54) 并整理, 式 (54) 能够改写为

$$\begin{aligned}\dot{V}_n \le {} & -c\xi_n^2 + \xi_n^{2-\frac{1}{p_{n-1}}}\left[g_n u + \frac{b}{2\lambda_n^2}\xi_n^{2-\frac{1}{p_{n-1}}} \boldsymbol{S}_n^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right)\boldsymbol{S}_n\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right)\hat{\theta}_n + \right. \\ & \left. \frac{b}{2\bar{\gamma}^2}\xi_n^{2-\frac{1}{p_{n-1}}} + k g_n \xi_n^{2+\frac{1}{p_{n-1}}}\right] - \\ & \frac{b}{\beta_n}\tilde{\theta}_n\left(\dot{\hat{\theta}}_n - \frac{\beta_n}{2\lambda_n^2}\xi_n^{2\left(2-\frac{1}{p_{n-1}}\right)} \times \right. \\ & \left. \boldsymbol{S}_n^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right)\boldsymbol{S}_n\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right)\right) + \\ & \frac{1}{2}\lambda_n^2 + \frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_n^{*2} + 2n - 1 + \sum_{j=1}^{n}\bar{\gamma}^2 w_j^2\end{aligned} \tag{56}$$

由此可得最终的控制律 u 和自适应律 $\dot{\hat{\theta}}_n$ 为

$$\begin{aligned}u = {} & -\frac{1}{2\lambda_n^2}\xi_n^{2-\frac{1}{p_{n-1}}} \boldsymbol{S}_n^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right)\boldsymbol{S}_n\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right)\hat{\theta}_n - \\ & \frac{1}{2\bar{\gamma}^2}\xi_n^{2-\frac{1}{p_{n-1}}} - k\xi_n^{2+\frac{1}{p_{n-1}}}\end{aligned} \tag{57}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \frac{\beta_n}{2\lambda_n^2}\xi_n^{2\left(2-\frac{1}{p_{n-1}}\right)} \boldsymbol{S}_n^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right)\boldsymbol{S}_n\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n\right) - h\hat{\theta}_n \tag{58}$$

则

$$\dot{V}_n \le -c\xi_n^2 + h\frac{b}{\beta_n}\tilde{\theta}_n\hat{\theta}_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2 + \frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_n^{*2} + 2n - 1 + \sum_{j=1}^{n}\bar{\gamma}^2 w_j^2 \tag{59}$$

至此, 本文的主要结果可给出如下:

定理 1. 对于满足假设 1 和假设 2 的 p 规范型非线性系统 (1), 如果初始条件满足 $|e_1(0)| < \alpha(0)$, 并且控制律和自适应律按照式 (23), (48), (57) 和式 (24), (49), (58) 来选取, 则系统 (1) 满足: 1) 跟踪误差 $e_1(t)$ 能够被预先给定的有限时间性能函数 $\alpha(t)$ 约束, 且在一个预先给定的停息时间 T_f 内收敛到平衡点的一个预先给定的邻域 $\left(-\alpha_{T_f}, \alpha_{T_f}\right)$ 内, 并且该停息时间 T_f 与系统初始状态无关; 2) 所有信号是实际有限时间稳定的; 3) 外部扰动对系统的影响能够被 H_∞ 性能抑制.

证明. 定理 1 的证明过程分为以下 3 个部分.

1) 跟踪误差 $e_1(t)$ 满足预设性能指标的证明

选择系统总的 Lyapunov 函数为

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} V_i + V_n \tag{60}$$

因为 $V_1 \ge 0$, $V_2 \ge 0$, $\cdots$, $V_{n-1} \ge 0$ 并且 $V_n > 0$, 易知 $V > 0$ 恒成立. 根据式 (26), 式 (29) 及式 (53), 有

$$V \le 2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{b}{2\beta_i}\tilde{\theta}_i^2 + \varepsilon \tag{61}$$

