基于部分三阶邻居信息的一致性算法

严志强 [1] 葛 磊 [1] 张跃跃 [1] 窦 磊 [1]

摘 要 针对多智能体一致性算法中的通信问题, 提出了一种近邻原则, 即利用部分二阶和部分三阶邻居信息, 在固定无向连通拓扑图的基础上, 应用于三阶多智能体系统. 通过 MATLAB 仿真, 将所提出的算法与经典的三阶一致性算法进行比较, 仿真结果表明该算法能够使系统达到一致, 并且提高了系统的收敛速度, 减少了系统通讯量.

关键词 三阶多智能体系统, 一致性, 近邻原则, 通信拓扑, 收敛速度, 通信量

引用格式 严志强, 葛磊, 张跃跃, 窦磊. 基于部分三阶邻居信息的一致性算法. 自动化学报, 2021, **47**(9): 2285−2291

DOI 10.16383/j.aas.c180826

A Consensus Algorithm Based on Partial Third-order Neighbors′ Information

YAN Zhi-Qiang[1] GE Lei[1] ZHANG Yue-Yue[1] DOU Lei[1]

Abstract For the problem of communication in multi-robot consensus algorithm, the nearest neighbors′ principle which utilizes a part of second-order and third-order neighbors′ information is proposed and applied to third-order multi-robot system basing on fixed, undirected and connected communication topology. We compared the proposed algorithm with the typical third-order consensus algorithm via MATLAB. The simulation result shows that the new algorithms can make the system achieve consensus. Furthermore, the new algorithm improved the speed of convergence and reduced the amount of communication.

Key words Third-order multi-robot system, consensus, nearest neighbors′ principle, communication topology, speed of convergence, amount of communication

Citation Yan Zhi-Qiang, Ge Lei, Zhang Yue-Yue, Dou Lei. A consensus algorithm based on partial third-order neighbors′ information. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(9): 2285−2291

多智能体系统控制在近些年发展迅速, 广泛应用于无人机编队、传感器网络、机械臂装配、多导弹的联合攻击等领域[1−2]. 因此, 一致性问题成为多智能体系统研究中的核心问题. 一致性[3] 的定义为: 随着时间的演变, 多智能体系统中的所有个体的某一个或者几个状态趋于一致. 一致性协议是人为规定的智能体之间的通信原则, 它描述了各个智能体与其他智能体的通信规则和通信过程.

本文研究的三阶多智能体系统具有一定的工程意义. 对加速度求导得到急动度, 也称为力变率, 用以描述加速度变化率. 特别地, 在交通运输设计上往往需要急动度来解决问题. 例如: 汽车工程师可用急动度作为衡量乘客舒适度的指数[4]; Lorens 通过特殊的变形后, 即用具有一个独立变量的三阶微分方程描述问题, 可以把蝴蝶效应变成一个类似的一维突变运动; JW2-3D 型加加速度计主要用于强地震观测等等. 此外, 三阶系统在日常生活和工程中又是常见的, 其性能指数比较复杂, 因此, 三阶多智能体系统的研究有着十分重要的意义.

学者们最早研究的是一阶多智能体系统, 结果颇多, 理论相对完善, 其中具有代表性的是 2004 年 Olfati-Saber 等[5] 研究的一阶多智能体系统在切换网络拓扑下的一致性问题, 该文献在一致性问题研究上具有开创性意义, 为多智能体一致性问题研究奠定了基础. 在二阶多智能体一致性问题研究上, 目前也取得了大量研究成果. 例如, 2007 年, Sun 等[6] 研究了二阶多智能体系统在拓扑分别为固定和切换的条件下的均匀一致性问题; 2009 年, Lin 等[7] 探究了带有不均匀时滞的离散时间二阶系统在动态交换拓扑条件下的一致性问题; 2010 年, Yu 等[8] 探究了在有向图的假设条件下带时滞和不带时滞的二阶系统一致性问题等.

对于三阶多智能体系统, 许格升等[9] 研究了在有向图中, 利用分段连续可微的向量表示理想时变编队, 将编队问题转化为一致性问题, 再通过使用复系数的 Hurwitz 多项式证明了三阶系统设计编队的充要条件; 董滔等[10] 研究了基于事件触发控制的三阶离散多智能体系统, 利用位置、速度和加速度的测量误差, 设计了具有创新意义的事件触发控制机制, 然后通过不等式运算给出了多智能体系统达到一致的充分条件; 文献 [11] 针对三阶多智能体系统提出了一种计算控制输入中的加权系数的算法, 并通过 Hurwitz 多项式证明该系统的一致性; 文献 [12−13] 研究了三阶时延多智能体系统, 通过矩阵理论和 Nyquist 准则, 着重建立了最大可容忍通信延迟与非零特征值和图拉普拉斯矩阵之间的对应关系.

对于高阶多智能体系统, 2006 年, Ren 等[14] 研究了在有向图中多车辆系统的协同控制一致性问题; 2014 年, Zhu 等[15] 探究了高阶系统在切换拓扑前提下的一致性问题等.

目前对于特定三阶多智能体系统的研究还相对较少, 并且随着智能体的增加, 系统达到一致的时间和通讯线路数量也大大增加, 针对这个问题, 通过新规定的近邻原则, 合理地减少通讯线路, 优化系统收敛速度, 提出了基于部分邻居信息的一致性算法.

本文安排如下: 第 1 节对相关图论和矩阵理论作了初步的介绍; 第 2 节给出并证明了典型三阶一致性算法, 并且提出近邻规则, 进而得到两种不同的算法, 新算法能够加快系统收敛速度, 减少通信负担; 第 3 节为了验证理论结果, 进行了三种算法的仿真并给出数值比较; 最后, 第 4 节对全文进行了总结.

