初值偏差对线性系统状态向量 Kalman 滤波的影响

洪腾腾 [1] 胡绍林 [1, 2]

摘 要 Kalman 滤波在系统控制、信号处理和飞行器导航等领域有广泛应用. 众所周知, Kalman 滤波是建立在一组递推计算的滤波算法. 不准确的初始值设置是否影响状态滤波结果, 这是实际应用 Kalman 滤波时必须关注和解决的问题. 本文在推导滤波初始值与系统真实初态之间偏差对滤波结果影响的基础上, 建立了初始值偏差对后续滤波影响的传递关系, 以及滤波结果收敛的充分条件; 通过设置多组不同初始值偏差, 分别对某三阶可观测系统和不可观测系统进行了仿真计算及结果分析, 验证了滤波初始值偏差会导致滤波结果发生明显偏离. 研究结果揭示, 即使是可观测的线性系统, 采用 Kalman 滤波时也必须尽可能选取准确的初始值.

关键词 Kalman 滤波, 初始值, 初值偏差, 影响分析收敛, 特征值

引用格式 洪腾腾, 胡绍林. 初值偏差对线性系统状态向量 Kalman 滤波的影响. 自动化学报, 2017, **43**(5): 789−794

DOI 10.16383/j.aas.2017.c160026

Effect of Initial Deviation on Kamlan Filter of State Vectors in Linear Systems

HONG Teng-Teng[1] HU Shao-Lin[1, 2]

Abstract Kalman filter is widely used in system control, signal processing, spacecraft navigation and other fields. It has come to light that the Kalman filter is composed of a series of recursion algorithms. When the filter is used in practical projects, it is an open problem whether the biased initialization is infectious to Kalman filtering results or not, which must be paid much attention to and solved down. In this paper, the effect of initialization deviation on the recursive Kalman filter is discussed, a transmission formula is built to analyze the Kalman filtering difference which comes from initialization deviation, and a sufficient condition is deduced for convergence of the Kalman filter of state vectors. Setting several kinds of initial deviation values for simulation, series of simulation results are given for a 3rd-order observable system as well as a 3rd-order unobservable linear system. Simulation results show that deviation of initial value may result in distinct difference of the state filtering. The results given in this paper reveal that the initial value must be carefully selected even if the dynamic system is an observable linear time-invariant systems.

Key words Kalman filter, initial value, initial deviation, convergence, eigenvalue

Citation Hong Teng-Teng, Hu Shao-Lin. Effect of initial deviation on Kamlan filter of state vectors in linear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(5): 789−794

Kalman 是上世纪 60 年代由 R. Kalman 提出的一种时域滤波算法[1]. 该算法由于有简单的递推结构且计算量小和存储空间少, 因而一经提出便在过程自动化、动态系统控制[2−3]、航天器测控管理[4]、导航与制导、机电工程与自动化乃至经济管理等领域得到广泛的应用. 但是, 在实际应用 Kalman 滤波的过程中也面临着诸多实际问题, 譬如: 递推计算的初始值如何设置, 模型扰动和测量误差的方差如何给定, 选取不同初始值是否会影响滤波的结果, 方差估计不准确会如何影响滤波效果等. 本文侧重讨论初始值设置不当可能带来的影响.

对于 Kalman 滤波递推计算的初始值如何设置问题, 国际国内陆续有研究成果见诸文献. 综合这方面研究, 大致可以分为 3 类:

第一类直接假定初值已知, 回避初值如何设置的问题, 例如, 文献 [4−7] 直接或间接地假定初始值已知, 文献 [8−9] 初始值设定先验信息, 文献 [10] 则避而不谈初值如何设置.

第二类是将初始值设置不准确可能带来影响的关注点放在算法的收敛性上[11−14], 例如, Bjorn Ursin (1980)[11]、Jafar 等 (2015)[14]、Francesco 等 (2015)[15] 和 Yuki 等 (2015)[13] 从滤波算法是否收敛的角度讨论初始值问题, 邓自立等 (1989)[12] 在《现代时间序列分析及其应用 — 建模、滤波、去卷、预报和控制》中认为, 只要算法收敛, 初始值偏差的影响可忽略; 更有研究认为在实际应用中滤波初始值

收稿日期 2016-01-14 录用日期 2016-06-22
Manuscript received January 14, 2016; accepted June 22, 2016
国家自然科学基金 (61473222, 91646108) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61473222, 91646108)
本文责任编委 夏元清
Recommended by Associate Editor XIA Yuan-Qing
1. 西安理工大学 西安 710048 2. 航天器故障诊断与维护重点实验室 西安 710043
1. Xi′an University of Technology, Xi′an 710048 2. Key Laboratory of Spacecraft Fault Diagnosis and Maintenance, Xi′an 710043