结合式 (25), 式 (50) 和 (59) 以及 $\tilde{\theta}_i\hat{\theta}_i \le -\frac{1}{2}\tilde{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}\theta_i^2$, 得

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^{n} -c\xi_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{b}{\beta_i} h\tilde{\theta}_i^2 + \Theta + n\bar{\gamma}^2 \left\|\boldsymbol{w}\right\|^2 - \xi_1^2 \quad (62)$$

其中, $\boldsymbol{w} = [w_1, \cdots, w_n]^{\mathrm{T}}$, $\Theta = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{b}{\beta_i} h\theta_i^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 + \frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_1^{*2} + \sum_{i=2}^{n}(\frac{1}{2}\lambda_i^2 + \frac{1}{2b}\bar{\gamma}^2\delta_i^{*2} + 2i - 1)$ 为有界常数.

考虑式 (61) 和式 (62) 并选择 $\zeta = \min\{c/2, h\}$, 有

$$\dot{V} + \zeta V \leq \sum_{i=1}^{n} -c\xi_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{b}{\beta_i} h\tilde{\theta}_i^2 + \Theta + n\bar{\gamma}^2 \left\|\boldsymbol{w}\right\|^2 + \zeta\left(2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{b}{\beta_i}\tilde{\theta}_i^2 + \varepsilon\right) \leq \bar{\Theta} \quad (63)$$

其中, $\bar{\Theta} = \Theta + n\bar{\gamma}^2 \left\|\boldsymbol{w}\right\|^2 + \zeta\varepsilon$ 是未知的有界常数. 在区间 $[0, t]$ 上对式 (63) 进行积分, 有

$$0 \leq V \leq \left[V(0) - \frac{\bar{\Theta}}{\zeta}\right] e^{-\zeta t} + \frac{\bar{\Theta}}{\zeta} \quad (64)$$

根据式 (64), 易知 V 有界. 因此 $V_1 = \frac{1}{2}\tan^2(\frac{\pi e_1}{2\alpha}) + \frac{b}{2\beta_1}\tilde{\theta}_1^2$ 有界, 结合 $\tan(\pm\frac{\pi}{2}) = \infty$ 及 $|e_1(0)| < \alpha(0)$ 得出 $|e_1(t)| < \alpha(t)$ 恒成立. 又因为 $\alpha(t)$ 在给定停息时间 T_f 内衰减到 α_{T_f}, 可知 $e_1(t)$ 也可在停息时间 T_f 内衰减到一个平衡点的邻域 $(-\alpha_{T_f}, \alpha_{T_f})$ 内. 其中, T_f 和 α_{T_f} 为设计参数, 它们能够被选择为任意大小的正实数. 因此停息时间 T_f 和跟踪误差 $e_1(t)$ 最后稳定的界 $(-\alpha_{T_f}, \alpha_{T_f})$ 均与系统初始状态无关.

应该指出, 当 $|e_1(0)|$ 的值较大时, 只需要增大设计参数 α_0 而不需要改变 α_{T_f}, 即可满足条件 $|e_1(0)| < \alpha(0)$.

2) 系统所有信号均为实际有限时间稳定的证明

由于 $e_1(t)$ 能够在有限时间内收敛到给定的界中, 易知 x_i, ξ_i, $\hat{\theta}_i$, $x_{i+1}^{*p_i}$ 等所有的系统信号是实际有限时间稳定的. 因此, 这里详细的证明过程省略.

3) 系统 (1) 满足 H_∞ 性能指标的证明

为了验证该系统满足 H_∞ 性能指标, 定义一个辅助函数如下

$$H = \dot{V} + \xi_1^2 - n\bar{\gamma}^2 \left\|\boldsymbol{w}\right\|^2 \quad (65)$$

根据式 (62) 和式 (65), 不等式 (66) 成立.

$$H \leq \Theta \quad (66)$$

因为 $V > 0$ 且 Θ 有界, 因此必存在一个常数 τ 使得

$$H = \dot{V} + \xi_1^2 - n\bar{\gamma}^2 \left\|\boldsymbol{w}\right\|^2 \leq \Theta \leq \tau V \quad (67)$$