1 基础知识

图论是一致性算法研究的基础知识. 一个加权的有向或无向图 G 定义为 $G=(V,E,A)$, 其中, $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是节点集, $E\subseteq V\times V$ 是一组边, 用来描述多智能体之间的联络关系. 此外, n 是节点数目, 属于边集合 E 的 e_{ij}, 定义为 $e_{ij}=(v_i,v_j)\in E$, 其中, v_i 表示边 E 的起始端, v_j 表示边 E 的末端, 图可以分为两类, 有向图和无向图. 如果图的边是有向的, 则图是有向的. 那么 $(v_i,v_j)\in E\neq(v_j,v_i)\in E$, 则 $e_{ij}=(v_i,v_j)$ 表示第 i 个智能体向第 j 个智能体传输信息; 如果拓扑图的边是无向的, 那么图是无向的, 那么 $(v_i,v_j)\in E=(v_j,v_i)\in E$, 则 $e_{ij}=(v_i,v_j)$ 表示第 i 个智能体与第 j 个智能体之间互相传输信息.

多智能体系统一阶邻居节点的集合表示为 $N_i=\{v_j\in V:(v_j,v_i)\in E\}$, 以此类推, 二阶以及三阶邻居节点分别表示为 $N_i{}^2$ 和 $N_i{}^3$, 各个节点之间是否通信通过边来描

收稿日期 2018-12-11 录用日期 2019-02-27
Manuscript received December 11, 2018; accepted February 27, 2019
本文责任编委 诸兵
Recommended by Associate Editor ZHU Bing
1. 南京理工大学瞬态物理国家重点实验室 南京 210094
1. State Key Laboratory of Transient Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094

述. 此外, 拉普拉斯矩阵 $L=[l_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 定义为 $l_{ii}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}$, 以及 $i\neq j$ 时, $l_{ii}=-a_{ij}$. 对于一个无向图, 其拉普拉斯矩阵是对称的, 但是对于一个有向图而言, 它是不对称的. 为方便起见, 在此给出以下相关引理.

引理 1[16]. 设 L 为有向图 G 的拉普拉斯矩阵, 矩阵 L 仅仅只有单个简单的零特征值, 并且其他非零的特征值都含有正实部当且仅当有向图 G 有有向生成树.

考虑复系数方程

$$\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n=0 \tag{1}$$

其中, $c_k=a_k+b_kj$ (a_k, b_k 为实数, $k=1,2,\cdots,n$). 令 $a_0=1$, $b_0=0$ 且

$$\begin{cases}B_i=a_{i-2}^4a_{i-1,1}\\ L_i=a_{i-1,1}^2a_{i-2,1}^3b_{i-2,2}-b_{i-1,2}B_i\end{cases} \tag{2}$$

其中, $a_{0,i}=a_i$, $b_{0,i}=b_i$, $a_{-1,i}=a_{i-1}$, $b_{-1,i}=b_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$.

$$\begin{cases}a_{i,2m-1}=a_{i-1,1}^3a_{i-2,1}^3a_{i-2,2m+1}-\\ \qquad a_{i-1,1}a_{i-1,2m+1}B_i+b_{i-1,2m}L_i\\ b_{i,2m}=a_{i-1,1}^3a_{i-2,1}^3b_{i-2,2m+2}-\\ \qquad a_{i-1,1}b_{i-1,2m+2}B_i-a_{i-1,2m+1}L_i\\ a_{i,j}=b_{i,j}=0,\\ \qquad i+j>n,\ i=1,2,\cdots,n-1,\ m=1,2,\cdots,\frac{n+1-i}{2}\end{cases} \tag{3}$$

引理 2[17]. 式 (1) 的所有根均含有负实部当且仅当式 (2) 成立且 $B_i>0$ ($i=1,2,\cdots,n$) 成立.

2 一致性协议与分析

2.1 一致性协议

我们考虑的三阶多智能体系统, 一般描述如下:

$$\begin{cases}x_i'(t)=v_i(t)\\ v_i'(t)=z_i(t)\\ z_i'(t)=u_i(t)\end{cases} \tag{4}$$

其中, $x_i(t)$, $v_i(t)$ 和 $z_i(t)$ 分别代表第 i 个机器人的位置、速度和加速度, $u_i(t)$ 表示该系统的控制输入. 当系统 (1) 达到一致时, 意味着所有机器人的位置、速度和加速度收敛到相同的值. 即有

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to T}|x_i(t)-x_j(t)|=0\\ \lim\limits_{t\to T}|v_i(t)-v_j(t)|=0\\ \lim\limits_{t\to T}|z_i(t)-z_j(t)|=0\end{cases} \tag{5}$$

其中, $i,j\in W$, $i\neq j$, $W=\{1,\cdots,N\}$ 是机器人集合, T 是机器人达成一致的时间. 对于系统 (1), 考虑三阶邻居信息 (Third-order neighbors′ information, TNI) 的典型一致性算法

$$\begin{aligned}u_i(t)=&\sum_{j\in N_i}a_{ij}\left[k_1\left(x_j(t)-x_i(t)\right)+\right.\\ &\left.k_2\left(v_j(t)-v_i(t)\right)+k_3\left(z_j(t)-z_i(t)\right)\right]+\\ &\sum_{k\in {N_i}^2}a_{ik}\left[k_1\left(x_k(t)-x_i(t)\right)+\right.\\ &\left.k_2\left(v_k(t)-v_i(t)\right)+k_3\left(z_k(t)-z_i(t)\right)\right]+\\ &\sum_{m\in {N_i}^3}a_{im}\left[k_1\left(x_m(t)-x_i(t)\right)+\right.\\ &\left.k_2\left(v_m(t)-v_i(t)\right)+k_3\left(z_m(t)-z_i(t)\right)\right]\end{aligned} \tag{6}$$