取为 0 并将 P_0 选得足够大, 则初始值偏差对于系统稳态精度无影响, 只会影响过渡过程时间长短, 并将研究的关注点放在 Kalman 滤波的收敛速度. 客观地说, 邓自立等 (1989) 由于只是将 Kalman 滤波用于 CAR (Controlled auto-regressive) 等模型参数在线辨识, 只要模型参数不随时间变化, 忽略初始值误差影响是无可厚非的. 但是, 也有学者忽视邓教授著作特殊背景 (常值参数递推估计), 片面地忽略初值偏差影响, 对动态系统状态 (动态系统状态一般是随时间变化的) 滤波估计无疑是不合适的. 更何况即使只考虑收敛情形, 也还有是否收敛到真实状态的问题.

第三类是附加特殊条件, 尝试估计初值, 例如, Martin 等 (1976) 假定初值及其他时刻状态变量服从高斯分布[16], Sumanchai 等 (1990) 通过最小二乘法估计初值[17], Eugenio (2006) 提出用一个数学表达式在不同情况下设置不同的初始值[18]. 另外, 近年来, 也有零星文章讨论初值偏差的问题, 例如, Liu 等 (2009) 指出了设定初始值会带来初始估计误差[19], 但是缺少初始值偏差对滤波结果的影响分析和有深度的讨论.

基于上述分析, 滤波初始值对 Kalman 滤波的结果和效果是否有影响、是否有持续性影响等基本问题, 即使是线性系统也尚无统一和可信的结论. 鉴于此, 本文综合运用理论分析和仿真计算分析的方法, 并以线性系统为对象具体讨论滤波初值设置偏差可能带来的影响.

1 初值对 Kalman 滤波的影响分析

为简化分析和直观反映滤波初始值 $\hat{X}_{0|0}$ 与系统真实初态 X_0 之间差异 $\Delta\hat{X}_0 = \hat{X}_{0|0} - X_0$ 对 Kalman 滤波影响, 本文采用式 (1) 所示线性系统为研究对象[7]

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + \varepsilon_k \\ Y_k = C_k X_k + \eta_k \end{cases} \tag{1}$$

式中, $A_k \in \mathbf{R}^{n\times n}, C_k \in \mathbf{R}^{m\times n}$.

在假定扰动分量 $\varepsilon_k \sim \mathrm{N}(0, Q)$ 和测量误差 $\eta_k \sim \mathrm{N}(0, R)$ 下, 由 Kalman 滤波理论[7] 可知状态向量 $X_k \in \mathbf{R}^n$ 最优估计和滤波误差方差阵可由式 (2) 和式 (3) 所示的递推关系给出:

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = A_k\hat{X}_{k|k} + K_{k+1}(Y_{k+1} - C_{k+1}A_k\hat{X}_{k|k}) \tag{2}$$

$$P_{k+1|k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})(A_kP_{k|k}A_k^\tau + Q) \tag{3}$$

式中, 滤波增益矩阵满足递推关系

$$K_{k+1} = (A_kP_{k|k}A_k^\tau + Q)C_k^\tau \times (C_{k+1}(A_kP_{k|k}A_k^\tau + Q)C_k^\tau + R)^{-1} \tag{4}$$

显然, 式 (2) 和式 (3) 均为递推算式, 在实际应用 Kalman 滤波进行递推计算时, 必须先设定初值 $\hat{X}_{0|0} = X_0$ 和 $P_{0|0} = P_0$.

为便于讨论初始值偏差对 Kalman 滤波结果的影响, 假定取两组初始值 $\hat{X}_0^a$ 和 $\hat{X}_0^b$ 分别进行 Kalman 滤波计算, 记由初始值 $\hat{X}_0^a$ 计算的状态滤波估计为 $\hat{X}_{k|k}^a$, 由 $\hat{X}_0^b$ 计算的状态滤波估计为 $\hat{X}_{k|k}^b$, 则由式 (2) 不难导出如下关系:

$$\hat{X}_{k+1|k+1}^a = A_k\hat{X}_{k|k}^a + K_{k+1}(Y_{k+1} - C_{k+1}A_k\hat{X}_{k|k}^a) \tag{5}$$

$$\hat{X}_{k+1|k+1}^b = A_k\hat{X}_{k|k}^b + K_{k+1}(Y_{k+1} - C_{k+1}A_k\hat{X}_{k|k}^b) \tag{6}$$

