# 延迟不确定马尔科夫跳变系统的执行器和传感器故障同时估计方法

李晓航 [1] 朱芳来 [1]

**摘 要** 针对具有参数不确定和延迟环节的马尔科夫跳变系统, 在状态转移概率矩阵 (Transition probability matrix, TPM) 不确定的情形下, 讨论了其执行器和传感器故障同时估计的方法. 通过扩展系统状态, 将系统转换为一个具有马尔科夫跳变参数的广义描述系统, 基于此广义描述系统设计马尔科夫跳变观测器实现对其状态和传感器故障的估计. 与此同时, 还设计了一组自适应律对执行器故障进行在线调节. 通过求解一组线性矩阵不等式最优化问题, 得到观测器存在的充分条件. 最后, 针对两个数值实例, 验证了所设计方法的有效性.

**关键词** 马尔科夫跳变系统, 马尔科夫跳变观测器, 执行器故障估计, 传感器故障估计, 延迟环节

**引用格式** 李晓航, 朱芳来. 延迟不确定马尔科夫跳变系统的执行器和传感器故障同时估计方法. 自动化学报, 2017, **43**(1): 72−82

**DOI** 10.16383/j.aas.2017.c150389

## Simultaneous Estimation of Actuator and Sensor Faults for Uncertain Time-delayed Markovian Jump Systems

LI Xiao-Hang[1] ZHU Fang-Lai[1]

**Abstract** In this paper, a method of simultaneous estimation of actuator and sensor faults based on a class of uncertain time-delayed Markovian jump systems is presented. The transition probability matrix (TPM) is assumed to be uncertain. By extending the sensor faults as an auxiliary state, the system is converted into a generalized descriptor system with Markovian jump parameters. Based on the transformed system, a Markovian jump observer is designed to provide the estimates of the states and sensor faults. Meanwhile, a set of adaptive laws are given to adjust the actuator faults. Sufficient conditions of existence of the observer are given in terms of a linear matrix inequality optimization problem. Finally, two numerical examples are simulated to validate the effectiveness of the proposed approach.

**Key words** Markovian jump system, Markovian jump system observer, actuator fault estimation, sensor fault estimation, time-delayed component

**Citation** Li Xiao-Hang, Zhu Fang-Lai. Simultaneous estimation of actuator and sensor faults for uncertain time-delayed Markovian jump systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(1): 72−82

马尔科夫跳变系统是一类包含连续时间状态变量和离散时间模态变量的混杂系统. 在马尔科夫跳变系统中, 离散的模态变量是一个在连续时间下具有离散模态的马尔科夫过程, 其模态值取自一个有限的集合. 马尔科夫跳变系统被广泛应用于那些存在突发故障或环境变化的系统中, 包括电力系统、航空航天系统、制造业系统和网络控制系统等[1]. 近些年, 马尔科夫跳变系统逐渐成为了控制理论领域的一个研究热点, 主要研究包括稳定性与控制设计[2−15]、故障检测与容错控制[3, 16−20]、滤波及状态和故障估计[3, 7, 9, 16, 20, 21−24]. 在针对马尔科夫跳变系统估计问题的研究中, 文献 [9] 针对奇异马尔科夫跳变系统设计了观测器. 文献 [16] 基于描述系统的方法, 对一类具有延迟和非线性项的马尔科夫跳变系统设计了滑模观测器, 给出了系统状态和传感器故障的估计, 并将其应用到容错控制中. 文献 [20] 针对一类具有伊藤型随机运动的马尔科夫跳变系统处理了容错控制问题. 针对无法在线实时获得系统模态的广义马尔科夫跳变系统, 文献 [21] 研究了部分模态依赖观测器和控制器设计问题. 文献 [7, 22] 考虑了状态估计和滤波问题. 文献 [23] 针对具有非线性扰动的描述马尔科夫跳变系统设计全维和降维观测器来估计系统的状态. 文献 [24] 基于自适应观测器对马尔科夫跳变系统讨论了故障估计问题. 在以上的介绍中, 文献 [7, 21−23] 考虑的是马尔

收稿日期 2015-06-24 录用日期 2016-05-17
Manuscript received June 24, 2015; accepted May 17, 2016
国家自然科学基金 (61573256) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61573256)
本文责任编委 胡昌华
Recommended by Associate Editor HU Chang-Hua
1. 同济大学电子与信息工程学院 上海 201804
1. College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804

科夫跳变系统不具有执行器和传感器的情形, 文献 [24] 只考虑了执行器故障的估计问题, 虽然文献 [16, 20] 基于滑模观测器给出了执行器和传感器故障的同时估计, 但是需要事先获知故障以及其导数的上界. 由此可见, 目前国内外对同时具有执行器和传感器故障的马尔科夫跳变系统进行状态、执行器故障和传感器故障同时估计的研究并不多见. 此外, 在实际系统中, 延迟环节往往是导致系统不稳定的因素之一, 状态转移概率也往往是在线估计获得的, 具有一些不确定性, 因此对于具有延迟环节和状态转移概率不确定性的情形进行相关议题的讨论具有重大意义.

综上所述, 本文针对一类具有不确定状态转移概率的延迟马尔科夫跳变系统设计了自适应观测器来同时估计执行器和传感器故障. 本文的贡献在于: 1) 在状态转移概率不确定的情形下, 对一类具有延迟环节和参数不确定性的马尔科夫跳变系统给出了执行器和传感器故障的同时估计; 2) 本文假设状态转移概率矩阵是其估计值且具有不确定性, 相较于基于精确状态转移概率矩阵的文献 [16, 20] 更具实用性; 3) 本文设计过程中无需事先获知执行器或传感器故障的任何信息, 比如, 文献 [16] 要求传感器上界已知等, 因此本文具有更小的保守性.