对式 (67) 两边积分, 可得

$$V(t) \leq V(0) + \int_0^t (-\xi_1^2(s) + n\bar{\gamma}^2 \left\|\boldsymbol{w}(s)\right\|^2)\mathrm{d}s + \int_0^t \tau V(s)\,\mathrm{d}s \quad (68)$$

根据引理 4, 令 $\digamma(t) = V(0) + \int_0^t (-\xi_1^2(s) + n\bar{\gamma}^2 \left\|\boldsymbol{w}(s)\right\|^2)\mathrm{d}s$; $\chi(s) = \tau$, 则

$$V(t) \leq \digamma(t) + \int_0^t \tau\digamma(s)\,\mathrm{e}^{\int_s^t \tau \mathrm{d}u}\mathrm{d}s \quad (69)$$

接下来, 利用反证法验证 $\digamma(t) > 0$. 假设 $\digamma(t) \leq 0$, 则 $V(t)$ 满足

$$V(t) \leq \tau\int_0^t \digamma(s)\,\mathrm{e}^{\int_s^t \tau \mathrm{d}\mu}\mathrm{d}s \leq 0 \quad (70)$$

这与 $V > 0$ 矛盾. 则 $\digamma > 0$ 成立. 即

$$V(0) + \int_0^t n\bar{\gamma}^2 \left\|\boldsymbol{w}(s)\right\|^2 \mathrm{d}s > \int_0^t \xi_1^2(s)\,\mathrm{d}s \quad (71)$$

成立. 因为 $\xi_1 = \tan\left(\frac{\pi e_1}{2\alpha}\right)$, $\tan^2(x) \geq x^2$ 并且 $\alpha(0) \geq \alpha(t)$, 所以

$$V(0) + \int_0^t n\bar{\gamma}^2 \left\|\boldsymbol{w}(s)\right\|^2 \mathrm{d}s > \int_0^t \tan^2\left(\frac{\pi e_1(s)}{2\alpha(s)}\right)\mathrm{d}s \geq \int_0^t \frac{\pi^2 e_1^2(s)}{4\alpha^2(0)}\mathrm{d}s \quad (72)$$

根据式 (71), 易有

$$d(x_0) + \int_0^t \gamma^2 \left\|\boldsymbol{w}(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \geq \int_0^t \left\|e_1(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \quad (73)$$

其中, $d(x_0) = \frac{4\alpha^2(0)V(0)}{\pi^2}$; $\gamma = \frac{2\alpha(0)\sqrt{n}\bar{\gamma}}{\pi}$. 根据定义 2 及式 (73) 可知该系统满足 H_∞ 性能指标. □

注 3. 本文的设计方法能够使得系统在有界稳定的情况下满足 H_∞ 性能指标.

3　仿真研究

本节给出两个仿真例子验证所提方法的有效性和优越性.

例 1. 为了验证本文控制方法的有效性, 考虑文献 [27] 中的系统. 不同的是, 在系统中加入了非严格反馈项 $f_1(x)$ 以及外部扰动项 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$. 系统的数学描述如下:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{\frac{5}{3}} + x_1^{\frac{10}{11}} + f_1(x) + w_1(t) \\ \dot{x}_2 = u^3 + x_1^2\sin(x_2) + w_2(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (74)$$

