基于 R2 指标和参考向量的高维多目标进化算法

陈国玉[1] 李军华[1] 黎 明[1] 陈 昊[1]

摘 要 在高维多目标优化中, 不同的优化问题存在不同形状的 Pareto 前沿(PF), 而研究表明大多数多目标进化算法(Multi-objective evolutionary algorithms, MOEAs)在处理不同的优化问题时普适性较差. 为了解决这个问题, 本文提出了一个基于 R2 指标和参考向量的高维多目标进化算法(An R2 indicator and reference vector based many-objective optimization evolutionary algorithm, R2-RVEA). R2-RVEA 基于 Pareto 支配选取非支配解来指导种群进化, 仅当非支配解的数量超过种群规模时, 算法进一步采用种群分解策略和 R2 指标选择策略进行多样性管理. 通过大量的实验证明, 本文提出的算法在处理不同形状的 PF 时具有良好的性能.

关键词 R2 指标, 参考向量, 高维多目标优化, 进化算法

引用格式 陈国玉, 李军华, 黎明, 陈昊. 基于 R2 指标和参考向量的高维多目标进化算法. 自动化学报, 2021, **47**(11): 2675−2690

DOI 10.16383/j.aas.c180722

An R2 Indicator and Reference Vector Based Many-objective Optimization Evolutionary Algorithm

CHEN Guo-Yu[1] LI Jun-Hua[1] LI Ming[1] CHEN Hao[1]

Abstract Some researches point out that the most of existing multi-objective optimization algorithms (MOEAs) shown poor versatility on different shapes of Pareto front (PF) in many-objective optimization. To address this issue, this paper proposes an R2 indicator and reference vector based evolutionary algorithm for many-objective optimization (R2-RVEA). R2-RVEA adopts pareto dominance to select the non-dominated solutions to guide the evolution of population, it will further introduce population partition strategy and R2 indicator selection strategy to manage the diversity when the number of non-dominated solutions is greater than population size. The experimental results demonstrate that the proposed algorithm has good performance in handling different shapes of Pareto front.

Key words R2 indicator, reference vector, many-objective optimization, evolutionary algorithm

Citation Chen Guo-Yu, Li Jun-Hua, Li Ming, Chen Hao. An R2 indicator and reference vector based many-objective optimization evolutionary algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(11): 2675−2690

多目标优化问题(Multi-objective optimization problems, MOPs)[1]是指多个目标被同时优化的问题. 在现实生活中, 经常遇到优化问题包含四个及以上目标, 这类问题统称为高维多目标优化问题(Many-objective optimization problems, MaOPs)[2−4]. 虽然一些经典的多目标进化算法(Multi-objective evolutionary algorithms, MOEAs), NSGA-II[5]、SPEA2[6] 等能够很好地处理多目标优化问题(两个或三个目标), 但是在解决高维多目标优化问题上效果较差.

近年来, 为了提高解决高维多目标优化问题的能力, 研究者们提出了许多优秀的算法, 这些 MOEAs 主要可以分为三类. 1) 基于各种增强收敛性的算法: 该类算法主要是改进 Pareto 支配关系或者提出其他增强收敛性的方法, 通过这些方法提高处理高维多目标优化问题时的收敛性. 例如改进的 Pareto 支配: ϵ 支配[7]、L 最优[8]、模糊支配[9] 和优先级排序[10] 等. 以及其他基于增强收敛性的算法: GrEA[11]、KnEA[12] 等. 2) 基于分解的算法: 该类算法是把一个复杂的高维多目标优化问题分解为一组单目标优化问题(Single-objective optimization problems, SOPs) 或者易于管理的多目标优化问题[13−15], 如 RVEA[16]、SPEA/R[17] 和 NSGA-III[18] 等. 3) 基于评价指标的算法: 该类算法是采

收稿日期 2018-11-01 录用日期 2019-03-08
Manuscript received November 1, 2018; accepted March 8, 2019
国家自然科学基金 (61440049, 61866025, 61866026, 62066031), 江西省自然科学基金 (20181BAB202025), 江西省优势科技创新团队计划 (20181BCB24008) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61440049, 61866025, 61866026, 62066031), Natural Science Foundation of Jiangxi (20181BAB202025), and Superiority Science and Technology Innovation Team Program of Jiangxi (20181BCB24008)
本文责任编委 王鼎
Recommended by Associate Editor WANG Ding
1. 南昌航空大学江西省图像处理与模式识别重点实验室 南昌 330063
1. Key Laboratory of Jiangxi Province for Image Processing and Pattern Recognition, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063

用评价指标作为选择标准来衡量解的质量, 选择机制通过比较解的质量找到更好的解. 这类算法的典型代表包括 IBEA[19]、HypE[20] 和 SMS-EMOA[21] 等.

虽然大多数多目标进化算法能够很好地处理一些高维多目标优化问题, 但这些算法对 Pareto 前沿的形状十分敏感[22], 导致在处理不同形状的 PF 时不能很好地平衡收敛性和多样性. 针对上述问题, 本文提出了一个基于 R2 指标和参考向量的高维多目标进化算法 (R2-RVEA). 该算法的主要创新在于: 1) R2-RVEA 基于 Pareto 支配作为选择标准选取非支配解, 仅当非支配解的数目超过种群规模时, 算法进一步采用 R2 指标选择和种群分解策略共同管理多样性; 2) R2-RVEA 基于 R2 指标进一步选择种群分解淘汰的解, 这有利于保留具有良好收敛性和多样性的解.

1 相关工作

1.1 基于指标的多目标进化算法

目前, 相关文献提出了许多评价指标, 有衡量收敛性的评价指标: 世代距离 (GD)[23]; 衡量多样性的评价指标: PD[24]; 同时衡量收敛性和多样性的评价指标: 反世代距离 (IGD)[25]、超体积 (HV)[26]、R2[27] 以及 IGD-NS[28]. 这些指标广泛的应用于评估解集的质量, 有些指标还被用作 MOEAs 的选择标准.

基于评价指标的 MOEAs 比较典型的算法有: IBEA[19]、HypE[20]、SMS-EMOA[21]. Zitzler 等在 2004 年提出 IBEA[19], 该算法首先用二进制评价指标来定义优化目标, 然后使用它作为选择标准. 通过几个 MOPs 测试问题的实验, 结果表明 IBEA 的性能优于 NSGA-II[5] 和 SPEA2[6]. 同时, IBEA 的主要贡献是为基于评价指标的 MOEAs 提供了一个通用框架, 它可以嵌入其他评价指标设计算法.

SMS-EMOA[21] 是由 Beume 等提出的基于评价指标的 MOEAs. 该算法采用了 HV 指标作为选择标准, 通过实验对比, 可以看出 SMS-EMOA 能够很好地处理多目标优化问题, 但是在处理高维多目标优化问题时, HV 的计算成本会随着目标数目的增加呈指数型增加. 针对这个问题, Bader 和 Zitzler 提出了一种基于快速 HV 的进化算法用于高维多目标优化 (HypE)[20]. 在 HypE 中, 为了减少 HV 计算成本的消耗采用 Monte Carlo 估计法进行估计近似的 HV 值而不是计算精确的 HV 值, 这使得 HV 的计算效率在目标数很大时明显提高.

近年来, 陆续出现了一些基于指标的 MOEAs, 例如: Tian 等[29] 提出了一种基于指标的 MOEAs (AR-MOEA), 该算法采用了 IGD-NS 指标作为选择标准, 并且设计了一种参考点适应方法调整参考点来处理不同形状的 PF; 还有 Sun 等提出的一种基于 IGD 指标的进化算法 (MaOEA/IGD)[30], 该算法采用了 IGD 指标挑选出收敛性和多样性良好的解, 并且利用计算效率较高的支配表方法来分配解的等级值.

最近的一些研究表明 R2 指标能够很好地平衡收敛性和多样性. R2-IBEA[31] 消除了选择中的支配排序, 利用 R2 指标作为选择标准进行个体选择. 通过实验表明, 该算法能够在空间中产生分布较好的个体. Trautmann 等提出了一个基于 R2 指标选择的多目标搜索算法 (R2-EMOA)[32], 该算法首先采用非支配排序管理种群, 而 R2 指标作为第二选择标准管理非支配排序的临界层. 此外, MOMBI-II[33] 通过采用成就量化函数 (ASF) 替代加权切比雪夫度量以处理高维多目标优化问题, 并提出一种参考点更新方法来解决归一化过程中解集的多样性对选择参考点敏感的问题. 通过与多个算法大量的对比实验表明, MOMBI-II 能够很好地处理超多目标优化问题. 近期, Li 等提出了一个基于两阶段 R2 指标的高维多目标进化算法 (TS-R2EA)[34], 首先采用 R2 指标作为主要选择方法, 参考向量引导的目标空间划分方法则作为第二选择策略. 这些基于 R2 指标的算法在处理 MOPs 和 MaOPs 上都展现了良好的性能, 此外, R2 指标低计算复杂度和弱支配兼容性的特性非常适合作为选择标准应用到算法中.

1.2 基于分解的多目标进化算法

MOEA/D[13] 是基于分解的 MOEAs 的代表性算法, 它设置了一组均匀分布的权重向量, 将高维多目标优化问题分解为一组子问题, 而每个子问题的优化都是使用其相邻子问题的当前信息. 此外, 在 RVEA[16] 中, 它采用一组均匀分布的参考向量, 把高维多目标优化问题分解为一组单目标问题 (SOPs), 使得候选解收敛到每个单目标问题的最优情况, 而无需考虑不同目标之间的冲突, 通过大量实验证明, RVEA 能够很好地处理高维多目标优化问题.

基于分解的多目标进化算法基本上采用参考点、参考向量以及权重向量等分解目标空间, 由于它们作用相同, 本文统一定义为参考向量. Das 和 Dennis 提出的系统化方法[35] 是一种广泛使用的参考向量生成方法, 该方法把点放在标准化的超平面上 (一个 $(M-1)$ 维的单元网格) 倾向于所有目标轴并且在每个坐标轴上都有一个截距. 如果每个目标都考虑到 p 个网格, 则一个 M 目标上总数

为 N 的参考向量为:

$$N = \binom{M+p-1}{p} \tag{1}$$

例如在一个 3 目标 ($M = 3$) 问题上, 考虑到每个目标有 4 个网格 ($p = 4$), 则生成总数为 15 的参考向量如图 1 所示.

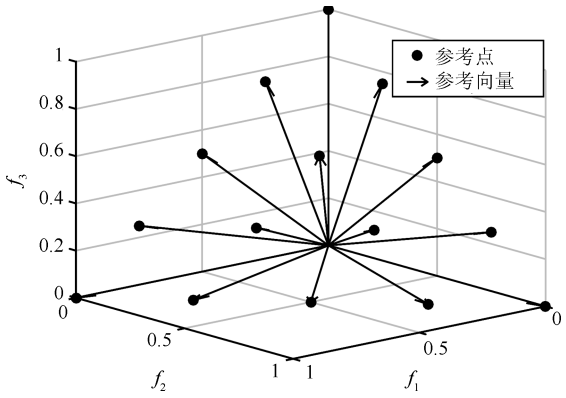


图 1　目标问题上展示的 15 个参考向量

Fig. 1　15 reference vectors are shown on 3-objective problem

2　基于 R2 指标和参考向量的高维多目标进化算法

2.1　基于分解的多目标进化算法

R2-RVEA 采用 Pareto 支配作为选择标准, 选取非支配解指导种群进化, 当非支配解的数目超过种群规模时, 算法进一步采用种群分解策略和 R2 排序选择管理多样性. 由于很多时候种群分解选取解的数目无法满足种群规模, 利用 R2 排序能够从种群分解淘汰的解中保留收敛性和多样性较好的解来进一步满足种群规模. 如算法 1 所示, R2-RVEA 的主要框架包含了下面的步骤: 首先, 初始生成一个规模为 N 的种群, 以及一个均匀分布的参考向量集合 V 规模为 N; 然后, 在主循环中, 子代 Q_t 由父代 P_t 随机生成, 合并到父代种群 P_t 中进入环境选择; 最后, 执行环境选择从合并种群中挑选出 N 个候选解进入下一代. 在下面会着重介绍三个子部分, 分别是环境选择、种群分解和 R2 排序.

算法 1. R2-RVEA 算法框架

输入: N (种群规模、参考向量数目), $t_{\max}$ (最大进化代数);
输出: $P_{t_{\max}}$ (最终种群);

1) $\boldsymbol{V}$ = UniformReferenceVector(N);
2) P_0 = InitializePopulation(N);
3) **while** $t < t_{\max}$ **do**
4)　Q_t = OffspringCreation(P_t);
5)　$P_t = P_t \cup Q_t$;
6)　P_{t+1} = EnvironmentalSelection(P_t, $\boldsymbol{V}$);
7)　$t = t + 1$;
8) **end while**

2.2　环境选择

如算法 2 所示, 环境选择的最初阶段只采用非支配排序获得当前种群的非支配解集合 A_t, 如果 A_t 中解的数目小于等于种群规模 N, A_t 就会作为种群 P_{t+1} 进入下一代, 这使得种群可以快速地收敛到 PF 上, 并且避免较差解误导种群进化方向.

算法 2. 环境选择

输入: P_t (合并后的种群), $\boldsymbol{V}$ (参考向量);
输出: P_{t+1} (下一代种群);

1) $(F_1, F_2, \cdots)$ = NondominatedSort(P_t);
2) 获取当前种群的非支配解: $A_t = F_1$;
3) **if** $|A_t| \le N$ **then**
4)　$P_{t+1} = A_t$;
5) **else**
6)　/* 目标值标准化 */
7)　**for** $i = 1$ to M **do**
8)　　计算理想点 $z^i_{\min} = \min_{p \in A_t} f_{t,i}(p)$;
9)　　计算最差点 $z^i_{\max} = \max_{p \in A_t} f_{t,i}(p)$;
10)　**end for**;
11)　$f'_{t,i}(p) = \frac{f_{t,i}(p) - z^i_{\min}}{z^i_{\max} - z^i_{\min}}$;
12)　/* 种群分解 */
13)　$\overline{P}_t$ = PopulationPartition($A_t, F'_t(p), \boldsymbol{V}, z^i_{\min}$);
14)　**if** $|\overline{P}_t| = N$ **then**
15)　　$P_{t+1} = \overline{P}_t$;
16)　**else**
17)　　/*R2 排序 */
18)　　$k = N - |\overline{P}_t|$;
19)　　R_t = R2ranking($A_t - \overline{P}_t, \boldsymbol{V}, z^i_{\min}, z^i_{\max}, k$);
20)　　$P_{t+1} = \overline{P}_t \cup R_t$;
21)　**end if**
22) **end if**

当 A_t 中非支配解的数目大于 N 时, 采用种群分解策略和 R2 排序选择管理种群. 在执行上述操作之前, 首先要进行目标值标准化: 种群中解的目标值为 $f_t(p) = \{f_{t,1}(p), f_{t,2}(p), \cdots, f_{t,|A_t|}(p)\}$, $p \in A_t$, 目标值标准化首先通过非支配解集合计算得出理想点 $z_{\min} = (z^1_{\min}, z^2_{\min}, \cdots, z^M_{\min})$ 和最差点 $z_{\max} = (z^1_{\max}, z^2_{\max}, \cdots, z^M_{\max})$, $z^i_{\min} = \min(f_{t,i}(p))$ 和 $z^i_{\max} = \max(f_{t,i}(p))$, $i = 1, \cdots, M$; 则 $F_t(p)$ 转化为 $F'_t(p)$ 经过如下标准化等式:

$$f'_{t,i}(p) = \frac{f_{t,i}(p) - z^i_{\min}}{z^i_{\max} - z^i_{\min}} \tag{2}$$

$i \in \{1, \cdots, M\}$, $f_{t,i}(p)$ 和 $f'_{t,i}(p)$ 分别表示第 i 个解的标准化前和标准化后的目标值.