其中, a_{ij} 表示机器人 i 与 j 之间边缘的权重, 也是相应邻接矩阵的第 (i,j) 项; a_{ik} 和 a_{im} 同理, k_1, k_2, k_3 表示可调参数, N_i, ${N_i}^2$ 和 ${N_i}^3$ 分别表示多智能体系统的一阶邻居节点、二阶邻居节点和三阶邻居节点. 本文提出的基于部分三阶邻居信息 (Partial third-order neighbors′ information, PTNI) 的一致性算法为

$$\begin{aligned}u_i(t)=&\sum_{j\in N_i}a_{ij}\left[k_1\left(x_j(t)-x_i(t)\right)+k_2\left(v_j(t)-v_i(t)\right)+\right.\\ &\left.k_3\left(z_j(t)-z_i(t)\right)\right]+\\ &\sum_{k\in {N_i}^2}a_{ik}\left[k_1\left(x_k(t)-x_i(t)\right)+k_2\left(v_k(t)-v_i(t)\right)+\right.\\ &\left.k_3\left(z_k(t)-z_i(t)\right)\right]+\\ &\sum_{q\in\tilde{N}_i^3}a_{iq}\left[k_1\left(x_q(t)-x_i(t)\right)+k_2\left(v_q(t)-v_i(t)\right)+\right.\\ &\left.k_3\left(z_q(t)-z_i(t)\right)\right]\end{aligned} \tag{7}$$

其中, $\tilde{N}_i^3$ 为多智能体系统的部分三阶邻居节点, a_{iq} 表示机器人 i 与 q 之间边缘的权重, 也是相应邻接矩阵的第 (i,q) 项. 此外, 本文提出的基于部分二阶和部分三阶邻居信息 (Partial second-order and partial third-order neighbors′ information, PPTNI) 的一致性算法为

$$\begin{aligned}u_i(t)=&\sum_{j\in N_i}a_{ij}\left[k_1\left(x_j(t)-x_i(t)\right)+k_2\left(v_j(t)-v_i(t)\right)+\right.\\ &\left.k_3\left(z_j(t)-z_i(t)\right)\right]+\\ &\sum_{p\in\tilde{N}_i^2}a_{ip}\left[k_1\left(x_p(t)-x_i(t)\right)+k_2\left(v_p(t)-v_i(t)\right)+\right.\\ &\left.k_3\left(z_p(t)-z_i(t)\right)\right]+\\ &\sum_{q\in\tilde{N}_i^3}a_{iq}\left[k_1\left(x_q(t)-x_i(t)\right)+k_2\left(v_q(t)-v_i(t)\right)+\right.\\ &\left.k_3\left(z_q(t)-z_i(t)\right)\right]\end{aligned} \tag{8}$$

其中, $\tilde{N}_i^2$ 为多智能体系统的部分二阶邻居节点, a_{ip} 表示机器人 i 与 p 之间边缘的权重, 也是相应邻接矩阵的第 (i,P) 项.

2.2 一致性分析

2.2.1 TNI 分析

将多智能体系统中各个智能体的相关参数定义成矩阵形式有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{v}&=[v_1,v_2,\cdots,v_n]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{z}&=[z_1,z_2,\cdots,z_n]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{y}&=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

因此, 具有控制输入 (6) 的系统 (4) 可以写为

$$\boldsymbol{y}'(t)=\left(\tilde{L}_1\otimes I_n\right)\boldsymbol{y} \tag{9}$$

其中, $\tilde{L}_1=\begin{bmatrix} O_n & I_n & O_n\\ O_n & O_n & I_n\\ -k_1L_1 & -k_2L_1 & -k_3L_1\end{bmatrix}$, I_n 表示 n 维单位阵, O_n 和 I_n 分别表示 $n\times n$ 零阵和 $n\times n$ 单位阵, L_1 为拉普拉斯矩阵, $\otimes$ 表示矩阵 Kronecker 积[18].

引理 3[18]**.** 矩阵 $\tilde{L}_1$ 至少有 3 个零特征值. $\tilde{L}_1$ 仅仅只有 3 个零特征值当且仅当拉普拉斯矩阵 $-L_1$ 也仅仅只有单个简单的零特征值. 此外, 如果矩阵 $-L_1$ 存在单个简单零特征值, 则 $\tilde{L}_1$ 的零特征值的几何重数只能等于 1.

证明. 设 λ 为 $\tilde{L}_1$ 的一个特征值, $\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 为 λ 对应的特征向量, 其中, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$, 和 $\boldsymbol{s}$ 为 $n\times 1$ 的列向量, 那么

$$\tilde{L}_1q=\begin{bmatrix} O_n & I_n & O_n\\ O_n & O_n & I_n\\ -k_1L_1 & -k_2L_1 & -k_3L_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{s}\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{s}\end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{p}\\ &\boldsymbol{s}=\lambda\boldsymbol{r}\\ &-k_1L_1\boldsymbol{p}-k_2L_1\boldsymbol{r}-k_3L_1\boldsymbol{s}=\lambda\boldsymbol{s}\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{q}=\left[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\quad \lambda\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\quad \lambda^2\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\\ &-k_1L_1\boldsymbol{p}-k_2L_1\lambda\boldsymbol{p}-k_3L_1\lambda^2\boldsymbol{p}=\lambda^3\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

上式可写成

$$-L_1p=\frac{\lambda^3}{k_1+k_2\lambda+k_3\lambda^2}\boldsymbol{p}$$

我们很容易得到 $\lambda^3/(k_1+k_2\lambda+k_3\lambda^2)$ 为矩阵 $-L_1$ 的特征值, $\boldsymbol{p}$ 为其对应的特征向量, 令 $\mu=\lambda^3/(k_1+k_2\lambda+k_3\lambda^2)$, 则有

$$\lambda^3-k_3\mu\lambda^2-k_2\mu\lambda-k_1\mu=0 \tag{10}$$

这说明对应于每个 μ, $\boldsymbol{\lambda}$ 有 3 个根, 也就是说 $-L_1$ 的每个特征值对应于 $\tilde{L}_1$ 的 3 个特征值.