其中, $w_1(t) = 5\mathrm{e}^{-0.5t}\cos(5\pi t)$, $w_2(t) = 3\mathrm{e}^{-0.5t}\sin(4\pi t)$, $f_1(x) = x_2 + x_2\sin(x_2)$. 被跟踪信号选为 $y_d(t) = 0.5\times\sin(4t)$. 选择设计参数 $k = 0.1$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$; $\alpha_0 = 1$; $\alpha_{T_f} = 0.01$; $\bar{\gamma} = 0.8$; $h = 1$; $\beta_1 = \beta_2 = 10$; $T_f = 0.6$; 自适应参数的初始值 $\hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_2(0) = 0.5$; 初始状态分别选择为 $\boldsymbol{x}(0) = [0.4, 0.8]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{x}(0) = [-0.8.\ 0.3]^{\mathrm{T}}$; 选择 RBFNN 为: 神经网络 $\boldsymbol{\vartheta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{Z}_1)$ 包含 42 个节点, 中心宽度为 2, 且平均分配 $[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]$; 神经网络 $\boldsymbol{\vartheta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_2(\boldsymbol{Z}_2)$ 包含 70 个节点, 中心宽度为 2, 且平均分配在 $[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]\times[-3, 3]$; 根据定理 1 计算出该系统对应的控制器, 对系统进行仿真研究. 仿真结果如图 1 和图 2. 图 1 为系统跟踪误差 e_1 曲线; 图 2 为系统输出 y 跟踪效果曲线.

从图 1 和图 2 可知, 即使被控系统初始状态不同并且

存在外部扰动, 系统的跟踪误差 $e_1(t)$ 仍能被有限时间性能函数 $\alpha(t)$ 约束, 并在给定的停息时间 0.6 s 内收敛到给定的区间 $(-0.01, 0.01)$; 且系统输出 $y(t)$ 能够在给定时间内跟踪上信号 $y_d(t)$, 验证了本文控制方法的有效性.

例 2. 为了验证本文控制方法的实用性和优越性, 采用文献 [22] 中的机械臂系统. 不同的是, 一个较大的外部扰动 $w_1(t)$ 被加入到该系统中. 这里将本文控制方法与文献 [22] 的方法进行对比研究. 系统数学描述如下:

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + w_1(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}(rg\sin(x_1) - Dx_2 - F) + \frac{1}{J}u + w_2(t) \\ y = x_1 \end{cases}$$

其中, $J=3.287, r=2.3126, g=9.8, D=18.6918$, $F=24.25$; $w_1(t)=5\mathrm{e}^{-0.5t}\cos(5\pi t)$ 和 $w_2(t)=0.5\mathrm{e}^{-0.5t}\times\sin(4\pi t)$ 为系统外部扰动. 这些参数的具体物理意义见文献 [28]. 为了能够与文献 [22] 的方法进行比较, 这里考虑镇定问题, 即 $e_1=x_1$. 选择设计参数 $k=1$; $\lambda_1=\lambda_2=1$; $\alpha_0=0.8$; $\alpha_{T_f}=0.03$; $\bar{\gamma}=1.2$; $h=1$; $\beta_1=\beta_2=1$; $T_f=0.5$; 自适应参数的初始值 $\hat{\theta}_1(0)=\hat{\theta}_2(0)=0.5$; 初始状态选择为 $\boldsymbol{x}(0)=[0.4, 0.8]^{\mathrm{T}}$; 神经网络的选择与系统 S_1 相似. 根据定理 1 及文献 [22] 分别得到两种方法对应的控制器进行仿真. 当没有外部扰动时, 仿真结果如图 3 ~ 5 所示. 图 3 给出了两种不同控制方法所得到的状态 x_1 曲线; 图 4 给出本文控制输入 u 曲线, 图 5 为文献 [22]的控制输入 u 曲线. 类似地, 当外部扰动存在时, 保持两种方法的控制器不变, 仿真结果如图 6~8 所示. 从图 3~5 可知, 比起文献 [22], 本文控制方法收敛速度更快, 并且控制器的抖震现象较轻. 因此, 本文控制方法更实用. 根据图 6~8 可知, 即使系统存在较大的外部扰动, 本文方法仍能使被控系统具有较好的动态性能, 而文献 [22] 的控制方法则受到了很大的影响. 但是应该说明的是, 本文方法使被控系统具有更快收敛速度的同时, 会需要较大的控制输入信号.