种群进行目标值标准化以后就会进入种群分解, 从而获得解集 $\overline{P_t}$, 这时候需要判断解集 $\overline{P_t}$ 中解的数目是否满足种群规模, 若不满足就需要采用 R2 排序选取缺少的 k 个解得到解集 R_t. 值得注意的是, 在很多情况下集合 $\overline{P_t}$ 中解的数目是有限的, 从而无法满足种群规模. 因此, 利用 R2 排序能够从种群分解淘汰的解中保留具有良好收敛性和多样性的解以满足种群规模.

2.3 种群分解

种群分解选择过程如算法 3 所示. 首先, 通过将每个解与最近的参考向量联系起来, 把种群 A_t 分解为一组子种群. 角度可以衡量解和参考向量之间的空间关系, 如果一个解和参考向量之间的角度最小, 那么就会被分配到这个参考向量所代表的子种群中.

算法 3. 种群分解

输入: A_t (非支配解集合), $F'_t(p)$ (标准化后的目标值), $\boldsymbol{V}$ (参考向量);

输出: $\overline{P_t}$ (种群分解获得的解集合);

1) /* 分解种群 */
2) **for** $i = 1$ to $|A_t|$ **do**
3) **for** $j = 1$ to N **do**
4) $\theta_{t,i,j} = \arccos \frac{f'_{t,i}(p) \cdot v_{t,j}}{\|f'_{t,i}(p)\|}$;
5) **end for**
6) **end for**
7) **for** $i = 1$ to $|A_t|$ **do**
8) $r = \underset{j \in \{1,\cdots,N\}}{\arg\min}\ \theta_{t,i,j}$;
9) $\overline{P}_{t,r} = \overline{P}_{t,r} \cup \{S_{t,i}\}$;
10) **end for**
11) /* 精英选择 */
12) **for** $j = 1$ to N **do**
13) **for** $i = 1$ to $|\overline{P}_t|$ **do**
14) $fitness_{t,i,j} = \left(1 + z \cdot M \cdot \frac{\theta_{t,i,j}}{\theta_{v_j}}\right) \cdot \|f'_{t,i}(p)\|$;
15) **end for**
16) **end for**
17) **for** $i = 1$ to N **do**
18) $r = \underset{j \in \{1,\cdots,|\overline{P}_{t,i}|\}}{\arg\min} fitness_{t,i,j}$;
19) $\overline{P}_t = \overline{P}_t \cup \{I_{t,r}\}$;
20) **end for**

经过种群分解以后, 适应度值将作为每个子种群内的选择标准进行精英选择, 适应度值计算公式如下:

$$fitness_{t,i,j} = (1 + z \cdot M \cdot \frac{\theta_{t,i,j}}{\theta_{v_j}}) \cdot \|f'_{t,i}(p)\| \quad (3)$$

和

$$\theta_{v_j} = \min_{i \in \{1,\cdots,N\},\ i \neq j} \langle v_{t,i}, v_{t,j} \rangle \quad (4)$$

M 是目标数目, N 是参考向量数目, z 是最差点 $z_{\max}$ 中最大值和最小值的比值, θ_{v_j} 表示参考向量 $v_{t,j}$ 与其他参考向量的最小夹角, $\|f'_{t,i}(p)\|$ 表示第 i 个解标准化后的范数.

适应度计算同时衡量了解的多样性和收敛性, 利用 θ_{v_j} 对解与向量的夹角进行标准化, 角度标准化过程使得适应度值对解和向量之间的夹角变得敏感, 采用 z 是考虑了在不同目标存在不同量化范围的情况, 这就可以使适应度值计算对多样性敏感, 能够有益于解的选择. 在每个子种群中, 适应度值最小的解会被选作是精英进入下一代, 组成解集合 $\overline{P_t}$.

2.4 R2 排序

R2 指标可以用来评估两个集合的相关质量, 分别由一个给定的近似集合 A、一组权重向量 $\boldsymbol{W}$ 以及效用函数构成, R2 指标定义如下:

$$R2(A, \boldsymbol{W}) = \frac{1}{|\boldsymbol{W}|} \sum_{w \in \boldsymbol{W}} \min_{x \in A} \{\max\{w_i \cdot f_i(x)\}\} \quad (5)$$

$i = 1, \cdots, N$, $\boldsymbol{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 是权重向量. 关于等级的正式定义源于式 (5), 提出如下等式:

$$rank_k = \bigcup_{v \in V} \min_{f(p) \in R2 \setminus B_k} \left\{ \max_{i=\{1,\cdots,N\}} v_i \left| \frac{f_i(p) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}} \right| \right\} \quad (6)$$

$B_k = \{\bigcup_x rank_x | k \geq 2,\ 1 \leq x < k\}$ 是最低等级解的集合. 而当两个解的效用值相同时, 其中具有较低欧氏距离的解将会被选出, 这能够有效地消除松弛的 Pareto 解.

在 R2-RVEA 中, 选择 ASF 作为 R2 排序的效用函数. 首先, 利用式 (6) 计算所有解的函数值, 获得能够优化效用函数的解, 将这些解放在顶层, 这样就获得了第一等级 (最优等级); 然后, 移除第一等级的解, 以同样的方式识别剩下的解, 获得第二等级; 整个排序过程将一直持续, 直到所有的解都被排序. R2 排序过程在算法 4 中给出. 种群分解淘汰的解通过 R2 排序以后, 从排序后的集合中选出前 k 个最好的解组成集合 R_t.

算法 4. R2 排序

输入: $A_t \overline{P}_t$ (种群分解淘汰的解), $\boldsymbol{V} = \{v_1, v_2, \cdots, v_N\}$ (参考向量), $z^i_{\min}$ (理想点), $z^i_{\max}$ (最差点), k (R2 排序需要获得解的数目);

输出: R_t (R2 排序获得的解集合);

1) 种群分解淘汰的解: $R2_t = A_t - \overline{P}_t$;
2) $f'_{t,i}(p) = \frac{f_{t,i}(p) - z^i_{\min}}{z^i_{\max} - z^i_{\min}}, \forall p \in R2_t$;

3) 计算 $R2_t$ 的 L2 标准值;
4) **for** $i = 1$ to N **do**
5)　**for** $j = 1$ to $|R2_t|$ **do**
6)　　$ASF = \max \frac{f'_{t,j}(p)}{v_i}$;
7)　**end for**
8) **end for**
9) 用 ASF 和 L2 标准值对 $R2_t$ 进行升序排列;
10) $rank = 1$, $p.Rank = inf$;
11) **for** $j = 1$ to $|R2_t|$ **do**
12)　$p.Rank = \min(p.Rank, rank)$;
13)　$rank = rank + 1$;
14) **end for**
15) 从 $R2_t$ 中选取 k 个最好的解组成解集 R_t.

3　实验仿真及分析

在这个部分, 提出的算法主要和当前较好的 6 个 MOEAs 进行实验对比, 分别是 NSGA-III[18]、RVEA[16] MOEA/DD[36]、MOMBI-II[33]、KnEA[12] 和 TS-R2EA[34], 实验取自 DTLZ 测试集和 WFG 测试集. 首先, 进行实验设置; 然后, DTLZ 测试集中各个测试问题的实验结果和对比分析; 接下来, WFG 整个测试集的实验结果以及对比分析; 最后, 算法性能分析.

在实验中, 采用了 DTLZ[37] 测试集中的测试问题 DTLZ1-DTLZ7 以及 WFG[38] 测试集中的测试问题 WFG1-WFG9. 在 DTLZ 的一个给定的 M 目标测试问题中, 每一个目标函数都有 $n = k + M - 1$ 个决策变量, 在 DTLZ1 中 k 设置为 5, DTLZ2-DTLZ6 中 k 设置为 10, 以及在 DTLZ7 中 k 设置为 20. 此外, WFG 基准测试套件中每一个给定测试问题的每个目标函数都有 $n = k + l$ 个决策变量, k 设置为 $(M - 1)$ 以及 l 设置为 10. 本文算法基于 MATLAB2016a 实现, 并采用多目标进化算法平台 PlatEMO[39] 进行算法对比.

3.1　实验设置

1) 交叉和变异算子设置: 采用传统的二进制交叉[40] 和多项式变异[41] 适用于所有的多目标进化算法. 在本文中, 交叉概率和变异概率分别设置为 1.0 和 $1/n$ (n 代表决策变量数目). 而 SBX 和多项式变异的分布指标都设置为 20.

2) 种群规模: R2-RVEA、NSGA-III[18]、RVEA[16]、MOEA/DD[36]、MOMBI-II[33]、KnEA[12] 和 TS-R2EA[34] 的种群规模取决于参考向量的数量. 而这些参考向量采用单网格设计系统[18] 生成. 为了对比的公平, KnEA[12] 设置与其他算法相同的种群规模. 详细配置列在表 1 中.

3) 终止条件: 每一次运行的终止条件是最大代数. 对于所有测试问题, 在不同目标上的最大代数设置不同. 在 3 目标和 5 目标的最大代数设置为 1 000, 在 10 目标上设置为 1 300, 而 15 目标的最大代数设置为 1 500.

表 1　种群规模设置

Table 1　Setting of population size

M	(p_1, p_2)	种群规模
3	(12, 0)	105
5	(6, 0)	126
10	(3, 2)	275
15	(2, 1)	135

4) 评价指标: 算法的性能由 HV[23] 指标和 IGD+[42] 指标来评估. 在计算 HV 之前, 所有目标值都要通过 PF 值进行标准化. 然后, HV 值就利用参考点 $(1, 1, \cdots, 1)$ 和标准化后的目标值计算得来. 此外, 一旦目标数目大于等于 5, Monte Carlo[20] 评估方式采用 1 000 000 个样点进行更有效的计算. 在 IGD+ 指标计算中, 对于每个测试实例, 利用 Das 和 Dennis 方法在 PF 上采样大约 5 000 个均匀分布的点. 此外, 对于 10 目标和 15 目标问题, 则采用双层 Das 和 Dennis 方法生成采样点.

5) 统计方法: 每个算法在每个测试问题上都独立运行 30 次, 然后采用 Wilcoxon 秩和检验方法比较 R2-RVEA 与其他对比算法获得的结果, 其中均值分析的显著性水平设置为 0.05. 根据 Wilcoxon 秩和检验方法, '+' 表示对比算法要优于 R2-RVEA, '−' 表示对比算法获得的结果比 R2-RVEA 的结果差, '≈' 表示对比算法和 R2-RVEA 获得的结果没有明显的差异.

6) 对比算法参数设置: 对于 RVEA 和 TS-R2EA, 在对比实验中频率参数 f_r 和指标 α 分别设置为 2 和 0.1. 在 MOEA/DD 中, 邻域规模 T 和惩罚参数 θ 分别设置为 20 和 5, 临近选择概率设置为 $\delta = 0.9$. 对于 MOMBI-II, 差异门限 α, 公差门限 ϵ 和最小向量的记录规格分别设置为 0.5, 0.001 和 5. KnEA 的参数设置参考文献 [12].

3.2　算法在 DTLZ1-DTLZ7 上对比分析

该节给出了 7 个算法在 DTLZ 测试集上的实验结果, 表 2 和表 3 分别汇总了对比算法所获得的 HV 值和 IGD+ 值的均值和标准差 (括号内为标准差). 其中, 突出最好的结果.

综合 HV 和 IGD+ 的统计数据分析结果. DTLZ1-DTLZ4 具有规则形状的 PF, 虽然 R2-RVEA 没有在所有测试实例中获得最具竞争力的性能, 但总体上获得了良好的性能, 由图 2 可以看到各个算法获得的非支配解在 DTLZ4 上 15 目标

表 2 R2-RVEA、NSGA-III、RVEA、MOEA/DD、MOMBI-II、KnEA 和 TS-R2EA 在 DTLZ1−DTLZ7 上获得的 HV 值的统计结果 (均值和标准差). 最好的结果已突出

Table 2 The statistical results (mean and standard deviation) of the HV values obtained by R2-RVEA, NSGA-III, RVEA, MOEA/DD, MOMBI-II, KnEA and TS-R2EA on DTLZ1 to DTLZ7. The best results are highlighted