令 μ_i $(i=1,\cdots,n)$ 为 $-L_1$ 的第 i 个特征值, $\boldsymbol{\lambda}_{3i-2}$, $\boldsymbol{\lambda}_{3i-1}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_{3i}$ $(i=1,\cdots,n)$ 为 $\tilde{L}_1$ 的特征值 μ_i 对应的特征向量. 由式 (10) 可知, 若 $\mu_i=0$, 则 $\boldsymbol{\lambda}_{3i-2}=\boldsymbol{\lambda}_{3i-1}=\boldsymbol{\lambda}_{3i}=0$, 显然, 对应于特征向量 $\mathbf{1}$ $(\mathbf{1}=[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}})$, 矩阵 $-L_1$ 至少有 1 个零特征值, 因为它的所有行和都等于 0. 因此, 矩阵 $\tilde{L}_1$ 至少有 3 个零特征值.

由式 (10) 可以得到, 当且仅当 $\tilde{L}_1$ 恰好有 3 个零特征值时, $-L_1$ 有单个简单的零特征值. 此外, 如果 $-L_1$ 单个简单的零特征值, 不失一般性地表示为 $\mu_1=0$, 则对应于 $-L_1$ 的特征值零只有一个线性独立的特征向量 $\boldsymbol{p}$. 当 $\mu_1=0$ 时, 则 $\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\lambda}_2=\boldsymbol{\lambda}_3=0$ 以及 $\boldsymbol{q}=[p^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 其中 $\mathbf{0}=[0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$. 因此, 对应于 $\tilde{L}_1$ 的特征值零只有 1 个线性独立的特征向量 $\boldsymbol{q}$, 也就是说如果 $-L_1$ 具有单个简单的零特征值, 则 $\tilde{L}_1$ 的零特征值的几何重数只能等于 1. □

应用引理 3, 我们可以证明如下引理.

引理 4[19]**.** 连续时间三阶多智能体系统 (9) 渐近达到一致当且仅当矩阵 $\tilde{L}_1$ 只有 3 个零特征值并且几何重数为 1, 且其他全部非零特征值均含有负实部.

证明. 如果 $\tilde{L}_1$ 恰好只有 3 个零特征值, 由引理 1 可知, 此特征值零的几何重数为一, 因此 $\tilde{L}_1$ 可写成如下约当规范型

$$\tilde{L}_1=PJP^{-1}=\begin{bmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_{3n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}D_1\begin{bmatrix}v_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ v_{3n}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{11}$$

其中,

$$D_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(3n-3)}\\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1\times(3n-3)}\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(3n-3)}\\ \mathbf{0}_{(3n-3)\times1} & \mathbf{0}_{(3n-3)\times1} & \mathbf{0}_{(3n-3)\times1} & J'\end{bmatrix}$$

$w_j\in\mathbf{R}^{3n}$ $(j=1,\cdots,3n)$ 可以是 $\tilde{L}_1$ 的右特征向量或广义特征向量, $\boldsymbol{v}_j\in\mathbf{R}^{3n}$, 可以是 $\tilde{L}_1$ 的左特征向量或广义特征向量, J' 是对应于 $\tilde{L}_1$ 的 $(3n-3)$ 非零特征值的约当上对角块矩阵.

为了不失一般性, 我们令 $\boldsymbol{w}_1=[\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{w}_2=[\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{w}_3=[\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 易知 $\boldsymbol{w}_1$ 为 $\tilde{L}_1$ 的一个特征向量, $\boldsymbol{w}_2$ 和 $\boldsymbol{w}_3$ 为 $\tilde{L}_1$ 的两个与特征值 0 相关的广义特征向量. $\tilde{L}_1$ 恰好有 3 个零特征值, 不失一般性地表示为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. 由上文知, $-L_1$ 有单个简单的零特征值, 也就是说存在一个非负的 $n\times1$ 向量 $\boldsymbol{p}$, 满足 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}L_1=0$ 和 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}=1$ 是 $\tilde{L}_1$ 的关于特征值 0 的两个广义左特征向量和一个左特征向量, 并且 $\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_j=1$ $(j=1,2,3)$, 那么

$$e^{\tilde{L}_1t}=\begin{bmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_{3n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}D_2\begin{bmatrix}v_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ v_{3n}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

其中

$$D_2=\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \mathbf{0}_{1\times(3n-3)}\\ 0 & 1 & t & \mathbf{0}_{1\times(3n-3)}\\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1\times(3n-3)}\\ \mathbf{0}_{(3n-3)\times1} & \mathbf{0}_{(3n-3)\times1} & \mathbf{0}_{(3n-3)\times1} & e^{J't}\end{bmatrix}$$

因为特征值 λ_{3i}, λ_{3i-1} 和 λ_{3i-2} $(i=2,\cdots,n)$ 具有负实部, 则 $e^{J't}$ 按指数规律地趋于 $\mathbf{0}_{3n-3}$. 通过计算, $e^{\tilde{L}_1t}$ 中的主项为

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}p^{\mathrm{T}} & t\mathbf{1}p^{\mathrm{T}} & \frac{1}{2}t^2\mathbf{1}p^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}p^{\mathrm{T}} & t\mathbf{1}p^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{1}p^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

其中, 第 $(kn+1)$ 行和第 $(k+1)n$ 行相同, $k=0,1,2$. 我们定义

$$\begin{bmatrix}\xi^{(0)}(t)\\ \xi^{(1)}(t)\\ \xi^{(2)}(t)\end{bmatrix}=e^{\tilde{L}_1t}\begin{bmatrix}\xi^{(0)}(0)\\ \xi^{(1)}(0)\\ \xi^{(2)}(0)\end{bmatrix}$$