记 $\Delta\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k}^a - \hat{X}_{k|k}^b$, 由式 (5) 和式 (6) 做差, 可得递推关系

$$\Delta\hat{X}_{k+1|k+1} = (A_k - K_{k+1}C_{k+1}A_k)\Delta\hat{X}_{k|k} \tag{7}$$

引进记号 $M_k = A_k - K_{k+1}C_{k+1}A_k$, 则由式 (7) 可得出初始值偏差对 Kalman 滤波的影响

$$\Delta\hat{X}_{k+1|k+1} = \prod_{i=0}^{k} M_{k+1-i}(\hat{X}_0^a - \hat{X}_0^b) \tag{8}$$

定理 1. 对于线性系统 (1), 为确保任意 t_k 时刻状态 X_k 的 Kalman 滤波与初始值无关, 其充要条件是 $\prod_{i=0}^{k} M_{k+1-i} = 0$.

证明. 充分性是显而易见的. 为论证必要性, 只需分别取 n 组初始值偏差为阶单位矩阵 I_n 的各列, 代入式 (8) 中, 立知: 要使状态 X_k 的 Kalman 滤波与初始值无关, 至少必须

$$\left(\prod_{i=0}^{k} M_{k+1-i}\right) I_n = 0 \tag{9}$$

由此可知本定理成立.

定理 2. 对于线性系统 (1), 如果某 t_{k0} 时刻滤波增益矩阵 K_{k0} 满足方程

$$I - K_{k0}C_{k0}A_{k0-1} = 0 \tag{10}$$

则 t_{k0} 时刻之后的 Kalman 滤波与初始值无关.

证明. 由式 (8) 和递推关系式 (7) 立知本定理成立. 详细证明过程, 略. □

由于增益 K_{k+1} 和矩阵 $\prod_{i=0}^{k} M_{k+1-i} = 0$ 都是矩阵序列 $\{(A_i, C_i)|i = 1, 2, \cdots, k\}$ 及协方差矩阵 Q 和 R 的函数, 定理 1 和定理 2 的要求是很苛刻的. 为此, 文献 [8−11] 在讨论初始值偏差影响时, 引入滤波算法稳定性概念, 讨论能否实现 $\lim_{k\to+\infty}\Delta\hat{X}_{k|k} = 0$ 或者 $\lim_{k\to+\infty}||\Delta\hat{X}_{k|k}|| = 0$. 基于上述的滤波稳定性分析的构想, 本节后续部分简要分析 $||\Delta\hat{X}_{k|k}||$ 的变化关系. 由式 (8) 可以导出如下关系:

$$||\Delta\hat{X}_{k+1|k+1}|| = (\hat{X}_0^a - \hat{X}_0^b)^\tau\Theta_k(\hat{X}_0^a - \hat{X}_0^b) \tag{11}$$

式中, $\Theta_k = (\prod_{i=0}^{k} M_{k+1-i})^{\tau} \prod_{i=0}^{k} M_{k+1-i}$.

由式 (11) 可看出, 初始值偏差对滤波结果的影响取决于 Θ_k 的大小. 本文称 Θ_k 为初始偏差的影响传递矩阵.

由于矩阵 Θ_k 是半正定对称矩阵, 一定存在正交矩阵 T_k, 实现矩阵的 SVD (Singular value decomposition) 分解:

$$T_k \Theta_k T_k^{\tau} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n,k} \end{pmatrix} \tag{12}$$

记 $\bar{X}_k = T_k X_k$, 代入式 (11), 得初值偏差对 Kalman 滤波影响关系:

$$||\Delta \hat{X}_{k+1|k+1}|| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,k} (\hat{\hat{x}}_{i,0}^{a} - \hat{\hat{x}}_{i,0}^{b})^2 \tag{13}$$

式中, $x_{i,0}$ 为向量 $\boldsymbol{X}_0$ 的第 i 分量.

由式 (13) 可知, $\lim_{k\to+\infty} ||\Delta \hat{\hat{X}}_{k+1|k+1}||^2 = 0$ 的条件是 $\lim_{k\to+\infty} \max_{i=1,2,\cdots,n}\{\lambda_{i,k}\} = 0$, 亦即式 (12) 基于 SVD 分解的特征值必须是无穷小量, 才能保证滤波结果在未来充分长的时间之后可忽略滤波初值偏差的影响. 但是, 这并不符合工程应用的实际需求.

2　仿真计算与结果分析

为定量分析滤波初值对 Kalman 滤波结果的影响, 本节采用 Monte Carlo 仿真方法进行数值仿真, 并分析仿真计算结果.