为了验证本文控制方法在高频变化的扰动下仍能保证较好的控制性能, 这里将扰动 $w_1(t)$ 改为信噪比为 10.8306 dB 的高斯白噪声信号. 仍考虑镇定问题. 设计参数与初始条件等均不变. 对应的仿真结果如图 9 和图 10. 图 9 为状态 x_1 曲线; 图 10 为外部扰动 $w_1(t)$ 曲线. 从图 9 可知, 即使对于高频变化的外部扰动, 本文控制方法仍有较好的控制性能.

4 结论

本文主要研究了一类带有外部扰动的非严格反馈 p 规范型非线性系统的预设性能有限时间 H_∞ 跟踪控制问题.

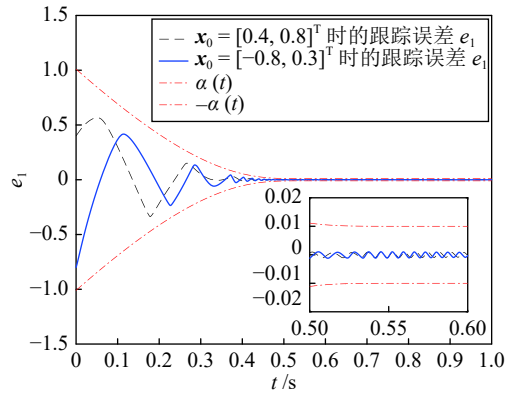

图 1 跟踪误差 e_1

Fig. 1 Tracking error e_1

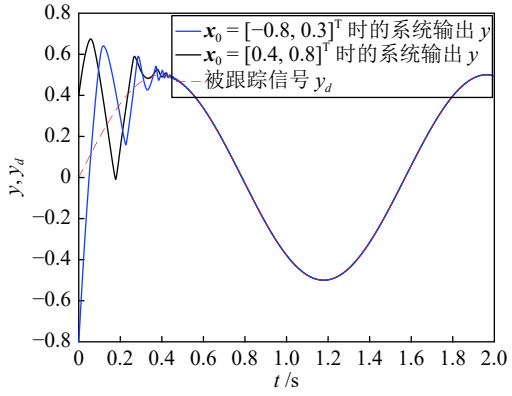

图 2 系统输出 y 跟踪效果

Fig. 2 Tracking effects of the system output y

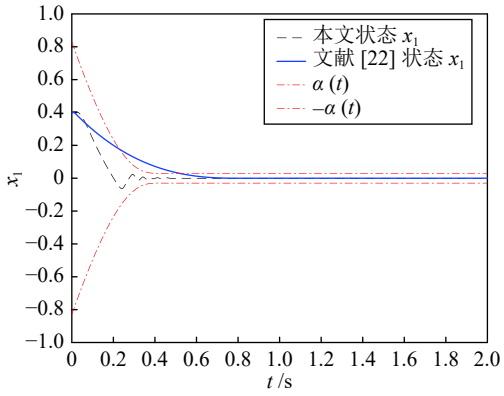

图 3 无外部扰动时状态 x_1

Fig. 3 State x_1 without external disturbance

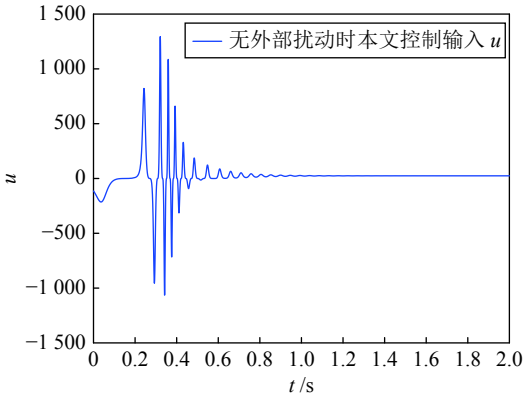

图 4 无外部扰动时本文的控制输入 u

Fig. 4 Control input u of this paper without external disturbance

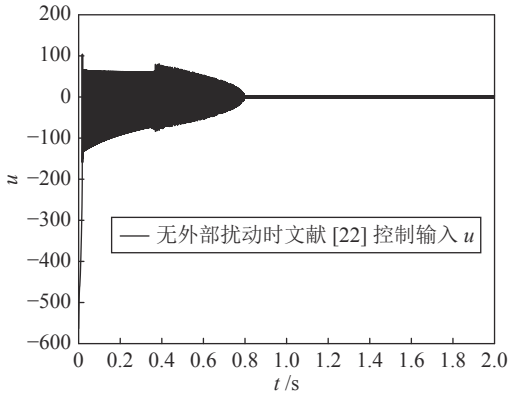

图 5　无外部扰动时文献 [22] 的控制输入 u

Fig. 5　Control input u of [22] without external disturbance

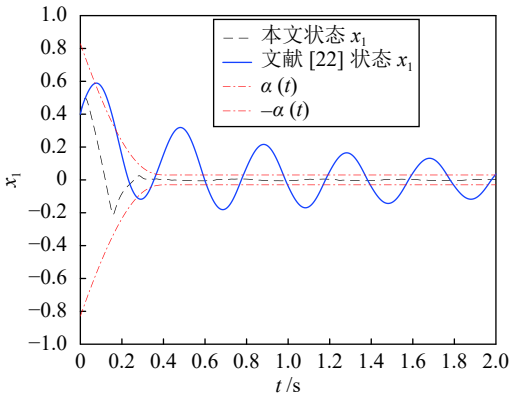

图 6　存在外部扰动时状态 x_1

Fig. 6　State x_1 with external disturbance

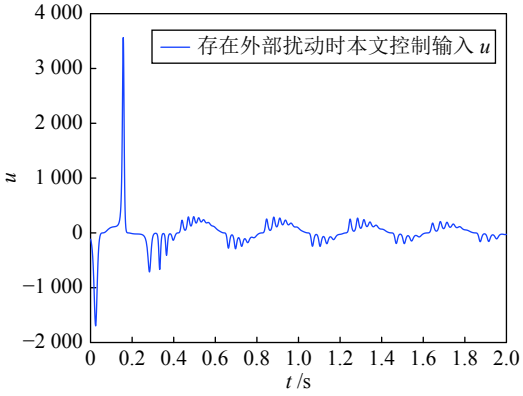

图 7　存在外部扰动时本文的控制输入 u

Fig. 7　Control input u of this paper with external disturbance

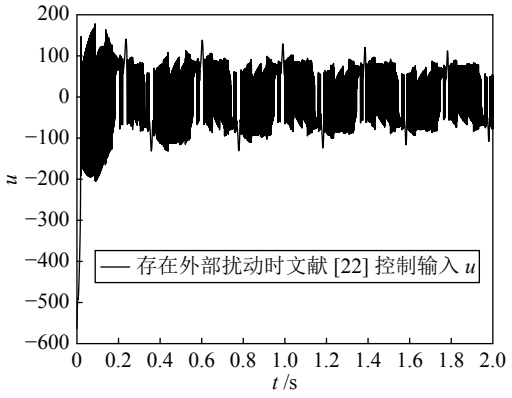

图 8　存在外部扰动时文献 [22] 的控制输入 u

Fig. 8　Control input u of [22] with external disturbance

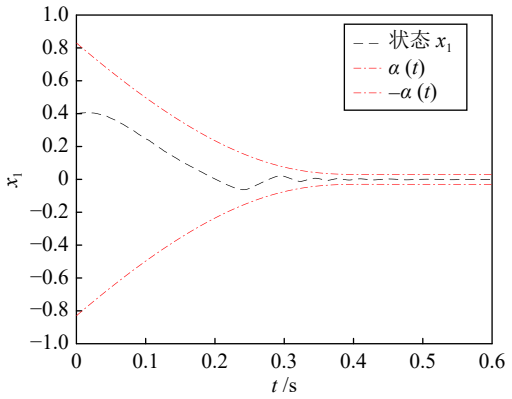

图 9　白噪声扰动下的状态 x_1

Fig. 9　State x_1 with white noise disturbance

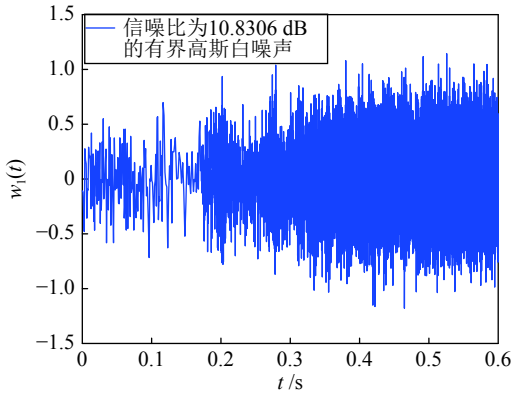