问题	M	R2-RVEA	NSGA-III	RVEA	MOEA/DD	MOMBI-II	KnEA	TS-R2EA
DTLZ 1	3	8.3819×10^{-1}	8.4373×10^{-1}	8.4431×10^{-1}	8.4426×10^{-1}	8.4357×10^{-1}	7.8436×10^{-1}	8.4419×10^{-1}
		(1.31×10^{-2})	$(1.16 \times 10^{-3})+$	$(1.41 \times 10^{-4})+$	$(2.26 \times 10^{-4})+$	$(9.08 \times 10^{-4}) \approx$	$(4.64 \times 10^{-2})-$	$(3.44 \times 10^{-4})+$
	5	9.6015×10^{-1}	9.2764×10^{-1}	9.7488×10^{-1}	9.7484×10^{-1}	9.3835×10^{-1}	7.6616×10^{-1}	9.7486×10^{-1}
		(4.69×10^{-2})	$(1.43 \times 10^{-1})-$	$(2.27 \times 10^{-4})+$	$(2.75 \times 10^{-4})+$	$(1.26 \times 10^{-1})-$	$(9.09 \times 10^{-2})-$	$(2.27 \times 10^{-4})+$
	10	9.9892×10^{-1}	9.9520×10^{-1}	9.9968×10^{-1}	9.9518×10^{-1}	9.4328×10^{-1}	4.0984×10^{-1}	9.9970×10^{-1}
		(5.94×10^{-4})	$(2.43 \times 10^{-2})-$	$(1.88 \times 10^{-5})+$	$(2.46 \times 10^{-2})-$	$(4.34 \times 10^{-2})-$	$(1.92 \times 10^{-1})-$	$(2.11 \times 10^{-5})+$
	15	8.7065×10^{-1}	4.8134×10^{-1}	9.4387×10^{-1}	9.5591×10^{-1}	7.4281×10^{-1}	6.4831×10^{-2}	6.1864×10^{-1}
		(2.75×10^{-1})	$(4.84 \times 10^{-1})-$	$(1.71 \times 10^{-1})+$	$(1.36 \times 10^{-1})+$	$(1.91 \times 10^{-1})-$	$(1.30 \times 10^{-1})-$	$(3.77 \times 10^{-1})-$
DTLZ 2	3	5.6302×10^{-1}	5.6303×10^{-1}	5.6302×10^{-1}	5.6302×10^{-1}	5.6299×10^{-1}	5.2089×10^{-1}	5.6302×10^{-1}
		(5.99×10^{-6})	$(7.97 \times 10^{-7}) \approx$	$(6.53 \times 10^{-7}) \approx$	$(3.98 \times 10^{-7}) \approx$	$(2.19 \times 10^{-5})-$	$(1.20 \times 10^{-2})-$	$(2.36 \times 10^{-6})-$
	5	7.9493×10^{-1}	7.9498×10^{-1}	7.9492×10^{-1}	7.9484×10^{-1}	7.9470×10^{-1}	7.4725×10^{-1}	7.9479×10^{-1}
		(4.55×10^{-4})	$(3.66 \times 10^{-4}) \approx$	$(3.75 \times 10^{-4}) \approx$	$(3.71 \times 10^{-4}) \approx$	$(4.13 \times 10^{-4})-$	$(1.23 \times 10^{-2})-$	$(3.90 \times 10^{-4}) \approx$
	10	9.6978×10^{-1}	9.4911×10^{-1}	9.6983×10^{-1}	9.6978×10^{-1}	9.7090×10^{-1}	9.2287×10^{-1}	9.7057×10^{-1}
		(1.74×10^{-4})	$(3.63 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.64 \times 10^{-4}) \approx$	$(1.72 \times 10^{-4}) \approx$	$(1.49 \times 10^{-3})+$	$(8.30 \times 10^{-3})-$	$(1.66 \times 10^{-4})+$
	15	9.9057×10^{-1}	9.6345×10^{-1}	9.7793×10^{-1}	9.9063×10^{-1}	8.1493×10^{-1}	9.6726×10^{-1}	9.8690×10^{-1}
		(4.02×10^{-4})	$(1.75 \times 10^{-2})-$	$(4.01 \times 10^{-2})-$	$(2.44 \times 10^{-4}) \approx$	$(9.09 \times 10^{-2})-$	$(9.69 \times 10^{-3})-$	$(2.06 \times 10^{-3}) \approx$
DTLZ 3	3	3.1493×10^{-1}	3.3928×10^{-1}	4.4454×10^{-1}	3.8776×10^{-1}	4.5790×10^{-1}	3.8655×10^{-1}	4.6543×10^{-1}
		(2.64×10^{-1})	$(2.64 \times 10^{-1}) \approx$	$(2.26 \times 10^{-1})+$	$(2.55 \times 10^{-1})+$	$(2.08 \times 10^{-1})+$	$(1.84 \times 10^{-1}) \approx$	$(2.12 \times 10^{-1}) \approx$
	5	3.7400×10^{-1}	1.5350×10^{-1}	2.8806×10^{-1}	4.5110×10^{-1}	3.9824×10^{-1}	3.5245×10^{-1}	7.9253×10^{-1}
		(3.68×10^{-1})	$(2.96 \times 10^{-1})-$	$(3.85 \times 10^{-1})-$	$(3.88 \times 10^{-1}) \approx$	$(3.80 \times 10^{-1}) \approx$	$(3.42 \times 10^{-1}) \approx$	$(2.14 \times 10^{-3})+$
	10	5.7253×10^{-1}	1.2957×10^{-1}	8.7219×10^{-1}	7.7563×10^{-1}	7.9552×10^{-1}	9.4859×10^{-2}	8.0885×10^{-1}
		(2.29×10^{-1})	$(3.35 \times 10^{-1})-$	$(2.96 \times 10^{-1})+$	$(3.94 \times 10^{-1})+$	$(2.33 \times 10^{-1})+$	$(1.25 \times 10^{-1})-$	$(3.68 \times 10^{-1})+$
	15	1.8380×10^{-1}	0.0000×10^{0}	1.5858×10^{-1}	6.5490×10^{-2}	1.2904×10^{-1}	0.0000×10^{0}	1.2832×10^{-1}
		(3.12×10^{-1})	$(0.00 \times 10^{0})-$	$(3.61 \times 10^{-1}) \approx$	$(2.49 \times 10^{-1})-$	$(1.89 \times 10^{-1}) \approx$	$(0.00 \times 10^{0})-$	$(3.33 \times 10^{-1}) \approx$
DTLZ 4	3	5.5571×10^{-1}	4.9607×10^{-1}	5.6302×10^{-1}	5.6302×10^{-1}	5.4835×10^{-1}	5.2680×10^{-1}	5.6302×10^{-1}
		(4.00×10^{-2})	$(1.04 \times 10^{-1})-$	$(1.76 \times 10^{-6}) \approx$	$(9.77 \times 10^{-7}) \approx$	$(5.57 \times 10^{-2})-$	$(8.24 \times 10^{-2})-$	$(3.79 \times 10^{-6}) \approx$
	5	7.9489×10^{-1}	7.8461×10^{-1}	7.9488×10^{-1}	7.9488×10^{-1}	7.5533×10^{-1}	7.7479×10^{-1}	7.9462×10^{-1}
		(3.32×10^{-4})	$(3.14 \times 10^{-2}) \approx$	$(4.10 \times 10^{-4}) \approx$	$(3.94 \times 10^{-4}) \approx$	$(4.54 \times 10^{-2})-$	$(4.58 \times 10^{-3})-$	$(3.32 \times 10^{-4})-$
	10	9.6980×10^{-1}	9.5960×10^{-1}	9.6983×10^{-1}	9.6977×10^{-1}	9.7012×10^{-1}	9.5269×10^{-1}	9.7122×10^{-1}
		(1.43×10^{-4})	$(2.48 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.87 \times 10^{-4}) \approx$	$(1.78 \times 10^{-4}) \approx$	$(4.66 \times 10^{-3})+$	$(2.39 \times 10^{-3})-$	$(1.77 \times 10^{-4})+$
	15	9.9066×10^{-1}	9.7301×10^{-1}	9.8919×10^{-1}	9.8905×10^{-1}	9.7826×10^{-1}	9.7895×10^{-1}	9.8939×10^{-1}
		(8.86×10^{-5})	$(1.36 \times 10^{-2})-$	$(2.57 \times 10^{-3}) \approx$	$(3.03 \times 10^{-3})-$	$(1.03 \times 10^{-2})-$	$(2.52 \times 10^{-3})-$	$(2.01 \times 10^{-3})-$
DTLZ 5	3	1.9397×10^{-1}	1.9223×10^{-1}	1.6284×10^{-1}	1.8376×10^{-1}	1.9214×10^{-1}	1.7826×10^{-1}	1.9283×10^{-1}
		(1.20×10^{-4})	$(1.03 \times 10^{-3})-$	$(3.84 \times 10^{-3})-$	$(3.37 \times 10^{-4})-$	$(3.58 \times 10^{-7})-$	$(1.21 \times 10^{-2})-$	$(7.92 \times 10^{-4})-$
	5	9.2958×10^{-2}	8.9794×10^{-2}	1.0617×10^{-1}	1.1298×10^{-1}	9.0987×10^{-2}	4.3747×10^{-2}	1.0603×10^{-1}
		(3.69×10^{-3})	$(2.82 \times 10^{-2}) \approx$	$(4.51 \times 10^{-3})+$	$(4.15 \times 10^{-4})+$	$(2.37 \times 10^{-4})-$	$(4.20 \times 10^{-2})-$	$(1.47 \times 10^{-3})+$
	10	9.3278×10^{-2}	6.7279×10^{-3}	9.1255×10^{-2}	9.4192×10^{-2}	9.1736×10^{-2}	8.5522×10^{-2}	9.1402×10^{-2}
		(1.61×10^{-3})	$(1.68 \times 10^{-2})-$	$(4.75 \times 10^{-4})-$	$(2.56 \times 10^{-4})+$	$(1.49 \times 10^{-3})-$	$(1.49 \times 10^{-2})-$	$(5.49 \times 10^{-4})-$
	15	9.2486×10^{-2}	8.9842×10^{-2}	9.1006×10^{-2}	9.2026×10^{-2}	9.1297×10^{-2}	2.7606×10^{-2}	9.1402×10^{-2}
		(5.85×10^{-4})	$(2.02 \times 10^{-3})-$	$(4.04 \times 10^{-4})-$	$(4.99 \times 10^{-4})-$	$(3.76 \times 10^{-4})-$	$(3.86 \times 10^{-2})-$	$(5.49 \times 10^{-4})-$

表 2　R2-RVEA、NSGA-III、RVEA、MOEA/DD、MOMBI-II、KnEA 和 TS-R2EA 在 DTLZ1−DTLZ7 上获得的 HV 值的统计结果 (均值和标准差). 最好的结果已突出 (续表)

Table 2　The statistical results (mean and standard deviation) of the HV values obtained by R2-RVEA, NSGA-III, RVEA, MOEA/DD, MOMBI-II, KnEA and TS-R2EA on DTLZ1 to DTLZ7. The best results are highlighted (Continued table)

问题	M	R2-RVEA	NSGA-III	RVEA	MOEA/DD	MOMBI-II	KnEA	TS-R2EA
DTLZ 6	3	1.9395×10^{-1}	1.9013×10^{-1}	1.5924×10^{-1}	1.8333×10^{-1}	1.9214×10^{-1}	1.7447×10^{-1}	1.9123×10^{-1}
		(1.70×10^{-4})	$(1.46 \times 10^{-3})-$	$(5.93 \times 10^{-3})-$	$(1.24 \times 10^{-4})-$	$(4.32 \times 10^{-7})-$	$(1.64 \times 10^{-2})-$	$(1.38 \times 10^{-3})-$
	5	9.5588×10^{-2}	7.5292×10^{-2}	1.0069×10^{-1}	1.1288×10^{-1}	9.0926×10^{-2}	6.7599×10^{-2}	1.0428×10^{-1}
		(5.77×10^{-3})	$(3.47 \times 10^{-2})-$	$(2.20 \times 10^{-2})+$	$(2.53 \times 10^{-4})+$	$(2.81 \times 10^{-4})-$	$(3.79 \times 10^{-2})-$	$(4.98 \times 10^{-3})+$
	10	9.3189×10^{-2}	1.5582×10^{-2}	8.8629×10^{-2}	9.4287×10^{-2}	9.2894×10^{-2}	9.1003×10^{-2}	9.4393×10^{-2}
		(1.68×10^{-3})	$(3.43 \times 10^{-2})-$	$(1.68 \times 10^{-2})-$	$(2.17 \times 10^{-4}) \approx$	$(9.94 \times 10^{-4}) \approx$	$(3.74 \times 10^{-4})-$	$(9.71 \times 10^{-4}) \approx$
	15	9.1311×10^{-2}	7.9684×10^{-3}	9.0626×10^{-2}	9.2156×10^{-2}	9.1576×10^{-2}	8.4945×10^{-2}	8.7853×10^{-2}
		(5.95×10^{-4})	$(2.45 \times 10^{-2})-$	$(2.20 \times 10^{-3}) \approx$	$(2.50 \times 10^{-4})+$	$(5.24 \times 10^{-4})+$	$(2.31 \times 10^{-2})-$	$(1.70 \times 10^{-2})-$
DTLZ 7	3	2.7062×10^{-1}	2.7423×10^{-1}	2.6741×10^{-1}	2.1817×10^{-1}	2.7096×10^{-1}	2.6196×10^{-1}	2.7791×10^{-1}
		(1.53×10^{-2})	$(1.54 \times 10^{-3})+$	$(1.06 \times 10^{-3})-$	$(1.52 \times 10^{-2})-$	$(1.47 \times 10^{-2}) \approx$	$(7.35 \times 10^{-3})-$	$(4.93 \times 10^{-4}) \approx$
	5	2.5738×10^{-1}	2.3857×10^{-1}	2.0656×10^{-1}	9.3745×10^{-2}	2.4331×10^{-1}	2.4015×10^{-1}	2.5103×10^{-1}
		(8.66×10^{-3})	$(7.76 \times 10^{-3})-$	$(9.68 \times 10^{-4})-$	$(1.55 \times 10^{-2})-$	$(6.98 \times 10^{-3})-$	$(2.17 \times 10^{-2})-$	$(1.19 \times 10^{-3})-$
	10	1.9133×10^{-1}	1.9640×10^{-1}	1.7601×10^{-1}	5.6536×10^{-5}	1.5718×10^{-1}	7.5216×10^{-2}	1.8524×10^{-1}
		(2.17×10^{-3})	$(5.63 \times 10^{-3})+$	$(1.34 \times 10^{-2})-$	$(3.83 \times 10^{-5})-$	$(9.13 \times 10^{-3})-$	$(3.47 \times 10^{-2})-$	$(4.94 \times 10^{-3})-$
	15	1.4909×10^{-1}	1.4039×10^{-1}	1.0542×10^{-1}	1.5473×10^{-7}	9.7466×10^{-2}	5.6787×10^{-4}	1.0880×10^{-1}
		(2.38×10^{-3})	$(1.21 \times 10^{-2})-$	$(3.45 \times 10^{-2})-$	$(5.89 \times 10^{-8})-$	$(4.12 \times 10^{-2})-$	$(1.49 \times 10^{-3})-$	$(1.06 \times 10^{-2})-$
$+ / \approx / -$			3 / 7 / 18	8 / 9 / 11	9 / 9 / 10	5 / 5 / 18	2 / 0 / 26	9 / 7 / 12

+, ≈ 和 − 分别表示获得的结果与 R2-RVEA 相比更好, 相似和更差.

表 3　R2-RVEA、NSGA-III、RVEA、MOEA/DD、MOMBI-II、KnEA 和 TS-R2EA 在 DTLZ1 DTLZ7 上获得的 IGD+ 值的统计结果 (均值和标准差). 最好的结果已突出

Table 3　The statistical results (mean and standard deviation) of the IGD+ values obtained by R2-RVEA, NSGA-III, RVEA, MOEA/DD, MOMBI-II, KnEA and TS-R2EA on DTLZ1 to DTLZ7. The best results are highlighted

问题	M	R2-RVEA	NSGA-III	RVEA	MOEA/DD	MOMBI-II	KnEA	TS-R2EA
DTLZ 1	3	1.6235×10^{-2}	1.3651×10^{-2}	1.3492×10^{-2}	1.3523×10^{-2}	1.3709×10^{-2}	2.6216×10^{-2}	1.3571×10^{-2}
		(7.90×10^{-3})	$(3.29 \times 10^{-4})+$	$(1.25 \times 10^{-4})+$	$(1.48 \times 10^{-4})+$	$(2.71 \times 10^{-4}) \approx$	$(9.65 \times 10^{-3})-$	$(3.33 \times 10^{-4})+$
	5	5.0560×10^{-2}	7.3388×10^{-2}	4.6106×10^{-2}	4.5988×10^{-2}	4.8230×10^{-2}	9.3292×10^{-2}	5.3386×10^{-2}
		(6.33×10^{-3})	$(7.15 \times 10^{-2}) \approx$	$(3.46 \times 10^{-4})+$	$(1.35 \times 10^{-4})+$	$(5.92 \times 10^{-3}) \approx$	$(4.42 \times 10^{-2})-$	$(4.06 \times 10^{-2})-$
	10	1.0287×10^{-1}	9.0516×10^{-2}	7.5684×10^{-2}	6.9285×10^{-2}	1.3489×10^{-1}	2.7999×10^{-1}	7.9575×10^{-2}
		(8.43×10^{-3})	$(5.74 \times 10^{-2})+$	$(3.45 \times 10^{-2})+$	$(4.56 \times 10^{-4})+$	$(3.62 \times 10^{-2})-$	$(5.22 \times 10^{-2})-$	$(3.48 \times 10^{-2})+$
	15	2.8426×10^{-1}	5.2357×10^{-1}	2.0300×10^{-1}	1.2789×10^{-1}	2.8165×10^{-1}	9.0915×10^{-1}	2.7442×10^{-1}
		(1.82×10^{-1})	$(3.38 \times 10^{-1})-$	$(1.82 \times 10^{-1})+$	$(8.21 \times 10^{-2})+$	$(1.00 \times 10^{-1}) \approx$	$(7.61 \times 10^{-1})-$	$(3.09 \times 10^{-1}) \approx$
DTLZ 2	3	2.0861×10^{-2}	2.0859×10^{-2}	2.0859×10^{-2}	2.0859×10^{-2}	2.0870×10^{-2}	3.6494×10^{-2}	2.0861×10^{-2}
		(5.70×10^{-6})	$(8.08 \times 10^{-7}) \approx$	$(5.36 \times 10^{-7}) \approx$	$(2.57 \times 10^{-7}) \approx$	$(8.77 \times 10^{-6})-$	$(5.13 \times 10^{-3})-$	$(1.10 \times 10^{-6})-$
	5	7.1279×10^{-2}	7.1282×10^{-2}	7.1283×10^{-2}	7.1283×10^{-2}	7.1348×10^{-2}	8.9581×10^{-2}	7.1291×10^{-2}
		(7.27×10^{-6})	$(1.80 \times 10^{-6})-$	$(5.39 \times 10^{-6})-$	$(6.73 \times 10^{-7})-$	$(4.27 \times 10^{-5})-$	$(4.33 \times 10^{-3})-$	$(4.32 \times 10^{-6})-$
	10	1.7493×10^{-1}	1.9840×10^{-1}	1.6809×10^{-1}	1.7493×10^{-1}	1.6874×10^{-1}	1.8012×10^{-1}	1.7207×10^{-1}
		(2.35×10^{-5})	$(4.82 \times 10^{-2})-$	$(2.66 \times 10^{-5})+$	$(4.25 \times 10^{-6}) \approx$	$(1.06 \times 10^{-3})+$	$(5.20 \times 10^{-3})-$	$(3.32 \times 10^{-4}) \approx$
	15	2.3684×10^{-1}	2.9249×10^{-1}	2.6116×10^{-1}	2.3623×10^{-1}	4.0323×10^{-1}	2.4998×10^{-1}	2.3856×10^{-1}
		(4.10×10^{-4})	$(1.82 \times 10^{-2})-$	$(8.95 \times 10^{-2})-$	$(2.02 \times 10^{-4}) \approx$	$(5.54 \times 10^{-2})-$	$(1.79 \times 10^{-2})-$	$(1.96 \times 10^{-3})-$