2.1　仿真模型的选用

为充分揭示初始值对 Kalman 滤波结果是否存在影响不能简单归结为系统可观测性或类似条件, 本节分别选用可观测系统模型 (14) 和不可观测系统模型 (15), 进行仿真分析.

模型 A (可观测系统)

$$\begin{cases} X_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.03 & -0.005 \\ -0.03 & 1 & 0.03 \\ 0.005 & 0.03 & 1 \end{bmatrix} X_k + \varepsilon_k \\ Y_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X_k + \eta_k \end{cases} \tag{14}$$

模型 B (不可观测系统)

$$\begin{cases} X_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} X_k + \varepsilon_k \\ Y_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X_k + \eta_k \end{cases} \tag{15}$$

式中, $\varepsilon_k \sim \mathrm{N}(0, I_3\sigma_{\varepsilon}^2)$, $\eta_k \sim \mathrm{N}(0, \sigma_{\eta}^2)$.

2.2　仿真计算的步骤

步骤 1. 置 $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\eta}^2 = 1$, 采用 Monte Carlo 方法生成两组各 $N = 100$ 个高斯白噪声随机误差序列 $\{\varepsilon_i | i = 1, 2, \cdots, N\}$ 和 $\{\eta_i | i = 1, 2, \cdots, N\}$;

步骤 2. 置系统初值 X_0, 分别按模型 A 和模型 B 递推计算, 生成系统的 "真实" 状态;

步骤 3. 选取三组不同的初始值 $\hat{\hat{X}}_{0|0}^{a} = X_0$、$\hat{\hat{X}}_{0|0}^{b} = X_0 + 0.1X_0$ 和 $\hat{\hat{X}}_{0|0}^{c} = X_0 + 0.5X_0$, 按式 (2) ∼ (4) 分别计算不同初始值递推获得的 Kalman 滤波 $\{\hat{X}_{k|k}^{\omega} | k = 1, 2, \cdots, N\}$ $(\omega = a, b, c)$;

步骤 4. 对不同初始值递推获得的 Kalman 滤波, 进行做差和比对分析.

步骤 5. 计算矩阵 Θ_k 的最大特征值, 分析其变化情况.

2.3　仿真结果分析

为了直观地显示不同初始值对 Kalman 滤波结果的影响, 本节分别将初始值偏置 10 % 的滤波结果 $\{\hat{X}_{k|k}^{b} | k = 1, 2, \cdots, N\}$ 和初始值偏置 50 % 的滤波结果 $\{\hat{X}_{k|k}^{c} | k = 1, 2, \cdots, N\}$ 与初始值等于系统初态的滤波结果 $\{\hat{X}_{k|k}^{a} | k = 1, 2, \cdots, N\}$ 比对做差, 并绘制影响传递矩阵 Θ_k 的最大特征值变化曲线.

1) 初始值偏差 10 % 的滤波结果比较

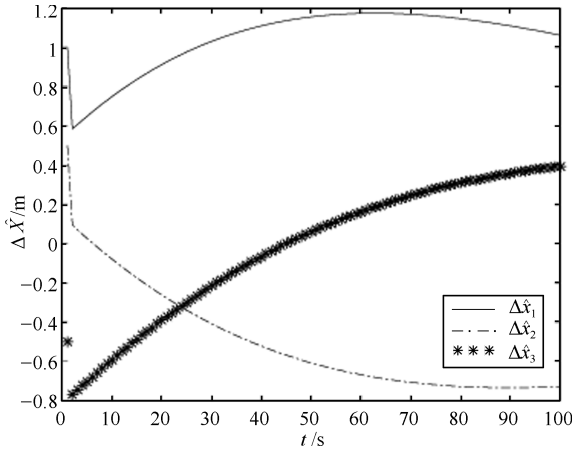
分别对可观测系统模型 A 和不可观测系统模型 B, 计算初始值偏差 10 % 的 Kalman 滤波 $\{\hat{X}_{k|k}^{b}\}$, 无偏差的 Kalman 滤波 $\{\hat{X}_{k|k}^{a}\}$, 并形成比对差 $\Delta\hat{X}_k^{b-a} = \hat{X}_{k|k}^{b} - \hat{X}_{k|k}^{a}$, 绘制比对差的三个分量变化曲线, 如图 1 所示.