图 10　外部扰动 $w_1(t)$

Fig. 10　External disturbance $w_1(t)$

针对一类 p 规范型非线性系统提出了一种新的预设性能控制设计方法. 并在此方法的基础上, 结合加幂积分技术、H_∞ 控制方法以及神经网络自适应技术, 设计了自适应神经预设性能有限时间 H_∞ 跟踪控制器. 该方法避免了预设性能的共性问题. 所设计的控制器能够保证系统的跟踪误差被约束在有限时间性能函数 $(-\alpha(t), \alpha(t))$ 内. 并能够在预先给定的停息时间内收敛到平衡点的一个预先给定的邻域内, 且该停息时间与系统初始状态无关. 同时, 外部扰动对系统的影响能够被抑制.

References

1　Geng Zhi-Yong. Finite time formation control for multiple

vehicles based on Pontryagin′s minimum principle. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(1): 40−59
(耿志勇. 基于庞特里亚金极小值原理的多运载体有限时间编队控制. 自动化学报, 2017, **43**(1): 40−59)

2 Mo L P, Yu Y G. Finite-time rotating encirclement control of multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(9): 183−190

3 Liu H, Shen Y, Zhao X D. Finite-time stabilization and boundedness of switched linear system under statedependent switching. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, **350**(3): 541−555

4 Zheng S Q, Li W J. Fuzzy finite time control for switched systems via adding a barrier power integrator. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(7): 2693−2706

5 Li Xiao-Hua, Liu Yang, Liu Xiao-Ping. Decentralized finite-time robust connective stabilization for a class of large-scale systems with expanding construction. *Control and Decision*, 2015, **30**(11): 1967−1973
(李小华, 刘洋, 刘晓平. 一类扩展结构大系统的分散有限时间鲁棒关联镇定. 控制与决策, 2015, **30**(11): 1967−1973)