表 3 R2-RVEA、NSGA-III、RVEA、MOEA/DD、MOMBI-II、KnEA 和 TS-R2EA 在 DTLZ1 DTLZ7 上获得的 IGD+ 值的统计结果 (均值和标准差). 最好的结果已突出 (续表)

Table 3 The statistical results (mean and standard deviation) of the IGD+ values obtained by R2-RVEA, NSGA-III, RVEA, MOEA/DD, MOMBI-II, KnEA and TS-R2EA on DTLZ1 to DTLZ7. The best results are highlighted (Continued table)

问题	M	R2-RVEA	NSGA-III	RVEA	MOEA/DD	MOMBI-II	KnEA	TS-R2EA
DTLZ 3	3	3.9763×10^{-1}	4.5849×10^{-1}	3.0314×10^{-1}	1.8948×10^{-1}	3.3114×10^{-1}	4.0938×10^{-1}	2.2115×10^{-1}
		(5.49×10^{-1})	$(6.21 \times 10^{-1}) \approx$	$(5.74 \times 10^{-1}) \approx$	$(3.71 \times 10^{-1})+$	$(6.46 \times 10^{-1}) \approx$	$(4.78 \times 10^{-1})-$	$(4.00 \times 10^{-1})+$
	5	3.9944×10^{-1}	1.7578×10^{0}	7.4422×10^{-1}	6.5811×10^{-1}	3.7339×10^{-1}	9.7538×10^{-1}	4.6878×10^{-1}
		(5.79×10^{-1})	$(1.67 \times 10^{0})-$	$(5.86 \times 10^{-1}) \approx$	$(5.59 \times 10^{-1}) \approx$	$(5.22 \times 10^{-1})+$	$(1.31 \times 10^{0})-$	$(5.40 \times 10^{-1})-$
	10	3.7208×10^{-1}	3.2503×10^{0}	4.5932×10^{-1}	4.9410×10^{-1}	3.9303×10^{-1}	1.1755×10^{1}	3.9429×10^{-1}
		(4.00×10^{-1})	$(3.09 \times 10^{0})-$	$(5.80 \times 10^{-1})-$	$(5.27 \times 10^{-1})-$	$(3.16 \times 10^{-1}) \approx$	$(5.73 \times 10^{1})-$	$(4.89 \times 10^{-1})-$
	15	2.6642×10^{0}	9.7830×10^{0}	5.2490×10^{0}	2.7498×10^{0}	3.1399×10^{0}	1.3145×10^{1}	3.3117×10^{0}
		(1.48×10^{0})	$(5.23 \times 10^{0})-$	$(4.15 \times 10^{0}) \approx$	$(2.09 \times 10^{0})-$	$(2.60 \times 10^{0}) \approx$	$(8.69 \times 10^{0})-$	$(2.18 \times 10^{0})-$
DTLZ 4	3	2.0868×10^{-2}	7.5928×10^{-2}	2.0859×10^{-2}	2.0859×10^{-2}	4.1428×10^{-2}	7.7586×10^{-2}	2.0862×10^{-2}
		(1.87×10^{-5})	$(9.29 \times 10^{-2}) \approx$	$(4.09 \times 10^{-7}) \approx$	$(2.72 \times 10^{-7})+$	$(6.27 \times 10^{-2})-$	$(1.50 \times 10^{-1})-$	$(1.74 \times 10^{-6}) \approx$
	5	7.1276×10^{-2}	9.3899×10^{-2}	7.4060×10^{-2}	7.4382×10^{-2}	8.2438×10^{-2}	8.0641×10^{-2}	7.4077×10^{-2}
		(1.24×10^{-5})	$(5.00 \times 10^{-2})-$	$(1.52 \times 10^{-2})-$	$(1.70 \times 10^{-2})-$	$(2.87 \times 10^{-2})-$	$(1.73 \times 10^{-3})-$	$(1.52 \times 10^{-3})-$
	10	1.7497×10^{-1}	1.7695×10^{-1}	1.6849×10^{-1}	1.7081×10^{-1}	1.6532×10^{-1}	1.6217×10^{-1}	1.6820×10^{-1}
		(4.67×10^{-5})	$(2.02 \times 10^{-2})-$	$(1.77 \times 10^{-3}) \approx$	$(3.43 \times 10^{-3}) \approx$	$(6.13 \times 10^{-3})+$	$(2.21 \times 10^{-3})+$	$(5.03 \times 10^{-4}) \approx$
	15	2.3729×10^{-1}	2.6180×10^{-1}	2.3958×10^{-1}	2.4240×10^{-1}	2.6824×10^{-1}	2.3292×10^{-1}	2.4469×10^{-1}
		(3.58×10^{-4})	$(2.54 \times 10^{-2}) \approx$	$(4.59 \times 10^{-3}) \approx$	$(6.98 \times 10^{-3})-$	$(2.33 \times 10^{-2})-$	$(3.23 \times 10^{-3})+$	$(8.10 \times 10^{-3})-$
DTLZ 5	3	6.4126×10^{-3}	7.5607×10^{-3}	3.3584×10^{-2}	1.3345×10^{-2}	7.6588×10^{-3}	1.4326×10^{-2}	7.1355×10^{-3}
		(1.23×10^{-4})	$(8.01 \times 10^{-4})-$	$(4.19 \times 10^{-3})-$	$(3.02 \times 10^{-4})-$	$(3.38 \times 10^{-7})-$	$(7.18 \times 10^{-3})-$	$(5.09 \times 10^{-4})-$
	5	8.2311×10^{-2}	2.3956×10^{-1}	1.7521×10^{-1}	7.2412×10^{-2}	9.4200×10^{-2}	2.4871×10^{-1}	3.8136×10^{-2}
		(1.90×10^{-2})	$(2.11 \times 10^{-1})-$	$(5.25 \times 10^{-2})-$	$(6.75 \times 10^{-3}) \approx$	$(3.23 \times 10^{-5})-$	$(1.59 \times 10^{-1})-$	$(4.16 \times 10^{-3})+$
	10	1.2919×10^{-1}	4.5326×10^{-1}	1.7827×10^{-1}	9.8182×10^{-2}	3.5774×10^{-1}	8.4408×10^{-2}	1.0774×10^{-1}
		(4.14×10^{-2})	$(1.29 \times 10^{-1})-$	$(6.47 \times 10^{-2})-$	$(1.79 \times 10^{-2})+$	$(4.93 \times 10^{-2})-$	$(9.10 \times 10^{-3})+$	$(1.94 \times 10^{-2}) \approx$
	15	1.5729×10^{-1}	1.5942×10^{-1}	3.5936×10^{-1}	5.1183×10^{-2}	3.7512×10^{-1}	3.3561×10^{-1}	1.3229×10^{-1}
		(9.70×10^{-2})	$(7.13 \times 10^{-2}) \approx$	$(5.81 \times 10^{-2})-$	$(1.74 \times 10^{-3})+$	$(2.29 \times 10^{-3})-$	$(2.97 \times 10^{-1})-$	$(6.34 \times 10^{-2}) \approx$
DTLZ 6	3	6.4261×10^{-3}	9.1282×10^{-3}	3.3761×10^{-2}	1.3955×10^{-2}	7.6585×10^{-3}	6.0051×10^{-2}	7.4448×10^{-3}
		$(8.57 \times 10^{-5}$	$(1.10 \times 10^{-3})-$	$(8.06 \times 10^{-3})-$	$(5.10 \times 10^{-4})-$	$(2.94 \times 10^{-7})-$	$(1.07 \times 10^{-2})-$	$(7.09 \times 10^{-4})-$
	5	8.1474×10^{-2}	2.3445×10^{-1}	1.0892×10^{-1}	7.1693×10^{-2}	8.4850×10^{-2}	2.0779×10^{-1}	5.8034×10^{-2}
		(1.79×10^{-2})	$(1.04 \times 10^{-1})-$	$(1.71 \times 10^{-2})-$	$(3.07 \times 10^{-3})+$	$(3.26 \times 10^{-4})-$	$(2.06 \times 10^{-1})-$	$(6.23 \times 10^{-3})+$
	10	7.1984×10^{-2}	1.6206×10^{0}	2.3439×10^{-1}	7.7284×10^{-2}	3.5367×10^{-1}	1.0960×10^{-1}	6.0540×10^{-2}
		(1.08×10^{-2})	$(1.01 \times 10^{0})-$	$(5.94 \times 10^{-2})-$	$(2.48 \times 10^{-2}) \approx$	$(4.32 \times 10^{-2})-$	$(7.24 \times 10^{-2})-$	$(3.57 \times 10^{-2})+$
	15	2.1340×10^{-1}	1.8744×10^{0}	1.8445×10^{-1}	5.1647×10^{-2}	3.7468×10^{-1}	2.9365×10^{-1}	1.1096×10^{-1}
		(9.95×10^{-2})	$(1.17 \times 10^{0})-$	$(1.19 \times 10^{-1}) \approx$	$(2.71 \times 10^{-6})+$	$(4.84 \times 10^{-3})-$	$(2.46 \times 10^{-1}) \approx$	$(1.49 \times 10^{-1})+$
DTLZ 7	3	9.8407×10^{-2}	3.5754×10^{-2}	4.3704×10^{-2}	3.9831×10^{-1}	4.6134×10^{-2}	7.1748×10^{-2}	3.4202×10^{-2}
		(1.34×10^{-1})	$(2.15 \times 10^{-3})+$	$(9.60 \times 10^{-4})+$	$(1.74 \times 10^{-1})-$	$(4.79 \times 10^{-2}) \approx$	$(6.52 \times 10^{-2})+$	$(6.64 \times 10^{-4})+$
	5	1.9604×10^{-1}	1.8190×10^{-1}	2.7929×10^{0}	2.5348×10^{-1}	1.1096×10^{-1}	2.0713×10^{-1}	1.4313×10^{-1}
		(5.86×10^{-2})	$(2.52 \times 10^{-2}) \approx$	$(5.66 \times 10^{-2})-$	$(1.65 \times 10^{-1}) \approx$	$(1.49 \times 10^{-1})+$	$(1.30 \times 10^{-1}) \approx$	$(9.53 \times 10^{-4})+$
	10	1.2600×10^{0}	6.6488×10^{-1}	1.0133×10^{0}	1.2994×10^{0}	4.5256×10^{0}	6.6322×10^{-1}	6.9956×10^{-1}
		(2.10×10^{-2})	$(4.91 \times 10^{-2})+$	$(5.93 \times 10^{-2})+$	$(6.05 \times 10^{-2})-$	$(8.62 \times 10^{-1})-$	$(9.13 \times 10^{-3})+$	$(1.88 \times 10^{-1})+$
	15	8.3596×10^{0}	7.3318×10^{0}	1.5286×10^{0}	2.0686×10^{0}	1.1458×10^{1}	4.7916×10^{0}	2.0481×10^{0}
		(3.76×10^{-2})	$(1.12 \times 10^{0})+$	$(8.28 \times 10^{-2})+$	$(1.74 \times 10^{-1})+$	$(1.70 \times 10^{0})-$	$(9.31 \times 10^{-1})+$	$(6.97 \times 10^{-1})+$
$+ / \approx / -$			5 / 7 / 16	8 / 8 / 12	11 / 7 / 10	3 / 8 / 17	6 / 2 / 20	11 / 6 / 11

+, ≈ 和 − 分别表示获得的结果与 R2-RVEA 相比更好, 相似和更差.

实例中的分布情况. DTLZ5-DTLZ7 具有不规则形状的 PF, 对于 DTLZ5 和 DTLZ6, R2-RVEA 主要在 DTLZ5 的 3 目标和 DTLZ6 的 3 目标上获得了最好的性能, 而在其他目标上的最好性能主要由 MOEA/DD 获得, 由图 3 中可以看到各个算法获得的非支配解在 DTLZ5 上 3 目标实例中的分布情况. 在 DTLZ7 上, 综合两个指标的统计数据得出 R2-RVEA 获得了一般的性能, NSGA-III 性能相对稳定, 总体性能相对较好, 图 4 是各个算法获得的非支配解在 DTLZ7 上 5 目标实例中的分布情况. 综合统计结果可以看出, R2-RVEA 在 DTLZ 测试集上虽然没有在每个测试实例上获得最优的结果, 但总体性能良好.

3.3 算法在 WFG1-WFG9 上对比分析

该节给出了 7 个算法在 WFG 测试集上的实验结果, 表 4 和表 5 分别汇总了对比算法所获得的 HV 值和 IGD+ 值的均值和标准差 (括号内为标准差). 其中, 突出最好的结果.