其中, $\xi^{(k)}=[{\xi_1}^{(k)},\cdots,{\xi_n}^{(k)}]^{\mathrm{T}}$, 同样, 我们知道当 $\forall i\neq j$ ($k=0,1,2$) 且 $t\to\infty$ 时, ${\xi_i}^{(k)}(t)\to{\xi_j}^{(k)}(t)$, 这就意味着系统 (9) 可渐近达到一致. □

引理 5[20]. 假设有向图 G 有有向生成树, 三阶系统 (9) 渐近达到一致充要条件中的缩放参数 k_1, k_2 和 k_3 满足如下条件

$$\begin{aligned}&k_2{k_3}^2\Re(\mu_i)|\mu_i|^2>k_1k_3\Re^2(\mu_i)+{k_2}^2\ell^2(\mu_i)\\&{k_1}^2\Re^3(\mu_i)>\left(2k_1k_2k_3\Re^2(\mu_i)+{k_2}^2\ell^2(\mu_i)-\right.\\&\qquad\left.{k_2}^2{k_3}^2\Re(\mu_i)|\mu_i|^2\right)|\mu_i|^2\end{aligned}\tag{12}$$

其中, μ_i ($i=2,\cdots,n$) 是拉普拉斯矩阵 L 的非零特征值.

证明. 假设 λ 为矩阵 $\tilde{L}_1$ 的特征值, 则

$$\begin{aligned}\det\left(\lambda I_{3n}-\tilde{L}_1\right)&=\det\begin{bmatrix}\lambda I_n&-I_n&\mathbf{0}_n\\\mathbf{0}_n&\lambda I_n&-I_n\\k_1L_1&k_2L_1&\lambda I_n+k_3L_1\end{bmatrix}=\\&\prod_{i=1}^{n}\left[\lambda^3+\left(k_3\lambda^2+k_2\lambda+k_1\right)\mu_i\right]=0\end{aligned}\tag{13}$$

矩阵 L 只有单个简单的零特征值的充要条件为矩阵 $\tilde{L}_1$ 有 3 个零特征值且几何重数为 1. 令

$$f_i(\lambda)=\lambda^3+k_3\mu_i\lambda^2+k_2\mu_i\lambda+k_1\mu_i\tag{14}$$

其中, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $\mu_i=\Re(\mu_i)+\ell(\mu_i)\,j$, 则式 (14) 等价于

$$\begin{aligned}&\lambda^3+k_3\left(\Re(\mu_i)+\ell(\mu_i)\,j\right)\lambda^2+k_2\left(\Re(\mu_i)+\right.\\&\left.\ell(\mu_i)\,j\right)\lambda+k_1\left(\Re(\mu_i)+\ell(\mu_i)\,j\right)=0\end{aligned}\tag{15}$$

由引理 2 和引理 3 可知, 式 (15) 的全部特征值具有负实部的充分条件等价于下列不等式成立

$$\begin{aligned}&B_{1i}=a_{1i}>0\\&B_{2i}=(k_3\Re(\mu_i))^4a_{1,1,i}>0\\&B_{3i}={a_{1,1,i}}^4a_{2,1,i}>0\end{aligned}\tag{16}$$

已知 $k_3>0$ 和有向图 G 有有向生成树, 根据引理 1 可知 $B_{1i}>0$ 显然成立, 因此, 式 (16) 等价于

$$\begin{aligned}a_{1,1,i}&={a_{0i}}^3{a_{1i}}^3a_{2i}-a_{1i}a_{3i}B_{1i}+b_{2i}\times\\&\quad\left({a_{1i}}^2{a_{0i}}^3b_{1i}-b_{2i}B_{1i}\right)>0\\a_{2,1,i}&={a_{1,1,i}}^3{a_{1i}}^3a_{3i}+b_{1,2,i}\left({a_{1,1,i}}^2\times\right.\\&\quad\left.{a_{1i}}^3b_{2i}-b_{1,2,i}{a_{1i}}^4a_{1,1,i}\right)>0\end{aligned}\tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}&a_{0i}=1,&&b_{0i}=0\\&a_{1i}=k_3\Re(\mu_i),&&b_{1i}=k_3\ell(\mu_i)\\&a_{2i}=k_2\Re(\mu_i),&&b_{2i}=k_2\ell(\mu_i)\\&a_{3i}=k_1\Re(\mu_i),&&vb_{3i}=k_1\ell(\mu_i)\\&a_{s,t,i}=b_{s,t,i}=0,&&s+t>3\end{aligned}\tag{18}$$

将式 (18) 代入式 (17) 即可得到式 (12). □

我们知道, 当 G 为无向连通图时, 矩阵 L 除了零特征值外, 其他所有特征值均含有正实部. 那么我们可以得出推论如下.

推论 1. 假设 G 是无向连通图, 三阶系统 (9) 渐近达到一致充要条件中的缩放参数 k_1, k_2 和 k_3 满足如下条件:

$$k_2k_3\mu_i>k_1\tag{19}$$

其中, $\mu_i>0$ ($i=2,\cdots,n$) 是拉普拉斯矩阵 L 的非零特征值.

证明. 当图 G 是无向连通图时, 易知 $\Re(\mu_i)=\mu_i$, $\ell(\mu_i)=0$ 以及 $\mu_i>0$, 将此条件代入式 (12), 得

$$\begin{aligned}&k_2k_3\mu_i>k_1\\&(k_1-k_2k_3\mu_i)^2>0\end{aligned}$$

即等价于式 (19) 成立. □

对于系统 (9), 给出其无向通信拓扑图如图 1 和图 2 所示.