6 Wang Z, Li S H, Fei S M. Finite-time tracking control of a nonholonomic mobile robot. *Asian Journal of Control*, 2009, **11**(3): 344−357

7 Du H B, Li S H, Qian C J. Finite-time attitude tracking control of spacecraft with application to attitude synchronization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(11): 2711−2717

8 Tian B L, Lu H C, Zuo Z Y, Zong Q, Zhang Y P. Multivariable finite-time output feedback trajectory tracking control of quadrotor helicopters. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, **28**(1): 281−295

9 Huang S P, Xiang Z R. Finite-time output tracking for a class of switched nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, **27**(6): 1017−1038

10 Chen Ming, Zhang Shi-Yong. Prescribed performance robust controller design for nonlinear systems based on backstepping. *Control and Decision*, 2015, **30**(5): 877−881
(陈明, 张士勇. 基于Backstepping的非线性系统预设性能鲁棒控制器设计. 控制与决策, 2015, **30**(5): 877−881)

11 Guan Z Y, Ma Y P, Zheng Z W, Guo N. Prescribed performance control for automatic carrier landing with disturbance. *Nonlinear Dynamics*, 2018, **94**(2): 1−15

12 Wang M, Wang C, Liu X P. Dynamic learning from adaptive neural control with predefined performance for a class of nonlinear systems. *Information Sciences*, 2014, **279**: 874−888