综合 HV 和 IGD+ 的统计数据分析结果. WFG1 的设计是带有偏见和混合结构的 PF, R2-RVEA 的总体性能良好, 要明显优于对比算法. WFG2 是一种带有断开的 PF, R2-RVEA 在这个测试问题上表现了不错的性能, 在 5 目标数和 10 目标

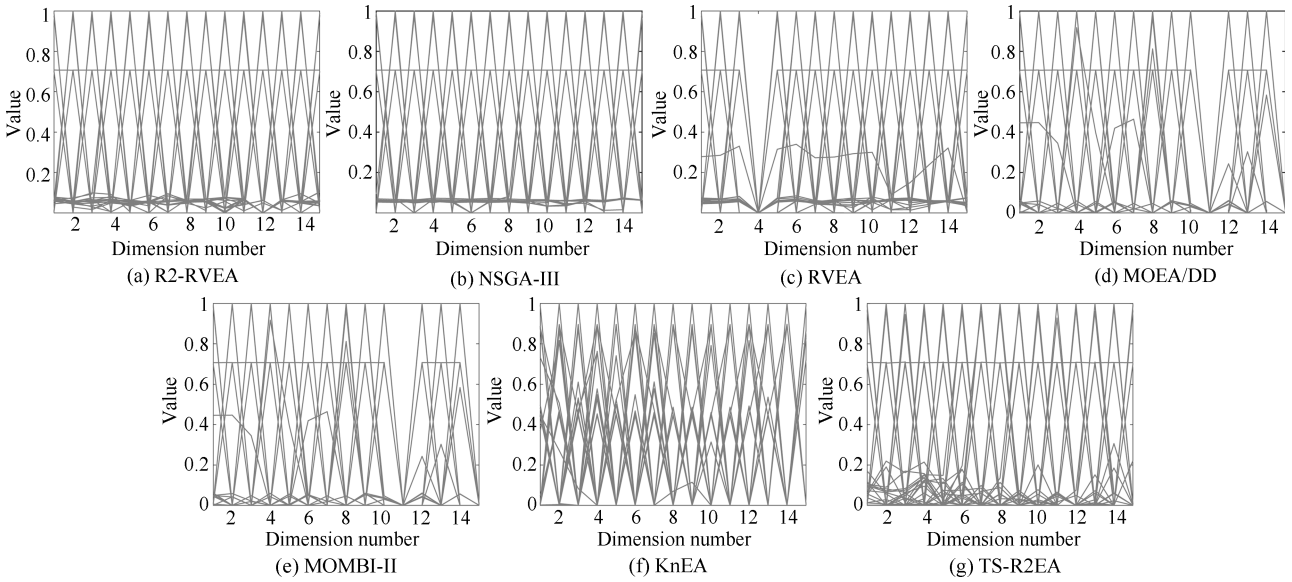


图 2　DTLZ4 问题 15 目标上获得的非支配解

Fig. 2　Nondominated solutions obtained on 15-objective DTLZ4

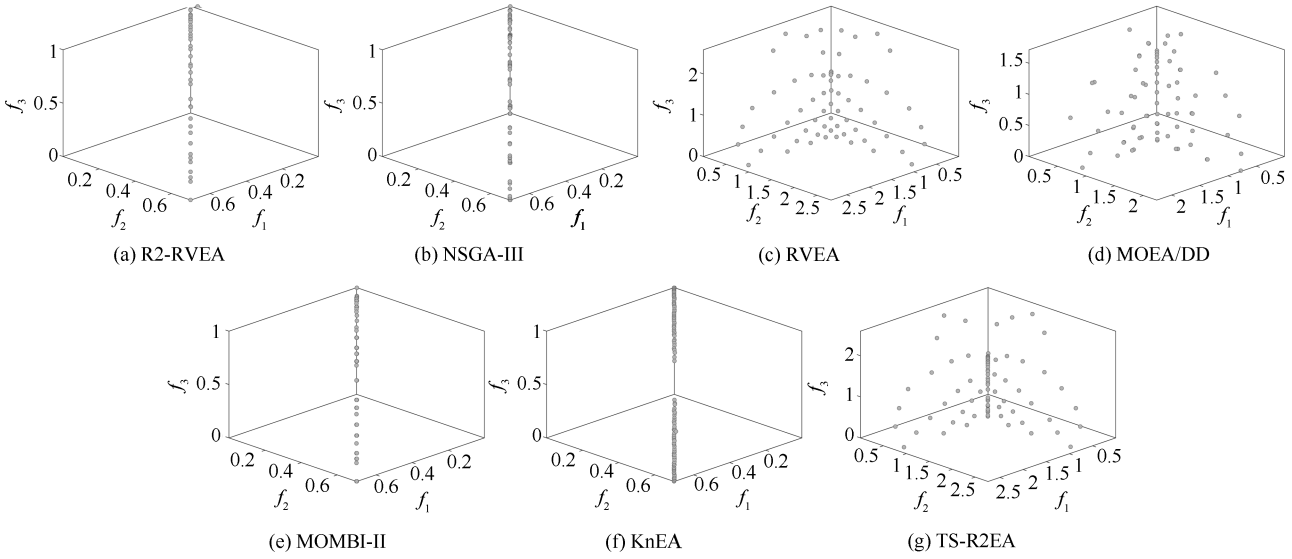


图 3　DTLZ5 问题 3 目标上获得的非支配解

Fig. 3　Nondominated solutions obtained on 3-objective DTLZ5

表 4 R2-RVEA、NSGA-III、RVEA、MOEA/DD、MOMBI-II、KnEA 和 TS-R2EA 在 WFG1-WFG9 上获得的 HV 值的统计结果 (均值和标准差). 最好的结果已突出

Table 4 The statistical results (mean and standard deviation) of the HV values obtained by R2-RVEA, NSGA-III, RVEA, MOEA/DD, MOMBI-II, KnEA and TS-R2EA on WFG1 to WFG9. The best results are highlighted

问题	M	R2-RVEA	NSGA-III	RVEA	MOEA/DD	MOMBI-II	KnEA	TS-R2EA
WFG 1	3	9.4097×10^{-1}	9.3384×10^{-1}	9.4502×10^{-1}	9.1553×10^{-1}	8.8329×10^{-1}	9.2399×10^{-1}	9.3418×10^{-1}
		(1.32×10^{-2})	$(2.98 \times 10^{-2})-$	$(1.09 \times 10^{-3})+$	$(3.55 \times 10^{-2})-$	$(5.34 \times 10^{-2})-$	$(2.53 \times 10^{-2})-$	$(3.48 \times 10^{-2})-$
	5	9.9456×10^{-1}	9.8643×10^{-1}	9.8018×10^{-1}	9.5451×10^{-1}	8.4739×10^{-1}	9.7995×10^{-1}	9.9075×10^{-1}
		(1.96×10^{-2})	$(3.60 \times 10^{-2})-$	$(4.06 \times 10^{-2})-$	$(3.40 \times 10^{-2})-$	$(8.49 \times 10^{-2})-$	$(1.87 \times 10^{-2})-$	$(2.82 \times 10^{-2})-$
	10	9.9957×10^{-1}	9.9912×10^{-1}	9.8000×10^{-1}	9.8795×10^{-1}	9.9607×10^{-1}	9.9527×10^{-1}	9.9888×10^{-1}
		(2.10×10^{-4})	$(6.70 \times 10^{-4})-$	$(3.93 \times 10^{-2})-$	$(1.55 \times 10^{-2})-$	$(1.91 \times 10^{-2})-$	$(1.66 \times 10^{-2})-$	$(3.64 \times 10^{-2})-$
	15	9.9967×10^{-1}	9.9949×10^{-1}	8.9713×10^{-1}	9.3763×10^{-1}	6.5027×10^{-1}	9.8089×10^{-1}	9.4320×10^{-1}
		(2.14×10^{-4})	$(3.42 \times 10^{-4})-$	$(8.87 \times 10^{-2})-$	$(7.46 \times 10^{-2})-$	$(2.44 \times 10^{-1})-$	$(3.34 \times 10^{-2})-$	$(7.47 \times 10^{-2})-$
WFG 2	3	9.2138×10^{-1}	9.2385×10^{-1}	9.1683×10^{-1}	9.1463×10^{-1}	9.1075×10^{-1}	9.0896×10^{-1}	9.2318×10^{-1}
		(8.02×10^{-3})	$(6.17 \times 10^{-3}) \approx$	$(1.11 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.22 \times 10^{-2})-$	$(1.81 \times 10^{-2})-$	$(2.65 \times 10^{-2})-$	$(1.17 \times 10^{-2}) \approx$
	5	9.8369×10^{-1}	9.8358×10^{-1}	9.5373×10^{-1}	9.5536×10^{-1}	9.6469×10^{-1}	9.6900×10^{-1}	9.7339×10^{-1}
		(6.66×10^{-3})	$(7.88 \times 10^{-3}) \approx$	$(1.83 \times 10^{-2})-$	$(1.32 \times 10^{-2})-$	$(1.80 \times 10^{-2})-$	$(1.21 \times 10^{-2})-$	$(1.56 \times 10^{-2})-$
	10	9.9168×10^{-1}	9.8734×10^{-1}	9.3682×10^{-1}	9.3481×10^{-1}	9.7730×10^{-1}	9.8285×10^{-1}	9.6436×10^{-1}
		(4.71×10^{-3})	$(6.36 \times 10^{-3})-$	$(2.27 \times 10^{-2})-$	$(1.89 \times 10^{-2})-$	$(1.08 \times 10^{-2})-$	$(7.58 \times 10^{-3})-$	$(2.13 \times 10^{-2})-$
	15	9.5064×10^{-1}	9.5605×10^{-1}	8.3087×10^{-1}	8.6774×10^{-1}	6.0421×10^{-1}	9.2373×10^{-1}	8.9358×10^{-1}
		(5.65×10^{-2})	$(1.68 \times 10^{-2})+$	$(5.14 \times 10^{-2})-$	$(3.16 \times 10^{-2})-$	$(2.45 \times 10^{-1})-$	$(3.23 \times 10^{-2})-$	$(4.33 \times 10^{-2})-$
WFG 3	3	4.0241×10^{-1}	3.9175×10^{-1}	3.4039×10^{-1}	3.0897×10^{-1}	3.9392×10^{-1}	3.7363×10^{-1}	3.9530×10^{-1}
		(3.81×10^{-3})	$(5.04 \times 10^{-3})-$	$(7.94 \times 10^{-3})-$	$(3.30 \times 10^{-2})-$	$(6.40 \times 10^{-3})-$	$(2.71 \times 10^{-2})-$	$(4.16 \times 10^{-3})-$
	5	1.9039×10^{-1}	1.6387×10^{-1}	9.9662×10^{-2}	1.1461×10^{-1}	8.9617×10^{-2}	7.9870×10^{-2}	1.5854×10^{-1}
		(9.10×10^{-3})	$(2.03 \times 10^{-2})-$	$(4.07 \times 10^{-2})-$	$(2.06 \times 10^{-2})-$	$(3.75 \times 10^{-3})-$	$(2.78 \times 10^{-2})-$	$(2.35 \times 10^{-2})-$
	10	2.7662×10^{-2}	2.3762×10^{-2}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	5.9165×10^{-4}	0.0000×10^{0}	2.6821×10^{-2}
		(3.29×10^{-2})	$(2.69 \times 10^{-2}) \approx$	$(0.00 \times 10^{0})-$	$(0.00 \times 10^{0})-$	$(2.45 \times 10^{-3})-$	$(0.00 \times 10^{0})-$	$(3.10e-2) \approx$
	15	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}	0.0000×10^{0}
		(0.00×10^{0})	$(0.00 \times 10^{0}) \approx$	$(0.00 \times 10^{0}) \approx$	$(0.00 \times 10^{0}) \approx$	$(0.00 \times 10^{0}) \approx$	$(0.00 \times 10^{0}) \approx$	$(0.00 \times 10^{0}) \approx$
WFG 4	3	5.6274×10^{-1}	5.6274×10^{-1}	5.6096×10^{-1}	5.5434×10^{-1}	5.6138×10^{-1}	5.4879×10^{-1}	5.6251×10^{-1}
		(1.26×10^{-4})	$(1.44 \times 10^{-4}) \approx$	$(5.24 \times 10^{-4})-$	$(9.95 \times 10^{-4})-$	$(3.92 \times 10^{-3}) \approx$	$(2.74 \times 10^{-3})-$	$(3.63 \times 10^{-4})-$
	5	7.9406×10^{-1}	7.9388×10^{-1}	7.9302×10^{-1}	7.6900×10^{-1}	7.8312×10^{-1}	7.7583×10^{-1}	7.9231×10^{-1}
		(7.67×10^{-4})	$(6.34 \times 10^{-4}) \approx$	$(9.54 \times 10^{-4})-$	$(8.68 \times 10^{-4})-$	$(2.45 \times 10^{-2})-$	$(4.18 \times 10^{-3})-$	$(1.58 \times 10^{-3})-$
	10	9.6852×10^{-1}	9.6031×10^{-1}	9.6066×10^{-1}	7.6825×10^{-1}	9.2141×10^{-1}	9.5839×10^{-1}	9.7052×10^{-1}
		(7.59×10^{-4})	$(2.55 \times 10^{-4})-$	$(4.21 \times 10^{-3})-$	$(2.17 \times 10^{-4})-$	$(6.09 \times 10^{-4})-$	$(2.16 \times 10^{-3})-$	$(7.92 \times 10^{-4})+$
	15	9.8874×10^{-1}	9.6088×10^{-1}	9.5446×10^{-1}	6.4744×10^{-1}	3.9343×10^{-1}	9.8038×10^{-1}	9.8298×10^{-1}
		(9.66×10^{-4})	$(2.38 \times 10^{-2})-$	$(1.55 \times 10^{-2})-$	$(1.70 \times 10^{-1})-$	$(1.22 \times 10^{-1})-$	$(4.46 \times 10^{-3})-$	$(3.55 \times 10^{-3})-$
WFG 5	3	5.2186×10^{-1}	5.2185×10^{-1}	5.2114×10^{-1}	5.1405×10^{-1}	5.0698×10^{-1}	5.0698×10^{-1}	5.2191×10^{-1}
		(1.51×10^{-5})	$(1.81 \times 10^{-5})-$	$(2.33 \times 10^{-4})-$	$(4.53 \times 10^{-4})-$	$(2.74 \times 10^{-3})-$	$(2.74 \times 10^{-3})-$	$(2.07 \times 10^{-4}) \approx$
	5	7.4397×10^{-1}	7.4384×10^{-1}	7.4391×10^{-1}	7.1885×10^{-1}	7.2692×10^{-1}	7.2414×10^{-1}	7.4386×10^{-1}
		(3.66×10^{-4})	$(3.37 \times 10^{-4}) \approx$	$(3.63 \times 10^{-4}) \approx$	$(5.68 \times 10^{-4})-$	$(1.26 \times 10^{-2})-$	$(3.96 \times 10^{-3})-$	$(1.17 \times 10^{-3}) \approx$
	10	9.0487×10^{-1}	9.0484×10^{-1}	9.0455×10^{-1}	7.8469×10^{-1}	8.6080×10^{-1}	8.9513×10^{-1}	9.0589×10^{-1}
		(1.77×10^{-4})	$(1.53 \times 10^{-4}) \approx$	$(2.23 \times 10^{-4})-$	$(1.21 \times 10^{-2})-$	$(1.05 \times 10^{-2})-$	$(1.94 \times 10^{-3})-$	$(2.49 \times 10^{-4})+$
	15	9.1757×10^{-1}	9.1595×10^{-1}	9.1767×10^{-1}	6.3350×10^{-1}	1.6774×10^{-1}	9.0854×10^{-1}	9.1762×10^{-1}
		(1.11×10^{-4})	$(6.23 \times 10^{-3})-$	$(9.41 \times 10^{-5})+$	$(2.39 \times 10^{-2})-$	$(4.92 \times 10^{-2})-$	$(4.69 \times 10^{-3})-$	$(1.33 \times 10^{-4}) \approx$

表 4 R2-RVEA、NSGA-III、RVEA、MOEA/DD、MOMBI-II、KnEA 和 TS-R2EA 在 WFG1-WFG9 上获得的 HV 值的统计结果 (均值和标准差). 最好的结果已突出 (续表)