分别对模型 A 和模型 B, 计算初始值偏差 10 % 的 Kalman 滤波 $\{\hat{X}_{k|k}^{b}\}$, 并与系统状态 $\{X_k\}$ 比对做差 $\Delta\hat{X}_k^{b-s} = \hat{X}_{k|k}^{b} - X_k$, 绘制比对差的三个分量变化曲线, 如图 2 所示.

2) 初始值偏差 50 % 的滤波结果比较

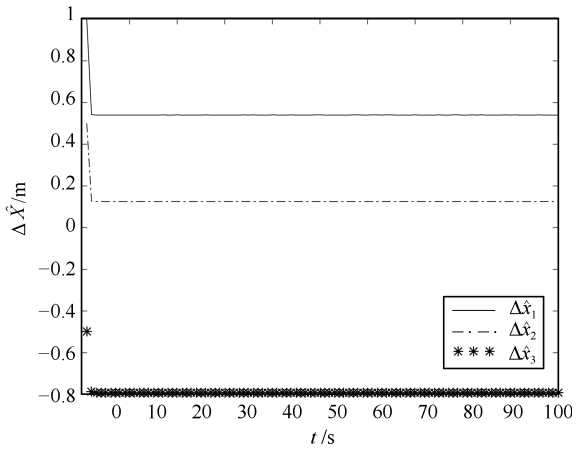
分别对可观测系统模型 A 和不可观测系统模型 B, 计算初始值偏差 50 % 的 Kalman 滤波 $\{\hat{X}_{k|k}^{c}\}$ 无偏差的 Kalman 滤波 $\{\hat{X}_{k|k}^{a}\}$, 并形成比对差 $\Delta\hat{X}_k^{c-a} = \hat{X}_{k|k}^{c} - \hat{X}_{k|k}^{a}$, 绘制比对差的三个分量变化曲线, 如图 3 所示.

分别对模型 A 和模型 B, 计算初始值偏差 50 % 的 Kalman 滤波 $\hat{X}_{k|k}^{c}$, 并与系统状态 $\{X_k\}$ 比对做差 $\Delta\hat{X}_k^{c-s} = \hat{X}_{k|k}^{c} - X_k$, 绘制比对差的三个分量变化曲线, 如图 4 所示.



(a) 模型 A 下计算结果

(a) Computation result under model A

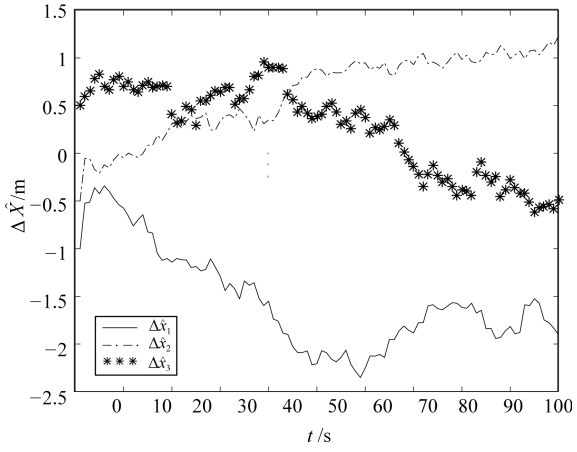


(b) 模型 B 下计算结果

(b) Computation result under model B

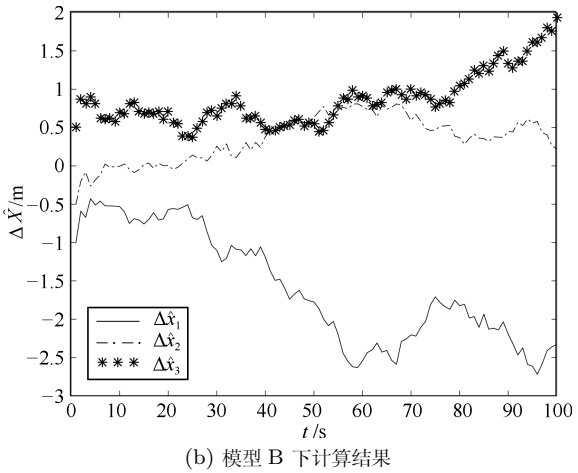
图 1 初始值偏 10 % 时的 Kalman 滤波比对差

Fig. 1 Difference of Kalman filtering states under 10 % deviation from the initial state of dynamic system