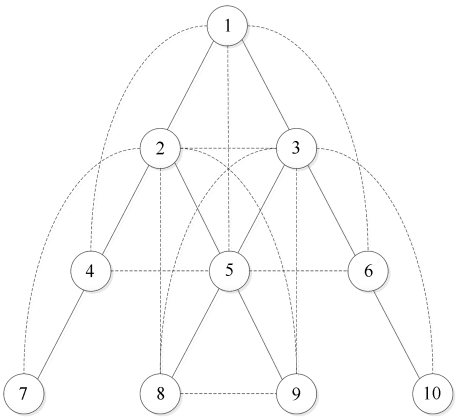


图 1 TNI 一阶与二阶通信拓扑

Fig. 1 TNI first-order and second-order communication topology

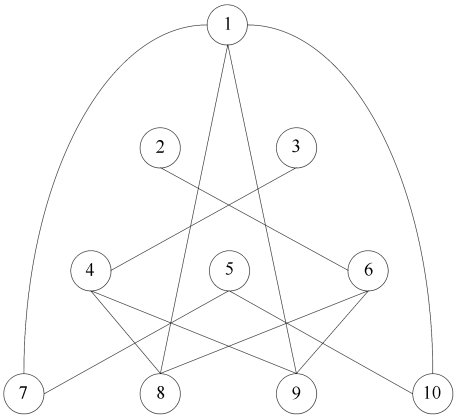


图 2 TNI 三阶通信拓扑

Fig. 2 TNI third-order communication topology

图 1 与图 2 是 TNI 算法所对应的无向通信拓扑, 图 1 中实线连接的两个节点互为一阶邻居节点, 虚线连接的两个节点互为二阶邻居节点, 图 2 实线连接的两个节点互为三阶邻居节点. 其对应的拉普拉斯矩阵为

$$L_1=\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 7 & 0 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 7 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 7 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2.2 PTNI 分析

具有控制输入 (7) 的系统 (4) 可以写为

$$y'(t)=\left(\tilde{L}_2\otimes I_n\right)y \tag{20}$$

其中, $\tilde{L}_2=\begin{bmatrix} O_n & I_n & O_n\\ O_n & O_n & I_n\\ -k_1L_2 & -k_2L_2 & -k_3L_2 \end{bmatrix}$, L_2 为拉普拉斯矩阵.

对于系统 (20), 在 TNI 通信拓扑图的基础上, 不改变一阶与二阶通信拓扑, 通过近邻规则去除了部分三阶通信线路, 去除方法如下.

图 1 和图 2 给出了一阶、二阶和三阶通信拓扑图, 图 3 是对应的 PTNI 算法, 我们通过近邻原则去除了部分三阶邻居通信线路.

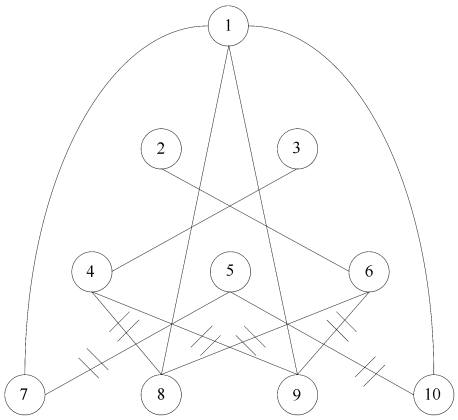


图 3　PTNI 部分三阶通信拓扑

Fig. 3　PTNI part of third-order communication topology

三阶近邻原则为: 越位于上层的智能体就越重要, 每个智能体都会与智能体 1 进行通讯, 在其他智能体与 1 通信时会优先选择复杂度最低的路线. 在图 3 中, 智能体 7 的三阶邻居为 1 和 5, 7 在与 1 进行通讯的时候, 就不会通过 5 再与 1 进行通讯, 智能体 10 同理; 再例如, 8 的三阶邻居为 1, 4, 6, 首先 8 会优先选择直接与 1 通信, 舍弃与 4, 6 之间的通信, 智能体 9 同理.

其对应的拉普拉斯矩阵为

$$L_2=\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.2.3 PPTNI 分析

具有控制输入 (8) 的系统 (4) 可以写为

$$y'(t)=\left(\tilde{L}_3\otimes I_n\right)y \tag{21}$$

其中, $\tilde{L}_3=\begin{bmatrix} O_n & I_n & O_n\\ O_n & O_n & I_n\\ -k_1L_3 & -k_2L_3 & -k_3L_3 \end{bmatrix}$, L_3 为拉普拉斯矩阵.

对于系统 (21), 在 PTNI 通信拓扑图的基础上, 不改变部分三阶通信拓扑, 通过近邻规则去除了部分二阶通信线路, 去除方法如下.

图 3 和图 4 是 PPTNI 算法所对应的无向通信拓扑, 我们通过近邻原则去除了部分二阶与三阶邻居通信线.

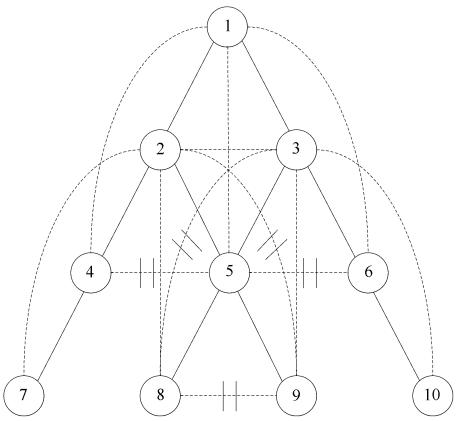


图 4　PTNI 部分二阶通信拓扑

Fig. 4　PTNI part of second-order communication topology

二阶近邻原则为: 越位于上层的智能体就越重要, 每个智能体都会与智能体 1 进行通讯, 在其他智能体与 1 通信时会优先选择复杂度最低的路线, 当某一智能体与另一智能体进行通讯, 并且存在多条复杂度相同的通讯线时, 只会选择其中一条进行通信. 在图 4 中, 智能体 4 的二阶邻居为 1 和 5, 4 在与 1 进行通讯的时候, 就不会通过 5 再与 1 进行通讯, 智能体 6 同理; 再例如, 8 的二阶邻居为 2, 3, 9, 首先 8 只会优先选择上层邻居进行通信而舍弃同层邻居 9, 在与上层邻居 2, 3 通讯的时候, 8 会优先选择 2 进行通信, 然后通过 2 与 1 进行通信 l, 而不会选择越过 5 与 3 通信再与 1 通信, 智能体 9 同理.