Table 4 The statistical results (mean and standard deviation) of the HV values obtained by R2-RVEA, NSGA-III, RVEA, MOEA/DD, MOMBI-II, KnEA and TS-R2EA on WFG1 to WFG9. The best results are highlighted (Continued table)

问题	M	R2-RVEA	NSGA-III	RVEA	MOEA/DD	MOMBI-II	KnEA	TS-R2EA
WFG 6	3	5.0818×10^{-1}	5.1243×10^{-1}	5.0823×10^{-1}	5.0420×10^{-1}	5.0752×10^{-1}	4.8204×10^{-1}	5.0745×10^{-1}
		(1.36×10^{-2})	$(1.32 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.24 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.45 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.29 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.70 \times 10^{-2})-$	$(1.42 \times 10^{-2}) \approx$
	5	7.2593×10^{-1}	7.3070×10^{-1}	7.3015×10^{-1}	6.9856×10^{-1}	7.1566×10^{-1}	6.8244×10^{-1}	7.3271×10^{-1}
		(1.41×10^{-2})	$(1.66 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.90 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.16 \times 10^{-2})-$	$(2.87 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.81 \times 10^{-2})-$	$(1.64 \times 10^{-2}) \approx$
	10	8.8346×10^{-1}	8.8339×10^{-1}	8.7673×10^{-1}	7.2135×10^{-1}	8.8534×10^{-1}	8.5253×10^{-1}	8.7590×10^{-1}
		(1.26×10^{-2})	$(1.97 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.06 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.21 \times 10^{-2})-$	$(3.14 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.22 \times 10^{-2})-$	$(1.91 \times 10^{-2})-$
	15	8.9305×10^{-1}	8.3062×10^{-1}	7.0352×10^{-1}	5.8993×10^{-1}	4.7510×10^{-1}	8.6942×10^{-1}	8.8273×10^{-1}
		(2.01×10^{-2})	$(3.59 \times 10^{-2})-$	$(8.04 \times 10^{-2})-$	$(4.37 \times 10^{-2})-$	$(1.49 \times 10^{-1})-$	$(3.32 \times 10^{-2})-$	$(2.84 \times 10^{-2})-$
WFG 7	3	5.6255×10^{-1}	5.6251×10^{-1}	5.5223×10^{-1}	8.8273×10^{-1}	5.6238×10^{-1}	5.4818×10^{-1}	5.6293×10^{-1}
		(1.73×10^{-4})	$(1.49 \times 10^{-4}) \approx$	$(1.21 \times 10^{-3})-$	$(2.84 \times 10^{-2})-$	$(2.13 \times 10^{-3})-$	$(4.75 \times 10^{-3})-$	$(4.19 \times 10^{-5})+$
	5	7.9328×10^{-1}	7.9299×10^{-1}	7.9151×10^{-1}	7.6426×10^{-1}	7.8989×10^{-1}	7.6829×10^{-1}	7.9436×10^{-1}
		(5.69×10^{-4})	$(5.80 \times 10^{-4}) \approx$	$(1.86 \times 10^{-3})-$	$(5.52 \times 10^{-3})-$	$(6.21 \times 10^{-3}) \approx$	$(8.45 \times 10^{-3})-$	$(5.86 \times 10^{-4})+$
	10	9.6815×10^{-1}	9.6270×10^{-1}	9.6055×10^{-1}	8.3568×10^{-1}	9.7072×10^{-1}	9.5292×10^{-1}	9.7156×10^{-1}
		(4.10×10^{-4})	$(1.43 \times 10^{-2})-$	$(3.10 \times 10^{-3})-$	$(2.25 \times 10^{-2})-$	$(1.25 \times 10^{-3})+$	$(3.13 \times 10^{-3})-$	$(8.72 \times 10^{-4})+$
	15	9.9017×10^{-1}	9.6427×10^{-1}	5.4561×10^{-1}	7.8897×10^{-1}	5.8748×10^{-1}	9.8220×10^{-1}	9.8688×10^{-1}
		(2.80×10^{-4})	$(1.91 \times 10^{-2})-$	$(2.74 \times 10^{-1})-$	$(1.15 \times 10^{-1})-$	$(1.09 \times 10^{-1})-$	$(7.12 \times 10^{-3})-$	$(5.62 \times 10^{-3})-$
WFG 8	3	4.7920×10^{-1}	4.8088×10^{-1}	4.7329×10^{-1}	4.6512×10^{-1}	4.5390×10^{-1}	4.5340×10^{-1}	4.8156×10^{-1}
		(1.78×10^{-3})	$(2.04 \times 10^{-3})+$	$(3.40 \times 10^{-3})-$	$(1.17 \times 10^{-2})-$	$(3.39 \times 10^{-3})-$	$(5.55 \times 10^{-3})-$	$(2.27 \times 10^{-3})+$
	5	6.8175×10^{-1}	6.8490×10^{-1}	6.6856×10^{-1}	6.5481×10^{-1}	3.1317×10^{-1}	6.3578×10^{-1}	6.7843×10^{-1}
		(1.97×10^{-3})	$(2.98 \times 10^{-3})+$	$(1.16 \times 10^{-2})-$	$(1.50 \times 10^{-2})-$	$(8.51 \times 10^{-3})-$	$(4.91 \times 10^{-3})-$	$(2.33 \times 10^{-3})-$
	10	8.8077×10^{-1}	8.4591×10^{-1}	7.6098×10^{-1}	6.1624×10^{-1}	6.3967×10^{-1}	7.9730×10^{-1}	8.9025×10^{-1}
		(8.46×10^{-3})	$(3.70 \times 10^{-2})-$	$(7.42 \times 10^{-2})-$	$(1.02 \times 10^{-1})-$	$(2.31 \times 10^{-2})-$	$(6.81 \times 10^{-2})-$	$(1.77 \times 10^{-2}) \approx$
	15	9.1659×10^{-1}	8.3508×10^{-1}	4.6196×10^{-1}	7.6426×10^{-1}	3.3899×10^{-1}	7.9415×10^{-1}	7.6663×10^{-1}
		(1.34×10^{-2})	$(4.47 \times 10^{-2})-$	$(1.35 \times 10^{-1})-$	$(1.77 \times 10^{-1})-$	$(4.96 \times 10^{-2})-$	$(1.18 \times 10^{-1})-$	$(9.90 \times 10^{-2})-$
WFG 9	3	5.4672×10^{-1}	5.4305×10^{-1}	5.4556×10^{-1}	5.3250×10^{-1}	5.1727×10^{-1}	5.3388×10^{-1}	5.5169×10^{-1}
		(4.01×10^{-3})	$(4.39 \times 10^{-3})-$	$(4.15 \times 10^{-3}) \approx$	$(7.93 \times 10^{-3})-$	$(6.14 \times 10^{-3})-$	$(3.57 \times 10^{-2})-$	$(2.77 \times 10^{-3})+$
	5	7.4690×10^{-1}	7.2964×10^{-1}	7.4974×10^{-1}	7.0129×10^{-1}	5.6438×10^{-1}	7.5745×10^{-1}	7.6119×10^{-1}
		(7.37×10^{-3})	$(3.46 \times 10^{-2})-$	$(1.09 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.16 \times 10^{-2})-$	$(7.52 \times 10^{-2})-$	$(8.38 \times 10^{-3})+$	$(9.23 \times 10^{-3})+$
	10	9.1417×10^{-1}	8.8646×10^{-1}	8.6481×10^{-1}	7.2445×10^{-1}	7.8885×10^{-1}	9.2002×10^{-1}	9.0227×10^{-1}
		(6.91×10^{-2})	$(5.24 \times 10^{-2})-$	$(5.55 \times 10^{-2})-$	$(3.42 \times 10^{-2})-$	$(2.14 \times 10^{-2})-$	$(3.54 \times 10^{-2})+$	$(3.79 \times 10^{-2})-$
	15	9.1357×10^{-1}	8.8219×10^{-1}	7.4786×10^{-1}	6.3510×10^{-1}	1.5569×10^{-1}	8.5783×10^{-1}	8.3130×10^{-1}
		(2.00×10^{-2})	$(7.37 \times 10^{-2})-$	$(6.55 \times 10^{-2})-$	$(1.21 \times 10^{-1})-$	$(5.20 \times 10^{-2})-$	$(6.48 \times 10^{-2})-$	$(6.30 \times 10^{-2})-$
$+ / \approx / -$			3 / 13 / 20	2 / 8 / 26	0 / 2 / 34	1 / 6 / 29	2 / 1 / 33	8 / 9 / 19

+, ≈ 和 − 分别表示获得的结果与 R2-RVEA 相比更好, 相似和更差.

表 5 R2-RVEA、NSGA-III、RVEA、MOEA/DD、MOMBI-II、KnEA 和 TS-R2EA 在 WFG1-WFG9 上获得的 HV 值的统计结果 (均值和标准差). 最好的结果已突出

Table 5 The statistical results (mean and standard deviation) of the IGD + values obtained by R2-RVEA, NSGA-III, RVEA, MOEA/DD, MOMBI-II, KnEA and TS-R2EA on WFG1 to WFG9. The best results are highlighted

问题	M	R2-RVEA	NSGA-III	RVEA	MOEA/DD	MOMBI-II	KnEA	TS-R2EA
WFG 1	3	7.5115×10^{-2}	8.7381×10^{-2}	6.9562×10^{-2}	1.0065×10^{-1}	1.4254×10^{-1}	5.6061×10^{-1}	7.8279×10^{-2}
		(4.52×10^{-2})	$(5.15 \times 10^{-2})-$	$(6.53 \times 10^{-3})+$	$(6.77 \times 10^{-2})-$	$(8.81 \times 10^{-2})-$	$(2.31 \times 10^{-1})-$	$(5.68 \times 10^{-2})-$
	5	1.8626×10^{-1}	2.1152×10^{-1}	2.0426×10^{-1}	1.6063×10^{-1}	5.4411×10^{-1}	1.6029×10^{-1}	2.0587×10^{-1}
		(9.57×10^{-3})	$(4.66 \times 10^{-2})-$	$(6.98 \times 10^{-2})-$	$(5.98 \times 10^{-2})+$	$(2.28 \times 10^{-1})-$	$(3.40 \times 10^{-2})+$	$(3.98 \times 10^{-2})-$
	10	2.1900×10^{-1}	2.1486×10^{-1}	1.4214×10^{-1}	1.4874×10^{-1}	3.4832×10^{-1}	2.7665×10^{-1}	1.2162×10^{-1}
		(9.07×10^{-3})	$(3.68 \times 10^{-2})+$	$(6.67 \times 10^{-2})+$	$(4.57 \times 10^{-2})+$	$(2.62 \times 10^{-2})-$	$(2.23 \times 10^{-2})-$	$(2.67 \times 10^{-2})+$
	15	2.8499×10^{-1}	4.2663×10^{-1}	3.6853×10^{-1}	2.7065×10^{-1}	4.1737×10^{0}	4.8136×10^{-1}	2.5708×10^{-1}
		(3.65×10^{-2})	$(1.78 \times 10^{-1})-$	$(2.46 \times 10^{-1}) \approx$	$(1.77 \times 10^{-1}) \approx$	$(5.59 \times 10^{0})-$	$(1.63 \times 10^{-1})-$	$(1.53 \times 10^{-1}) \approx$

表 5 R2-RVEA、NSGA-III、RVEA、MOEA/DD、MOMBI-II、KnEA 和 TS-R2EA 在 WFG1-WFG9 上获得的 HV 值的统计结果 (均值和标准差). 最好的结果已突出 (续表)

Table 5 The statistical results (mean and standard deviation) of the IGD + values obtained by R2-RVEA, NSGA-III, RVEA, MOEA/DD, MOMBI-II, KnEA and TS-R2EA on WFG1 to WFG9. The best results are highlighted (Continued table)