(a) 模型 A 下计算结果

(a) Computation result under model A

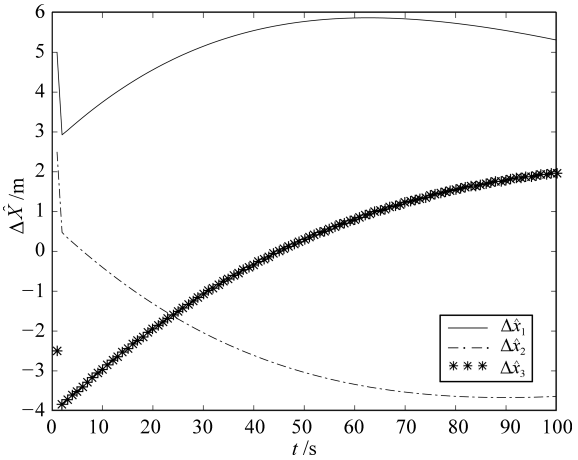


(b) 模型 B 下计算结果

(b) Computation result under model B

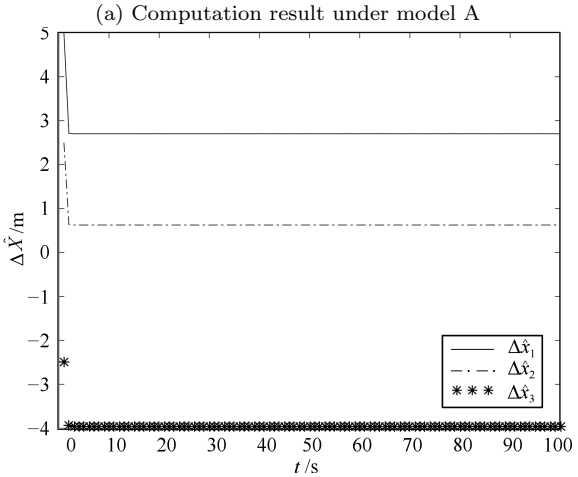
图 2 初始值偏 10 % 的滤波与实际状态比对差

Fig. 2 Difference of Kalman filtering and true states under 10 % deviation from the initial state



(a) 模型 A 下计算结果

(a) Computation result under model A

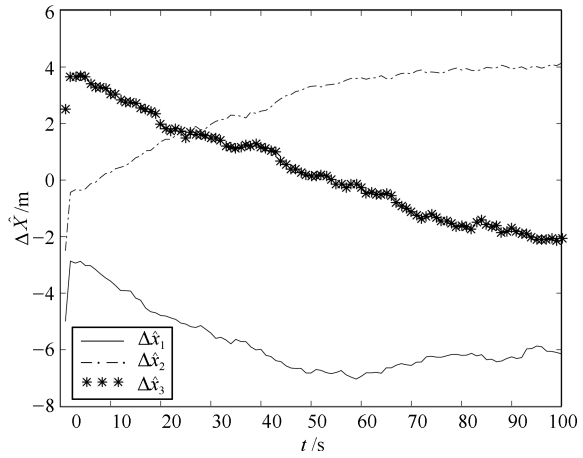


(b) 模型 B 下计算结果

(b) Computation result under model B

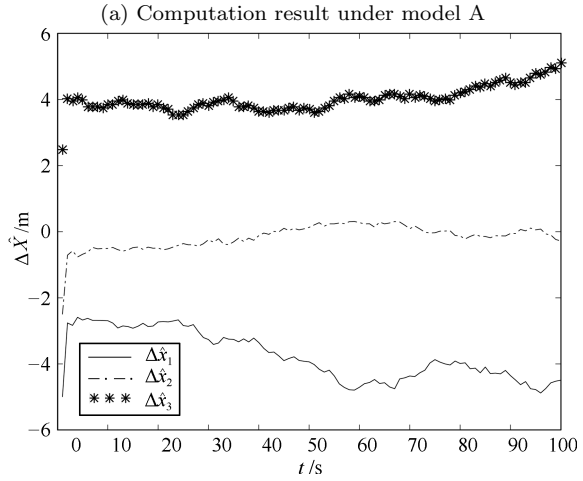
图 3 初始值偏 50 % 时的 Kalman 滤波比对差

Fig. 3 Difference of Kalman filtering states under 50 % deviation from the initial state of dynamic system