其对应的拉普拉斯矩阵为

$$L_3=\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3 一致性仿真

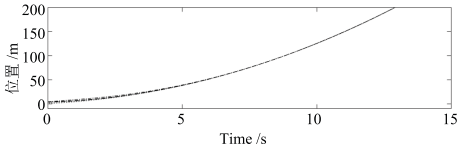
在这部分, 我们将根据上述通信拓扑给出数值例子, 通过仿真检验所提算法的性能. 通过推论 1 给出可调参数 $k_1=0.3$, $k_2=1$ 和 $k_3=1$, 模拟的初始位置、速度和加速度如下:

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}3.5 & 2 & 3 & 3.6 & 2.5 & 3.2 & 3.3 & 2.3 & 0 & 3.8\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{v}_0=\begin{bmatrix}1 & 1.5 & 1.2 & 1.7 & 1.1 & 1.6 & 1.9 & 1.4 & 2.7 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

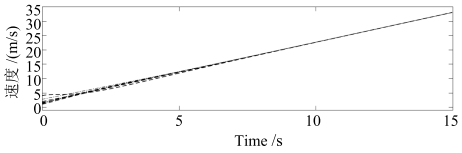
$$\boldsymbol{z}_0=\begin{bmatrix}1.1 & 2 & 2.2 & 1.8 & 3 & 2.5 & 2.7 & 1 & 2.3 & 2.2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

使用给出的数据, 分别得到 TNI、PTNI 和 PPTNI 仿真图, 如图 5 ∼ 7 所示.



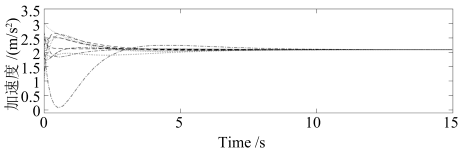
(a) TNI 位置轨迹

(a) TNI position trajectory



(b) TNI 速度轨迹

(b) TNI velocity trajectory

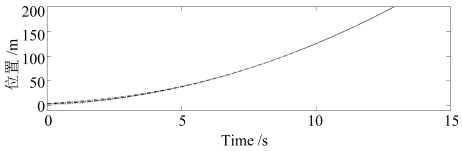


(c) TNI 加速度轨迹

(c) TNI acceleration trajectory

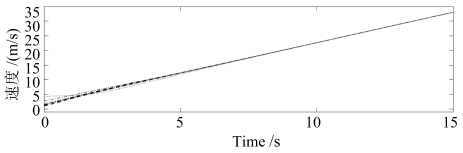
图 5 TNI 仿真图

Fig. 5 Simulated diagrams of TNI



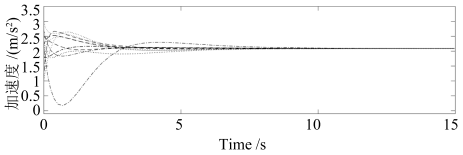
(a) PTNI 位置轨迹

(a) PTNI position trajectory



(b) PTNI 速度轨迹

(b) PTNI velocity trajectory

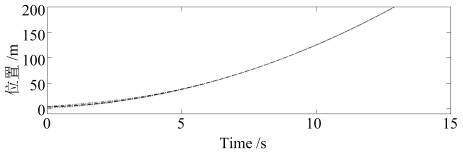


(c) PTNI 加速度轨迹

(c) PTNI acceleration trajectory

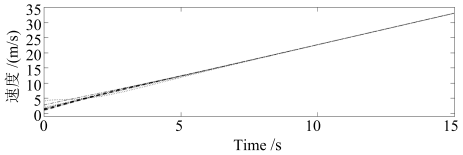
图 6 PTNI 仿真图

Fig. 6 Simulated diagrams of PTNI



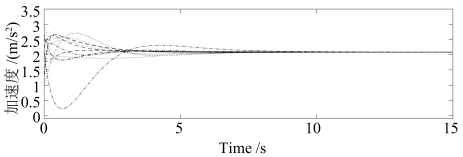
(a) PPTNI 位置轨迹

(a) PPTNI position trajectory



(b)PPTNI 速度轨迹

(b) PPTNI velocity trajectory



(c) PPTNI 加速度轨迹

(c) PPTNI acceleration trajectory

图 7 PPTNI 仿真图

Fig. 7 Simulated diagrams of PPTNI

由仿真结果可知, 三种算法均能够使系统 (4) 在有限时间内快速达到一致性并且性能稳定, 验证了算法的可行性和有效性. 上述仿真数据列如表 1 所示.

表 1 收敛速度达到一致的时间 (取值误差为 1%)

Table 1 Times that the convergence speed achieves consensus

算法	通信线路数量	最小时间 (s)	最大时间 (s)	平均时间 (s)
TNI	35	8.504	10.222	9.381
PTNI	29	8.260	10.015	9.1375
PPTNI	24	8.152	9.959	9.0555

在表 1 中, 分别列出了应用三种算法的多智能体系统达到一致的最小时间, 最大时间和平均时间. 通过表中数据可

以明显看出, 使用部分三阶邻居信息算法 (PTNI) 的系统的一致收敛速度比使用典型三阶邻居信息算法 (TNI) 的系统的一致收敛速度要快, 前者的通讯线路数量从 35 减少到 29, 减少率为 17.14 %, 当通信拓扑图更为复杂时, 后者达到一致的平均时间将明显比前者小的多; 此外, 使用部分二阶与三阶邻居信息算法 (PPTNI) 的系统的收敛速度比典型三阶邻居信息算法 (TNI) 和部分三阶邻居信息算法 (PTNI) 的系统的收敛速度都要快, 并且其通信边缘数量从 35 减少到 24, 减少率为 31.43 %. 当系统更为复杂时, PTNI 算法和 PPTNI 算法达到一致性的时间将减少得更为明显.