问题	M	R2-RVEA	NSGA-III	RVEA	MOEA/DD	MOMBI-II	KnEA	TS-R2EA
WFG 2	3	8.6719×10^{-2}	7.6168×10^{-2}	1.0187×10^{-1}	8.9857×10^{-2}	9.6736×10^{-2}	1.0500×10^{-1}	7.6067×10^{-2}
		(3.01×10^{-2})	$(9.03 \times 10^{-3})+$	$(2.00 \times 10^{-2})-$	$(1.30 \times 10^{-2})-$	$(1.76 \times 10^{-2})-$	$(4.39 \times 10^{-2})-$	$(1.80 \times 10^{-2})+$
	5	1.8338×10^{-1}	1.9276×10^{-1}	1.8425×10^{-1}	2.8035×10^{-1}	2.7826×10^{-1}	1.3904×10^{-1}	2.0231×10^{-1}
		(1.20×10^{-2})	$(1.34 \times 10^{-2})-$	$(4.47 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.30 \times 10^{-2})-$	$(7.03 \times 10^{-2})-$	$(2.72 \times 10^{-2})+$	$(4.36 \times 10^{-2})-$
	10	8.9305×10^{-2}	4.1897×10^{-1}	2.3948×10^{-1}	3.1155×10^{-1}	1.7810×10^{-1}	1.7637×10^{-1}	1.3011×10^{-1}
		(1.58×10^{-2})	$(1.87 \times 10^{-1})-$	$(6.82 \times 10^{-2})-$	$(2.39 \times 10^{-2})-$	$(2.42 \times 10^{-1})-$	$(3.53 \times 10^{-2})-$	$(5.09 \times 10^{-2})-$
	15	2.1600×10^{-1}	7.5861×10^{-1}	5.0074×10^{-1}	4.2257×10^{-1}	4.3099×10^{0}	8.7000×10^{-1}	2.8770×10^{-1}
		(5.32×10^{-1})	$(1.48 \times 10^{-1})-$	$(1.80 \times 10^{-1})-$	$(1.08 \times 10^{-1})-$	$(4.12 \times 10^{0})-$	$(3.55 \times 10^{-1})-$	$(1.22 \times 10^{-1})-$
WFG 3	3	4.2032×10^{-2}	6.1249×10^{-2}	1.5612×10^{-1}	1.6785×10^{-1}	6.4076×10^{-2}	2.7852×10^{-2}	4.8933×10^{-2}
		(5.04×10^{-3})	$(7.76 \times 10^{-3})-$	$(1.82 \times 10^{-2})-$	$(3.80 \times 10^{-2})-$	$(1.72 \times 10^{-2})-$	$(1.39 \times 10^{-2})+$	$(8.39 \times 10^{-3})-$
	5	2.8475×10^{-1}	3.5253×10^{-1}	4.6344×10^{-1}	4.7518×10^{-1}	9.7449×10^{-1}	3.5587×10^{-1}	3.6494×10^{-1}
		(1.79×10^{-2})	$(3.53 \times 10^{-2})-$	$(7.97 \times 10^{-2})-$	$(5.46 \times 10^{-2})-$	$(1.26 \times 10^{-1})-$	$(8.30 \times 10^{-2})-$	$(3.92 \times 10^{-2})-$
	10	6.0947×10^{0}	1.3173×10^{0}	2.7301×10^{0}	2.1179×10^{0}	9.6735×10^{0}	1.2618×10^{0}	1.3693×10^{0}
		(1.11×10^{0})	$(3.71 \times 10^{-1})+$	$(1.39 \times 10^{-1})+$	$(5.86 \times 10^{-2})+$	$(4.62 \times 10^{-2})-$	$(1.71 \times 10^{-1})+$	$(2.64 \times 10^{-1})+$
	15	9.9835×10^{0}	2.3745×10^{0}	3.7988×10^{0}	3.6219×10^{0}	1.4650×10^{1}	3.4151×10^{0}	2.9664×10^{0}
		(3.20×10^{0})	$(7.30 \times 10^{-1})+$	$(1.10 \times 10^{-1})+$	$(2.39 \times 10^{-2})+$	$(4.10 \times 10^{-2})-$	$(5.06 \times 10^{-1})+$	$(3.46 \times 10^{-1})+$
WFG 4	3	7.0960×10^{-1}	7.1039×10^{-2}	7.3769×10^{-2}	8.7146×10^{-2}	7.3561×10^{-2}	9.2246×10^{-2}	7.1212×10^{-2}
		$(2.95 \times 10^{-4})+$	$(2.66 \times 10^{-4}) \approx$	$(9.55 \times 10^{-4})-$	$(1.36 \times 10^{-3})-$	$(6.52 \times 10^{-3})-$	$(3.64 \times 10^{-3})-$	$(5.81 \times 10^{-4})-$
	5	3.2825×10^{-1}	3.2857×10^{-1}	3.3068×10^{-1}	3.9675×10^{-1}	3.3731×10^{-1}	3.6449×10^{-1}	3.2845×10^{-1}
		(5.42×10^{-4})	$(9.93 \times 10^{-4}) \approx$	$(1.33 \times 10^{-3})-$	$(9.57 \times 10^{-4})-$	$(1.57 \times 10^{-2})-$	$(6.75 \times 10^{-3})-$	$(3.57 \times 10^{-3}) \approx$
	10	8.7337×10^{-1}	1.0667×10^{0}	8.9065×10^{-1}	1.1221×10^{0}	2.3431×10^{0}	1.0544×10^{0}	8.7977×10^{-1}
		(2.69×10^{-3})	$(5.15 \times 10^{-1})-$	$(9.51 \times 10^{-3})-$	$(8.06 \times 10^{-3})-$	$(1.47 \times 10^{0})-$	$(8.22 \times 10^{-3})-$	$(8.85 \times 10^{-3})-$
	15	1.2733×10^{0}	3.0661×10^{0}	1.3006×10^{0}	1.6260×10^{0}	1.7552×10^{1}	1.3759×10^{0}	1.3775×10^{0}
		(2.41×10^{-3})	$(1.63 \times 10^{0})-$	$(1.64 \times 10^{-1}) \approx$	$(6.21 \times 10^{-1})-$	$(2.32 \times 10^{0})-$	$(2.11 \times 10^{-2})-$	$(4.21 \times 10^{-1})-$
WFG 5	3	1.2755×10^{-1}	1.2755×10^{-1}	1.2881×10^{-1}	1.4202×10^{-1}	1.3745×10^{-1}	1.9609×10^{-1}	1.2741×10^{-1}
		(4.48×10^{-6})	$(6.82 \times 10^{-6}) \approx$	$(4.47 \times 10^{-4})-$	$(1.02 \times 10^{-3})-$	$(1.38 \times 10^{-3})-$	$(6.08 \times 10^{-2})-$	$(3.43 \times 10^{-4}) \approx$
	5	3.8901×10^{-1}	3.8902×10^{-1}	3.8944×10^{-1}	4.5522×10^{-1}	4.0177×10^{-1}	4.2985×10^{-1}	3.8747×10^{-1}
		(2.61×10^{-5})	$(4.13 \times 10^{-5}) \approx$	$(1.32 \times 10^{-4})-$	$(4.11 \times 10^{-4})-$	$(1.22 \times 10^{-2})-$	$(8.65 \times 10^{-3})-$	$(3.84 \times 10^{-3}) \approx$
	10	9.3301×10^{-1}	9.3354×10^{-1}	9.4055×10^{-1}	1.1723×10^{0}	1.2453×10^{0}	1.0843×10^{0}	9.5531×10^{-1}
		(9.11×10^{-4})	$(1.06 \times 10^{-3}) \approx$	$(4.40 \times 10^{-3})-$	$(3.55 \times 10^{-3})-$	$(2.17 \times 10^{-2})-$	$(2.67 \times 10^{-2})-$	$(5.26 \times 10^{-3})-$
	15	1.3309×10^{0}	2.3724×10^{0}	1.3259×10^{0}	1.5056×10^{0}	2.3006×10^{1}	1.4335×10^{0}	1.3346×10^{0}
		(1.47×10^{-3})	$(2.25 \times 10^{0})-$	$(7.86 \times 10^{-3})+$	$(9.76 \times 10^{-3})-$	$(2.02 \times 10^{0})-$	$(2.73 \times 10^{-2})-$	$(2.11 \times 10^{-3})-$
WFG 6	3	1.4696×10^{-1}	1.3922×10^{-1}	1.5111×10^{-1}	1.6034×10^{-1}	1.4684×10^{-1}	1.9074×10^{-1}	1.4918×10^{-1}
		(1.96×10^{-2})	$(2.02 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.85 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.84 \times 10^{-2})-$	$(2.31 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.64 \times 10^{-2})-$	$(2.14 \times 10^{-2}) \approx$
	5	4.1833×10^{-1}	4.1223×10^{-1}	4.1516×10^{-1}	4.8181×10^{-1}	4.2618×10^{-1}	5.0750×10^{-1}	4.0415×10^{-1}
		(2.17×10^{-2})	$(2.09 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.48 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.89 \times 10^{-2})-$	$(5.46 \times 10^{-2}) \approx$	$(2.91 \times 10^{-2})-$	$(2.16 \times 10^{-2}) \approx$
	10	9.5617×10^{-1}	9.6279×10^{-1}	9.9145×10^{-1}	1.2157×10^{0}	9.5786×10^{-1}	1.1230×10^{0}	9.7574×10^{-1}
		(1.65×10^{-2})	$(2.14 \times 10^{-2}) \approx$	$(3.18 \times 10^{-2})-$	$(2.50 \times 10^{-2})-$	$(3.29 \times 10^{-2}) \approx$	$(3.04 \times 10^{-2})-$	$(2.37 \times 10^{-2})-$
	15	1.3522×10^{0}	1.6632×10^{0}	1.4286×10^{0}	1.5291×10^{0}	1.5286×10^{1}	1.5321×10^{0}	1.3721×10^{0}
		(1.58×10^{-2})	$(1.10 \times 10^{-1})-$	$(4.27 \times 10^{-2})-$	$(2.96 \times 10^{-2})-$	$(3.49 \times 10^{0})-$	$(5.28 \times 10^{-2})-$	$(3.17 \times 10^{-2})-$

表 5　R2-RVEA、NSGA-III、RVEA、MOEA/DD、MOMBI-II、KnEA 和 TS-R2EA 在 WFG1-WFG9 上获得的 HV 值的统计结果 (均值和标准差). 最好的结果已突出 (续表)

Table 5　The statistical results (mean and standard deviation) of the IGD + values obtained by R2-RVEA, NSGA-III, RVEA, MOEA/DD, MOMBI-II, KnEA and TS-R2EA on WFG1 to WFG9. The best results are highlighted (Continued table)

问题	M	R2-RVEA	NSGA-III	RVEA	MOEA/DD	MOMBI-II	KnEA	TS-R2EA
WFG 7	3	7.1361×10^{-2}	7.1371×10^{-2}	7.3630×10^{-2}	8.9150×10^{-2}	7.3845×10^{-2}	3.2485×10^{-1}	7.0651×10^{-2}
		(3.23×10^{-4})	$(3.07 \times 10^{-4}) \approx$	$(5.88 \times 10^{-4})-$	$(1.87 \times 10^{-3})-$	$(8.23 \times 10^{-3})-$	$(1.88 \times 10^{-2})-$	$(7.82 \times 10^{-5})+$
	5	3.3002×10^{-1}	3.3105×10^{-1}	3.3337×10^{-1}	4.0782×10^{-1}	3.2920×10^{-1}	3.8174×10^{-1}	3.2722×10^{-1}
		(6.74×10^{-4})	$(1.15 \times 10^{-3})-$	$(1.46 \times 10^{-3})-$	$(9.79 \times 10^{-3})-$	$(3.76 \times 10^{-3})+$	$(1.44 \times 10^{-2})-$	$(4.37 \times 10^{-4})+$
	10	8.8858×10^{-1}	9.3332×10^{-1}	8.9287×10^{-1}	1.1039×10^{0}	9.8755×10^{-1}	9.6895×10^{-1}	8.9890×10^{-1}
		(4.99×10^{-3})	$(1.58 \times 10^{-1}) \approx$	$(4.96 \times 10^{-3})-$	$(1.27 \times 10^{-2})-$	$(3.48 \times 10^{-1})-$	$(1.47 \times 10^{-2})-$	$(1.10 \times 10^{-2})-$
	15	1.2798×10^{0}	2.6475×10^{0}	2.6579×10^{0}	1.6730×10^{0}	1.3576×10^{0}	1.5766×10^{0}	1.6838×10^{0}
		(7.32×10^{-3})	$(7.87 \times 10^{-1})-$	$(6.81 \times 10^{-1})-$	$(5.69 \times 10^{-1})-$	$(2.40 \times 10^{0})-$	$(5.83 \times 10^{-1})-$	$(6.24 \times 10^{-1})-$
WFG 8	3	2.0276×10^{-1}	2.0043×10^{-1}	2.1262×10^{-1}	2.2068×10^{-1}	2.2094×10^{-1}	2.2380×10^{-1}	1.9590×10^{-1}
		(2.38×10^{-3})	$(5.27 \times 10^{-3})+$	$(2.76 \times 10^{-3})-$	$(8.51 \times 10^{-3})-$	$(3.61 \times 10^{-3})-$	$(4.90 \times 10^{-3})-$	$(3.10 \times 10^{-3})+$
	5	6.0819×10^{-1}	6.0468×10^{-1}	6.1524×10^{-1}	6.4945×10^{-1}	1.1632×10^{0}	6.9589×10^{-1}	6.1227×10^{-1}
		(1.75×10^{-3})	$(1.31 \times 10^{-3})+$	$(9.59 \times 10^{-3})-$	$(1.99 \times 10^{-2})-$	$(3.44 \times 10^{-2})-$	$(2.50 \times 10^{-2})-$	$(2.15 \times 10^{-3})-$
	10	1.7814×10^{0}	3.1854×10^{0}	1.2981×10^{0}	1.3753×10^{0}	3.7183×10^{0}	1.4339×10^{0}	1.5086×10^{0}
		(2.24×10^{-1})	$(1.15 \times 10^{0})-$	$(2.89 \times 10^{-1})+$	$(1.37 \times 10^{-1})+$	$(1.07 \times 10^{0})-$	$(2.03 \times 10^{-1})+$	$(3.02 \times 10^{-1}) \approx$
	15	4.1237×10^{0}	8.8664×10^{0}	2.7442×10^{0}	3.6008×10^{0}	1.6919×10^{1}	2.2133×10^{0}	2.3419×10^{0}
		(1.62×10^{0})	$(1.08 \times 10^{0})-$	$(1.99 \times 10^{0})+$	$(1.27 \times 10^{0}) \approx$	$(2.15 \times 10^{0})-$	$(6.49 \times 10^{-1})+$	$(1.23 \times 10^{0})+$
WFG 9	3	9.1371×10^{-2}	9.8060×10^{-2}	9.4218×10^{-2}	1.1083×10^{-1}	1.2051×10^{-1}	4.1313×10^{-1}	8.5058×10^{-2}
		(8.31×10^{-3})	$(7.55 \times 10^{-3})-$	$(5.27 \times 10^{-3})-$	$(7.33 \times 10^{-3})-$	$(7.64 \times 10^{-3})-$	$(5.50 \times 10^{-2})-$	$(3.66 \times 10^{-3})+$
	5	4.0014×10^{-1}	4.1637×10^{-1}	3.7828×10^{-1}	4.8038×10^{-1}	7.4087×10^{-1}	3.8673×10^{-1}	3.6848×10^{-1}
		(3.90×10^{-2})	$(4.75 \times 10^{-2})-$	$(1.29 \times 10^{-2})+$	$(3.90 \times 10^{-2})-$	$(1.12 \times 10^{-1})-$	$(1.23 \times 10^{-2}) \approx$	$(1.24 \times 10^{-2})+$
	10	1.0158×10^{0}	1.4614×10^{0}	9.7817×10^{-1}	1.2487×10^{0}	1.8261×10^{0}	1.0663×10^{0}	1.0275×10^{0}
		(2.47×10^{-2})	$(7.52 \times 10^{-1})-$	$(3.09 \times 10^{-2})+$	$(6.41 \times 10^{-2})-$	$(4.88 \times 10^{-1})-$	$(2.44 \times 10^{-2})-$	$(6.41 \times 10^{-2}) \approx$
	15	1.6670×10^{0}	5.6055×10^{0}	1.5770×10^{0}	2.0273×10^{0}	2.4264×10^{1}	1.7242×10^{0}	1.6462×10^{0}
		(1.67×10^{-1})	$(1.89 \times 10^{0})-$	$(3.10 \times 10^{-1})+$	$(6.11 \times 10^{-1})-$	$(1.08 \times 10^{0})-$	$(3.23 \times 10^{-1}) \approx$	$(3.71 \times 10^{-1}) \approx$
+ / ≈ / −			6 / 10 / 20	10 / 5 / 21	5 / 2 / 29	1 / 3 / 32	7 / 2 / 27	10 / 9 / 17

+, ≈ 和 − 分别表示获得的结果与 R2-RVEA 相比更好, 相似和更差.

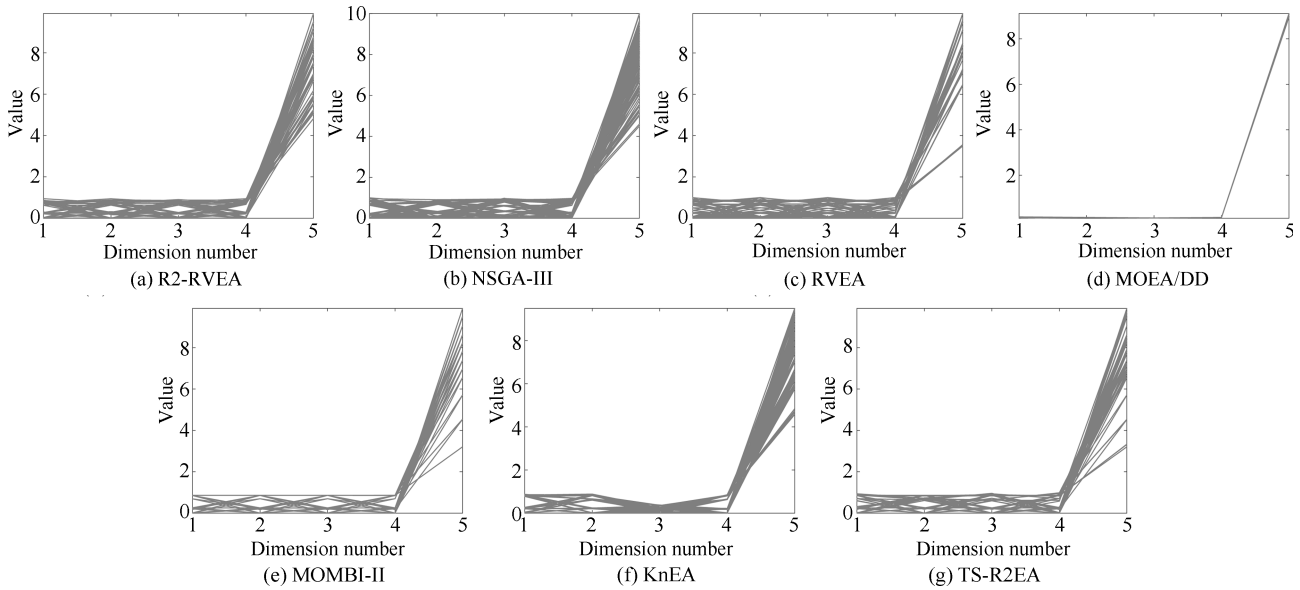


图 4　DTLZ7 问题 5 目标上获得的非支配解

Fig. 4　Nondominated solutions obtained on 5-objective DTLZ7

上要明显优于对比算法. WFG3 是一种比较难处理的问题, 具有退化的 PF 且决策变量不可以分离, 在这个问题上, R2-RVEA 的 HV 值要优于所有的对比算法, 但是在 15 目标上所有对比算法的 HV 值都是 0, 因此在这一目标上无法进行性能对比.