(a) 模型 A 下计算结果

(a) Computation result under model A

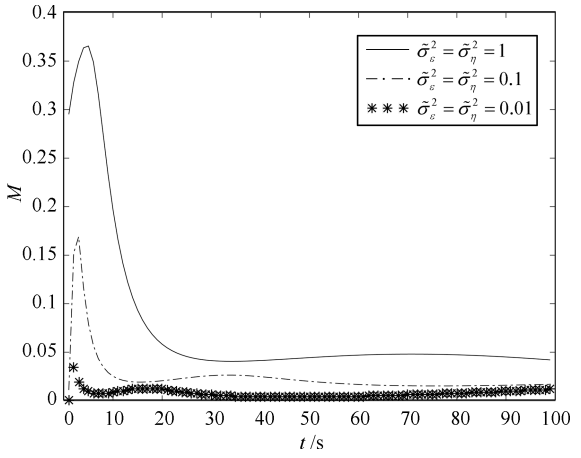


(b) 模型 B 下计算结果

(b) Computation result under model B

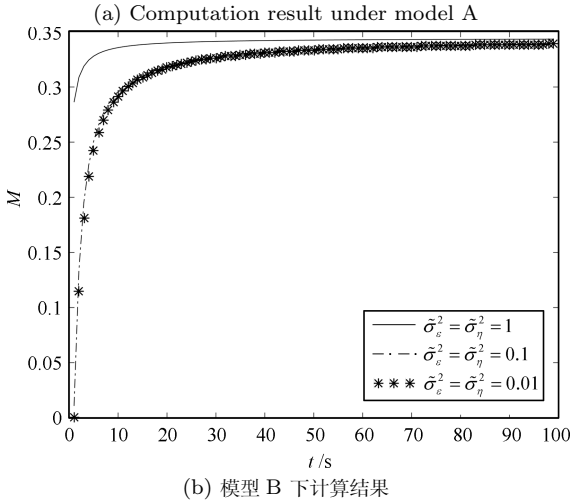
图 4　初始值偏 50 % 的滤波与实际状态比对差

Fig. 4　Difference of Kalman filtering and true states under 50 % deviation from the initial state



(a) 模型 A 下计算结果

(a) Computation result under model A



(b) 模型 B 下计算结果

(b) Computation result under model B

图 5　不同扰动方差下的最大特征值变化曲线

Fig. 5　Plot of the biggest eigenvalue under different disturbance variance

3) 不同扰动下影响传递阵的最大特征值

分别对模型 A 和模型 B, 计算在扰动误差 (协) 方差 σ_ε^2 和 σ_η^2 取不同值时, 影响传递矩阵 Θ_k 的最大特征值变化曲线, 结果如图 5 所示.

由图 1 ∼ 4 可以看出: 无论是对可观测系统模型 A 还是不可观测系统模型 B, Kalman 滤波初始值与真实初始状态之间差异都会导致 Kalman 滤波结果明显偏离真实状态, 并且不同大小的初始值偏差可能会导致 Kalman 滤波结果出现不同大小的偏差, 偏离真实初态越大, Kalman 滤波的偏差越大.

从图 5 可以看出: 无论是对于可观测系统模型 A, 还是不可观测系统模型 B, 影响传递阵 Θ_k 的最大特征值变化曲线在滤波初始段大幅变化, 随后逐步稳定, 但是没有像预期的收敛到 0. 这也从一个侧面解释了为什么滤波初始值的偏差可能会长时间影响 Kalman 滤波质量.

3　结论

本文采用理论分析和仿真计算分析相结合的方法, 系统地分析了滤波初值偏差对 Kalman 滤波的影响.

在理论分析方面, 建立了初值偏差的影响传递关系、影响传递矩阵和基于影响传递矩阵 SVD 分解的滤波关于初值偏差收敛的充分必要条件; 在仿真分析方面, 以可观测和不可观测 3 维线性定常系统为对象, 分析了不同大小初值偏差对滤波结果的影响, 仿真计算结果显示, 无论是对于可观测还是不可观测模型, Kalman 滤波的初始值偏差, 其影响都是不可忽略的, 它不仅可能会导致滤波估计值偏离真实状态, 而且偏差越大影响也可能会越大. 另外, 模型扰动和测量系统误差的大小也会影响初值偏差对滤波结果的影响, 方差越大则影响传递矩阵最大特征值越大, 初始值偏差对 Kalman 滤波的影响也会

越大. 通过详细计算分析和仿真验证, 揭示了三个方面重要信息: 1) 关于初始值的影响, 初始值偏差可能会导致状态滤波特别是滤波计算的前若干步滤波结果存在很大偏差. 2) 即使是算法进入收敛状态之后, 滤波初始值的影响也不能简单地忽略, 可能会因为初始值设置不当, 收敛的滤波结果也不一定能收敛到状态的真实值, 因而, 作为动态系统状态向量递推估计的 Kalman 滤波, 不同于常值参数向量迭代计算, 仅仅考虑算法收敛情况是不够的. 3) 偏差对滤波结果的影响, 与系统是否可控和可观测等性质以及算法收敛与否无必然联系, 即使是可观测系统, 滤波结果也可能持续偏离状态真实值.