由此可见, 在实现多智能体系统一致性的前提下, 部分三阶邻居信息算法 (PTNI) 和部分二阶与三阶邻居信息算法 (PPTNI) 加快了三阶系统一致性达成速度, 提高了系统的效率, 并且优化了通信线数量, 降低了实际成本.

4 结束语

在连通但不相关的通信拓扑图设定下, 本文考虑了多智能体一致性算法中的通信问题. 基于典型三阶邻居信息一致性算法 (TNI), 我们提出了二阶和三阶近邻原则, 进而设计了部分三阶邻居信息算法 (PTNI) 和部分二阶与三阶邻居算法 (PPTNI). 实验结果表明: TNI 算法可实现多智能体系统的一致性, 解决了一致性问题; 在此基础上, PTNI 和 PPTNI 收敛速度均快于 TNI, 并且通讯代价也大大减少. 这说明 PTNI 和 PPTNI 算法能够发挥优化作用, 在提高系统的响应速度的同时, 也降低了实际成本.

References

1 Kim T H, Sugie T. Cooperative control for targetcapturing task based on a cyclic pursuit strategy. *Automatica*, 2007, **43**(8): 1426−1431

2 Yang F, Liu S R, Liu F. Cooperative transport strategy for formation control of multiple mo-bile robots. *Journal of Zhejiang University — Science C (Computers and Electronics)*, 2010, **11**(12): 931−938

3 Fiedler M. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1973, **23**(98): 298−305

4 She Shou-Xian, Zhao Yan. Jerk (the time rate of change of acceleration) — impact, passenger′s comfortability, transition curve. 2001, *Physics and Engineering* **11**(3): 7−12
(佘守宪, 赵雁. 加加速度 (加速度的时间变化率) — 冲击、乘座舒适性、缓和曲线. 物理与工程, 2001, **11**(3): 7−12)

5 Olfati-Saber R, Murry R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and timedelays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520−1533

6 Sun Y G, Wang L, Xie G M. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple timevarying delays. *Systems and Control Letters*, 2007, **57**(2): 175−183

7 Lin P, Jia Y M. Consensus of second-order discrete-time multiagent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies. *Automatica*, 2009, **45**(9): 2154−2158

8 Yu W W, Chen G R, Cao M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems. *Automatica*, 2010, **46**(6): 1089−1095

9 Xu Ge-Sheng, Huang Chi, Zhai Gui-Sheng. Necessary and sufficient condition for designing formation in third-order multiagent systems. *Journal of University of Jinan (Science and Technology)*, 2019, **33**(1): 81−87
(许格升, 黄迟, 翟贵生. 三阶多智能体系统设计编队的充要条件. 济南大学学报 (自然科学版), 2019, **33**(1): 81−87)

10 Dong Tao, Li Xiao-Li, Zhao Da-Duan. Event-triggered consensus of third-order discrete-time multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(7): 1366−1372
(董滔, 李小丽, 赵大端. 基于事件触发的三阶离散多智能体系统一致性分析. 自动化学报, 2019, **45**(7): 1366−1372)

11 Huang C, Zhai G S, Xu G S. Necessary and sufficient conditions for consensus in third order multi-agent systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, **5**(6): 1044−1053

12 Liu J, An B R, Wu H. Consensus of third-order multi-agent systems with communication delay. In: Proceedings of the 30th China Conference on Control and Decision. Shenyang, China: IEEE, 2018. 1428−1432

13 Wu H, An B R, Song Y H. Consensus of third-order multi-agent systems with fixed topology and input delay. In: Proceedings of the 30th China Conference on Control and Decision. Shenyang, China: IEEE, 2018. 3879−3883

14 Ren W, Moore K L. High-order and model reference consensus algorithms in cooperative control of multivehicle systems. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 2007, **129**(5): 678−688

15 Zhu J D, Yuan L J. Consensus of high-order multi-agents systems with switching topologies. *Linear Algebra and Its Appications*, 2014, **443**(15): 105−119

16 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655−661

17 Fan Hong-Yi. New stability criterion for linear systems with constant complex coefficients. *Journal of Shenyang Architecture and Civil Engineering Institute*, 1997, **13**(1): 96−100
(范弘毅. 复常系数线性系统稳定性的新判据. 沈阳建筑工程学院学报, 1997, **13**(1): 96−100)

18 Horn R A, Johnson C R. *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, UK, 1991.

19 Wei R, Beard R W, Mclain T W. *Coordination Variables and Consensus Building in Multiple Vehicle Systems*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2005.

20 Cao Yan-Fen. Research on Consistency of Third-order Multiagent System. [Master thesis], University of Jinan, China, 2016.
(曹燕粉. 三阶多智能体系统一致性研究 [硕士学位论文]. 济南大学, 中国, 2016.)

严志强 南京理工大学硕士研究生. 主要研究方向为图像处理, 人工智能. E-mail: yanzq@njust.edu.cn
(**YAN Zhi-Qiang** Master student at Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers image processing and artificial intelligence.)

葛 磊 南京理工大学硕士研究生. 主要研究方向为嵌入式开发, 人工智能. E-mail: gl_njust@njust.edu.cn
(**GE Lei** Master student at Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers embedded development and artificial intelligence.)

张跃跃 南京理工大学硕士研究生. 主要研究方向为嵌远程网络控制, 人工智能. E-mail: zyy13142021@163.com
(**ZHANG Yue-Yue** Master student at Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers control of remote network and artificial intelligence.)

窦 磊 南京理工大学研究员. 主要研究方向为导航, 制导与控制, 人工智能. 本文通信作者. E-mail: douleijs@163.com
(**DOU Lei** Professor at Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers guidance, navigation and control, and artificial intelligence. Corresponding author of this paper.)