WFG4-9 都被设计为凸面的 PF, 但在决策空间上具有不同的难度. 从表 4 和表 5 中可以看出, R2-RVEA 在 WFG4 测试问题获得了最优的性能. 在 WFG5 问题上, R2-RVEA 获得了较好的性能, 相较于其他对比算法性能稳定. 对于 WFG6 测试问题, 所有对比算法性能相似, R2-RVEA 的性能略优于其他算法. 在 WFG7 上, R2-RVEA 仅在 15 目标上获得了最好的性能, 而 TS-R2EA 总体性能要明显优于 R2-RVEA. 并且 R2-RVEA 在 WFG8 测试问题上的性能和 NSGA-III、RVEA 和 TS-R2EA 相似, 但明显优于其他对比算法. 在 WFG9 测试问题上, 除了 RVEA 和 TS-R2EA, R2-RVEA 在所有目标上要明显优于其他对比算法. 综合统计结果可以看出, R2-RVEA 在 WFG 测试集上总体性能优越.

3.4 算法性能分析

从上面两个测试集得出的实验结果可以看出, 提出的 R2-RVEA 在 DTLZ 测试集中展现了比较不错的性能, 在 WFG 测试集上性能非常优异. 表 6 总结了所有算法在 64 个测试实例中的实验对比, 可以看出本文所提出的算法性能优越.

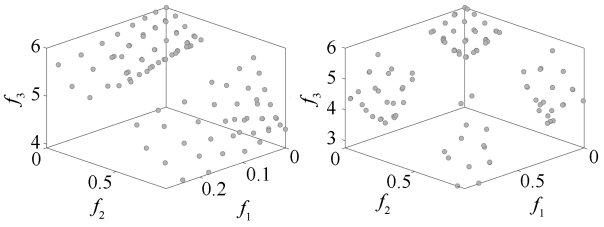
表 6 R2-RVEA 与其他算法的测试对比

Table 6 Comparison between R2-RVEA and other algorithms

对比算法	对比指标					
	HV			IGD+		
NSGA-III	6	20	38	11	17	36
RVEA	10	17	37	18	13	33
MOEA/DD	9	11	44	16	9	39
MOMBI-II	6	11	47	4	11	49
KnEA	4	1	59	13	4	47
TS-R2EA	17	16	31	21	15	28
	+	≈	−	+	≈	−

当然, 提出的算法仍然存在不足之处, 经过实验分析可知算法在指导进化种群的时候, 存在收敛到局部 PF 而无法有效管理多样性的情况, 使得算法性能急剧下降.

算法前期仅考虑收敛性, 仅当整个种群收敛到 PF 以后才管理多样性, 可能导致整个种群都收敛到局部的 PF 上, 后面再采用种群分解和 R2 排序也无法有效管理多样性. 在多次实验过程中发现 R2-RVEA 会出现稳定和不稳定这两种情况, 具体可见图 6 中 R2-RVEA 在 3 维 DTLZ7 上的实验, 对于

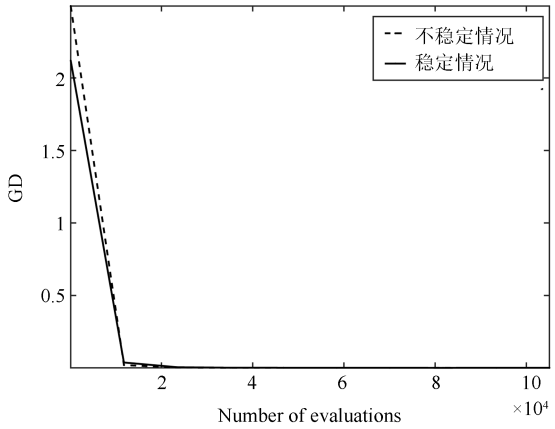


(a) 不稳定情况 (b) 稳定情况

(a) Unstable case (b) Stable case

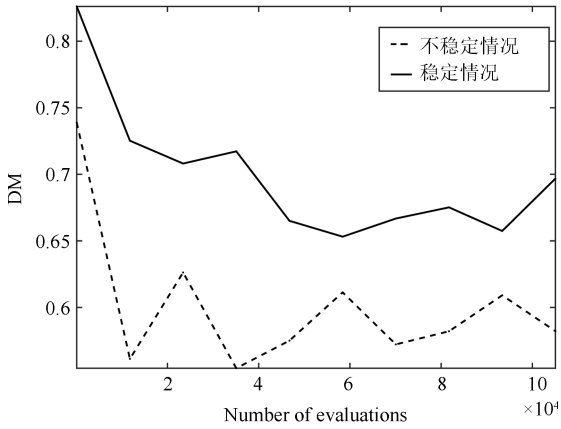
图 5 R2-RVEA 在 3 维 DTLZ7 上获得的不同结果

Fig. 5 Different results obtained by R2-RVEA on 3-objective DTLZ7



(a) GD 进化轨迹

(a) Evolutionary trajectories of GD



(b) DM 进化轨迹

(b) Evolutionary trajectories of DM

图 6 R2-RVEA 在 3 维 DTLZ7 上 GD 和 DM 指标的进化轨迹

Fig. 6 Evolutionary trajectories of GD and DM for R2-RVEA on 3-objective DTLZ7

GD 指标, GD 值越小说明收敛性越好, 两种情况 GD 指标进化轨迹基本相同, 这说明两种情况的收敛性基本相同; 对于 DM 指标, DM 值越大说明多样性越好, 可以看出 R2-RVEA 在不稳定情况时 DM

随着进化过程数值骤减, 最终 DM 明显小于稳定情况的 DM 值, 说明了多样性要明显比稳定情况时候的差. 通过图 5 可以直观地看到R2-RVEA 在不稳定情况时种群收敛到局部 PF, 这时候 DM 值骤减到比较小的水平, 也是导致多样性较低的主要原因.

4 结束语

本文提出了一个基于 R2 指标和参考向量的高维多目标进化算法. 这个算法致力于处理具有不同 PF 形状的 MOPs 以及 MaOPs. 在算法中, 为了让种群可以快速地收敛到 PF 上, 采用了 Pareto 支配选取当前种群非支配解的方式来指导整个种群优化. 而当整个种群都收敛到 PF 上以后, 采用种群分解和 R2 排序进一步管理种群的收敛性和多样性.

实验结果表明了提出的R2-RVEA 在处理具有不同 PF 形状的 MOPs 以及 MaOPs 时, 能够很好地平衡收敛性和多样性. 当然, 算法的初期阶段仅采用 Pareto 支配选取最优解的方式有可能导致种群收敛到局部 PF 的情况发生, 这使得种群分解和 R2 排序已经无法有效地管理种群的多样性. 因此, 在保证种群稳定地收敛到 PF 上, 如何更好地管理种群的多样性仍然是未来工作的一个方向.

References

1 Deb K. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. New York: John Wiley and Sons, 2001. 13−49

2 Zhou A M, Qu B Y, Li H, Zhao S Z, Suganthan P N, Zhang Q F. Multiobjective evolutionary algorithms: A survey of the state of the art. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2011, **1**(1): 32−49

3 Zhang J W, Xing L N. A survey of multiobjective evolutionary algorithms. In: Proceedings of the 2017 IEEE International Conference on Computational Science and Engineering (CSE) and IEEE International Conference on Embedded and Ubiquitous Computing (EUC). Guangzhou, China: IEEE, 2017. 93−100

4 Fleming P J, Purshouse R C, Lygoe R J. Many-objective optimization: An engineering design perspective. In: Proceedings of the 3rd International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Guanajuato, Mexico: Springer, 2005. 14−32

5 Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, **6**(2): 182−197

6 Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm, Technical Report 103, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Switzerland, 2001.

7 Batista L S, Campelo F, Guimarães F G, Ramírez J A. Pareto cone varepsilon-dominance: Improving convergence and diversity in multiobjective evolutionary algorithms. In: Proceedings of the 6th International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Ouro Preto, Brazil: Springer, 2011. 76−90

8 Zou X F, Chen Y, Liu M Z, Kang L S. A new evolutionary algorithm for solving many-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2008, **38**(5): 1402−1412

9 He Z N, Yen G G, Zhang J. Fuzzy-based Pareto optimality for many-objective evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, **18**(2): 269−285

10 Di Pierro F, Khu S T, Savic D A. An investigation on preference order ranking scheme for multiobjective evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, **11**(1): 17−45

11 Yang S X, Li M Q, Liu X H, Zheng J H. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, **17**(5): 721−736

12 Zhang X Y, Tian Y, Jin Y C. A knee point-driven evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, **19**(6): 761−776

13 Zhang Q F, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, **11**(6): 712−731

14 Liu H L, Gu F Q, Zhang Q F. Decomposition of a multiobjective optimization problem into a number of simple multiobjective subproblems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, **18**(3): 450−455

15 Chen L, Liu H L, Lu C, Cheung Y M, Zhang J. A novel evolutionary multi-objective algorithm based on S metric selection and M2M population decomposition. In: Proceedings of the 18th Asia Pacific Symposium on Intelligent and Evolutionary Systems - Volume 2. Bangkok, Thailand: Springer, 2015. 441−452

16 Cheng R, Jin Y C, Olhofer M, Sendhoff B. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, **20**(5): 773−791

17 Jiang S Y, Yang S X. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multiobjective and many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, **21**(3): 329−346

18 Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, **18**(4): 577−601

19 Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multiobjective search. In: Proceedings of the 8th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Birmingham, United Kingdom: Springer, 2004. 832−842

20 Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization. *Evolutionary Computation*, 2011, **19**(1): 45−76

21 Beume N, Naujoks B, Emmerich M. SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume. *European Journal of Operational Research*, 2007, **181**(3): 1653−1669

22 Li M Q, Yang S X, Liu X H. Pareto or non-Pareto: Bicriterion evolution in multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, **20**(5): 645−665

23 Van Veldhuizen D A, Lamont B G. Multiobjective evolutionary algorithms: Analyzing the state-of-the-art. *Evolutionary Computation*, 2000, **8**(2): 125−147

24 Wang H D, Jin Y C, Yao X. Diversity assessment in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, **47**(6): 1510−1522

25 Zhou A M, Jin Y C, Zhang Q F, Sendhoff B, Tsang E. Combining model-based and genetics-based offspring generation for multi-objective optimization using a convergence criterion. In: Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation. Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2006. 892−899

26 While L, Hingston P, Barone L, Huband S. A faster algorithm for calculating hypervolume. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, **10**(1): 29−38

27 Brockhoff D, Wagner T, Trautmann H. On the properties of the R2 indicator. In: Proceedings of the 14th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. Philadelphia, Pennsylvania, USA: ACM, 2012. 465−472

28 Tian Y, Zhang X Y, Cheng R, Jin Y C. A multi-objective evolutionary algorithm based on an enhanced inverted generational distance metric. In: Proceedings of the 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). Vancouver, BC, Canada: IEEE, 2016. 5222−5229

29 Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, Cheng F, Jin Y C. An indicator-based multiobjective evolutionary algorithm with reference point adaptation for better versatility. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, **22**(4): 609−622

30 Sun Y N, Yen G G, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, **23**(2): 173−187

31 Phan D H, Suzuki J. R2-IBEA: R2 indicator based evolutionary algorithm for multiobjective optimization. In: Proceedings of the 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Cancun, Mexico: IEEE, 2013. 1836−1845

32 Trautmann H, Wagner T, Brockhoff D. R2-EMOA: Focused multiobjective search using R2-indicator-based selection. In: Proceedings of the 7th International Conference on Learning and Intelligent Optimization. Catania, Italy: Springer, 2013. 70−74

33 Gómez R H, Coello C A C. Improved metaheuristic based on the R2 indicator for many-objective optimization. In: Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. Madrid, Spain: ACM, 2015. 679−686

34 Li F, Cheng R, Liu J C, Jin Y C. A two-stage R2 indicator based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *Applied Soft Computing*, 2018, **67**: 245−260

35 Das I, Dennis J E. Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 1998, **8**(3): 631−657

36 Li K, Deb K, Zhang Q F, Kwong S. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, **19**(5): 694−716

37 Deb K, Thiele L, Laumanns M, Zitzler E. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization. *Evolutionary Multiobjective Optimization*. London: Springer, 2005. 105−145

38 Huband S, Barone L, While L, Hingston P. A scalable multi-objective test problem toolkit. In: Proceedings of the 3rd International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Guanajuato, Mexico: Springer, 2005. 280−295

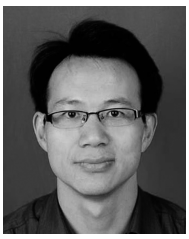
39 Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, Jin Y C. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization [Educational Forum]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, **12**(4): 73−87

40 Deb K, Agrawal R B. Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems*, 1995, **9**(2): 115−148

41 Deb K, Goyal M. A combined genetic adaptive search (GeneAS) for engineering design. *Computer Science and Informatics*, 1996, **26**(4): 30−45

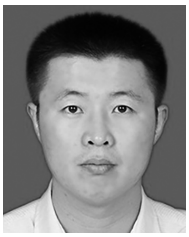
42 Ishibuchi H, Masuda H, Tanigaki Y, Nojima Y. Modified distance calculation in generational distance and inverted generational distance. In: Proceedings of the 8th International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Guimarães, Portugal: Springer, 2015. 110−125

陈国玉 南昌航空大学硕士研究生. 主要研究方向为进化计算. E-mail: 1704081002001@stu.nchu.edu.cn
(**CHEN Guo-Yu** Master student at Nanchang Hangkong University. His main research interest is evolutionary computation.



李军华 南昌航空大学教授. 主要研究方向为进化计算和智能控制. 本文通信作者. E-mail: jhlee126@126.com
(**LI Jun-Hua** Professor at Nanchang Hangkong University. His research interest covers evolutionary computation and intelligent control. Corresponding author of this paper.)

黎 明 南昌航空大学教授. 主要研究方向为图像处理和人工智能.
E-mail: liming@nchu.edu.cn
(**LI Ming** Professor at Nanchang Hangkong University. His research interest covers image processing and artificial intelligence.)



陈 昊 南昌航空大学副教授. 主要研究方向为动态和高维多目标进化算法.
E-mail: chenhaoshl@nchu.edu.cn
(**CHEN Hao** Associate professor at Nanchang Hangkong University. His research interest covers dynamic and many-objective evolutionary algorithms.)