本文研究结果对于实际应用 Kalman 滤波和分析滤波结果可靠性有重要意义. 在实际应用 Kalman 滤波算法时, 必须尽可能准确地选取滤波初始值和尽可能准确地估计系统误差大小; 否则, 有可能会出现滤波结果系统性偏差, 影响状态滤波估计的可靠性与准确性.

References

1 Kalman R. Phase-plane analysis of automatic control systems with nonlinear gain elements. *American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry, Transactions of the 1955*, **73**(6): 383−390

2 Chen Guan-Rong. Problems and Challenges in Control Theory under Complex Dynamical Network Environments. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 312−321
(陈关荣. 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战. 自动化学报, 2013, **39**(4): 312−321)

3 Chen Jie, Fang Hao, Xin Bin, Deng Fang. Modeling, optimization and control in ground-based digital weapon systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 943−962
(陈杰, 方浩, 辛斌, 邓方. 数字化陆用武器系统中的建模、优化与控制. 自动化学报, 2013, 39(7): 943−962)

4 Bao Wei-Min. Present situation and development tendency of aerospace control techniques. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(6): 697−702
(包为民. 航天飞行器控制技术研究现状与发展趋势. 自动化学报, 2013, **39**(6): 697−702)

5 Luke R, Wouters J. Kalman filter based estimation of auditory steady state response parameters. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 2017, **25**(3): 196−204

6 Wiberg D M, Powell T D, Ljungquist D. An online parameter estimator for quick convergence and time-varying linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(10): 1854−1863

7 Cattivelli F S, Sayed A H. Diffusion strategies for distributed Kalman filtering and smoothing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(9): 2069−2084

8 Lu X, Wang L L, Wang H X, Wang X H. Kalman filtering for delayed singular systems with multiplicative noise. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2016, **3**(1): 51−58

9 Nikoukhah R, Campbell S L, Delebecque F. Kalman filtering for general discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(10): 1829−1839

10 Ge Q B, Shao T, Duan Z S, Wen C L. Performance analysis of the Kalman filter with mismatched noise covariances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(12): 4014−4019

11 Bjorn U. Asymptotic convergence properties of the extended Kalman filter using filtered state estimates. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1980, **25**(6): 1207−1211

12 Deng Zi-Li, Guo Yi-Xin. *The Modern Time Series Analysis and Its Application: Modeling, Filtering, Deconvolution, Forecast and Control*. Beijing: Knowledge Press, 1989
(邓自立, 郭一新. 现代时间序列分析及其应用 — 建模、滤波、去卷、预报和控制. 北京: 知识出版社, 1989)

13 Yuki H, Takao S, Akira A, Tetsuya M. Application of the Kalman filter for faster strongcoupling of cardiovascular simulations. IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics. **2015**: 1−7

14 Jafar Z, Ehsan S. Convergence analysis of non-linear filtering based on cubature Kalman filter. *IET Science, Measurement & Technology*, 2015, **9**(3): 294−305

15 Francesco A, Cangemi T, D′Ippolito F, Fagiolini A, Sferlazza A. Convergence analysis of extended Kalman filter for sensorless control of induction motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, **62**(4): 2341−2352

16 Martin W C, Stubberud A R. An uncoupling method for linear system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(4): 506−509

17 Sangsuk-Iam S, Bullock T E. Analysis of discrete-time Kalman filtering under incorrect noise covariances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(12): 1304−1309

18 Cinquemani E. A superposition principle for the Kalman filter. *Systems & Control Letters*, 2006, **55**(1): 38−44

19 Liu X, Escamilla-Ambrosio P J, Lieven N A J. Extended Kalman filtering for the detection of damage in linear mechanical structures. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **325**(4−5): 1023−1046

洪腾腾 西安理工大学自动化与信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为导航、制导与控制, 滤波算法, 容错计算. E-mail: 956658398@qq.com

(**HONG Teng-Teng** Master student at the School of Automation and Information Engineering, Xi′an University of Technology. Her research interest covers navigation, guidance and control, filtering algorithms and outlier-tolerant computing.)

胡绍林 西安理工大学教授. 主要研究方向为过程监控, 系统安全, 导航与控制, 故障诊断与容错计算. 本文通信作者. E-mail: hfkth@126.com

(**HU Shao-Lin** Professor at Xi′an University of Technology. His research interest covers process monitoring, system safety, navigation and control, fault diagnosis and outlier-tolerant computing. Corresponding author of this paper.)