13 Jing Y W, Liu Y, Zhou S W. Prescribed performance finite-Time tracking control for uncertain nonlinear systems. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2019, **32**: 803−817

14 Zhang J X, Yang G H. Prescribed performance faulttolerant control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, **62**(12): 6529−6535

15 Liu Y, Liu X P, Jin Y W. Adaptive neural networks finite-time tracking control for non-strict feedback systems via prescribed performance. *Information Sciences*, 2018, **468**: 29−46

16 Yang B, Lin W. Homogeneous observers, iterative design, and global stabilization of high-order nonlinear systems by smooth output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1069−1080

17 Zhang H B, Feng G, Dang C Y. An approach to H_∞ control of a class of nonlinear stochastic systems. *Circuits Systems and Signal Processing*, 2012, **31**(1): 127−141

18 Yang H, Wang Z D, Shu H S, Alsaadi E, Hayat T. Almost sure H_∞ sliding mode control for nonlinear stochastic systems with markovian switching and timedelays. *Neurocomputing*, 2016, **175**(PA): 392−400

19 Li X H, Liu X P. Backstepping-based decentralized adaptive neural H_∞ control for a class of large-scale nonlinear systems with expanding construction. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **90**(2): 1373−1392

20 Lu Guo-Ping, Zheng Yu-Fan. Robust H_∞ control for nonlinear systems with parameter uncertainty. *Acta Automatica Sinica*, 1999, **25**(3): 388−392
(陆国平, 郑毓蕃. 一类非线性不确定系统的鲁棒H_∞控制. 自动化学报, 1999, **25**(3): 388−392)

21 Chai Lin, Fei Shu-Min, Xin Yun-Bing. Adaptive H_∞ control for a class of nonlinear time-delay systems with uncertain input delay. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(2): 237−245
(柴琳, 费树岷, 辛云冰. 一类带未知输入时滞的多时滞非线性系统的对时滞参数的自适应H_∞控制. 自动化学报, 2006, **32**(2): 237−245)

22 Liu Y, Liu X P, Jing Y W, Zhang Z Y. Design of finite-time H_∞ controller for uncertain nonlinear systems and its application. *International Journal of Control*, 2019, **92**(12): 2928−2938

23 Huang J S, Wen C Y, Wang W, Song Y D. Design of adaptive finite-time controllers for nonlinear uncertain systems based on given transient specifications. *Automatica*, 2016, **69**(C): 395−404

24 Sanner R M, Slotine J J E. Gaussian networks for direct adaptive control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, **3**(6): 837−863

25 Su Y M, Chen B, Lin C, Wang H H, Zhou S W. Adaptive neural control for a class of stochastic nonlinear systems by backstepping approach. *Information Sciences*, 2016, **369**: 748−764

26 Drogomir S S. *Some Gronwall Type Inequalities and Applications*. New York: Nova Science Publishers, 2003.

27 Gao F Z, Wu Y Q. Global state feedback stabilisation for a class of more general high-order non-linear systems. *IET Control Theory and Applications*, 2014, **8**(16): 1648−1655

28 Matoba S, Nakamura N, Nakamura H, Nishitani H. Robust finite-time control of robot manipulators. In: Proceedings of the 18th World Congress The International Federation of Automatic Control, Milano, Italy: IFAC, 2011. 11863−11868

李小华 辽宁科技大学电子与信息工程学院教授. 主要研究方向为复杂系统结构与控制, 非线性控制理论与应用, 工业过程建模与控制. 本文通信作者. E-mail: lixiaohua6412@163.com
(**LI Xiao-Hua** Professor at the School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning. Her research interest covers structure and control of complex systems, nonlinear control theory and application, and industrial process modeling and control. Corresponding author of this paper.)

胡利耀 辽宁科技大学电子与信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为非线性系统控制, 有限时间控制.
E-mail: huliyao1995@163.com
(**HU Li-Yao** Master student at the School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning. His research interest covers control of nonlinear system and finite-time control.)