## 1　系统模型和问题描述

考虑如下在概率空间 $(\Omega, F, P)$ 上具有参数不确定性的线性延迟马尔科夫跳变系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A(r_t) + \Delta A(r_t))\boldsymbol{x}(t) + \\ \qquad A_d(r_t)\boldsymbol{x}(t-\tau) + B(r_t)\boldsymbol{u}(t) + D(r_t)\boldsymbol{f}_a(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C(r_t)\boldsymbol{x}(t) + G(r_t)\boldsymbol{f}_s(t) \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \ \ t \in [\ -\tau \quad 0\ ] \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\Omega$ 是样本空间, $F$ 是样本空间上的 $\sigma$-代数子集, $P$ 为概率测度. $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别为系统状态和控制输入. $\boldsymbol{f}_a(t) \in \mathbf{R}^q$ 和 $\boldsymbol{f}_s(t) \in \mathbf{R}^w$ 分别是未知的执行器故障和传感器故障[16, 20]. $\{r_t\}$ 是在有限集 $S = \{1, \cdots, s\}$ 内取值的连续时间离散状态的马尔科夫过程, 它具有如下状态转移概率:

$$P_r(r_{t+h} = j | r_t = i) = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), & i \neq j \\ 1 + \pi_{ii}h + o(h), & i = j \end{cases}$$

其中 $h > 0$, $\lim_{h\to 0} o(h)/h = 0$, $\pi_{ij}$ 是从时间 $t$ 处状态 $i$ 到时间 $t+h$ 处状态 $j$ 的状态转移概率, 且有 $\pi_{ii} = -\sum_{j=1,\, i\neq j}^{s} \pi_{ij}$, $\pi_{ij} \geq 0$. 定义 $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ 为未知的状态转移概率矩阵, 且满足

$$\Pi \subseteq \left\{ \hat{\Pi} + \Delta\Pi : |\Delta\pi_{ij}| \leq \kappa_{ij}, \kappa_{ij} \geq 0, i \neq j,\ i,\ j \in S \right\}$$

其中 $\hat{\Pi} = \{\hat{\pi}_{ij}\}$ 是已知的常数矩阵, $\hat{\pi}_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $i, j \in S$ 是 $\pi_{ij}$ 的估计值, $\Delta\Pi = \{\Delta\pi_{ij}\}$ 表示状态转移速率矩阵中的不确定性, $\Delta\pi_{ij}$ 为速率估计误差, 并且在有限集 $[\ -\kappa_{ij} \quad \kappa_{ij}\ ]$ 中取值, 对于 $i \in S$, 有 $\hat{\pi}_{ii} = -\sum_{j=1,\, i\neq j}^{s} \hat{\pi}_{ij}$ 和 $\Delta\pi_{ii} = -\sum_{j=1,\, i\neq j}^{s} \Delta\pi_{ij}$. $A(r_t)$, $A_d(r_t)$, $B(r_t)$, $D(r_t)$, $C(r_t)$ 和 $G(r_t)$ 是具有适当维数关于 $r_t$ 的矩阵函数. $\Delta A(r_t)$ 是表示参数不确定性的未知矩阵, 并假设 $\Delta A(r_t) = M(r_t)F(r_t, t)H(r_t)$, 其中 $M(r_t)$ 和 $H(r_t)$ 是已知的常矩阵, $F(r_t, t)$ 是未知的时变矩阵满足 $F^{\mathrm{T}}(r_t, t)F(r_t, t) \leq I$. $\tau > 0$ 是已知的延迟时间. 函数 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 是在 $[\ -\tau \quad 0\ ]$ 上的初始状态, 系统初始模态为 $r_0$. 假设 $G(r_t)$ 是列满秩.

**注 1.** 本文假设 $G(r_t)$ 是列满秩是具有一般性的, 许多关于传感器故障估计的文献都用到了此假设[16, 20, 25]. 关于参数不确定性 $\Delta A(r_t) = M(r_t)F(r_t, t)H(r_t)$ 的假设也在针对不确定性系统问题的研究中被频繁应用[26−27].

为了表示方便, 我们定义对任意矩阵 $\Psi$ 有 $\Psi(r_t = i) = \Psi_i$, $i \in \mathbf{S}$, 任意变量 $\boldsymbol{\chi}(t)$ 有 $\boldsymbol{\chi}(t) = \boldsymbol{\chi}$.

**定义 1.** 定义变量 $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(t)\} \in L_2[\ 0 \quad \infty\ )$, 则它的 $L_2$ 范数为 $\|\mathfrak{F}\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \mathfrak{F}(t)^{\mathrm{T}}\mathfrak{F}(t)\mathrm{d}t}$.

**定义 2**[25]**.** 对于 $\tau > 0$, 如果对于 $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0}$, $\Delta A_i \equiv \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}_a \equiv \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}_s \equiv \boldsymbol{0}$, 初始条件 $(\boldsymbol{x}_0, r_0)$ 和所有定义在 $[\ -\tau \quad 0\ ]$ 上的有限函数 $\boldsymbol{\phi}(t)$, 有

$$\left[ \mathrm{E} \int_0^\infty \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t | \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\phi}(t), r_0 \right] \leq \infty$$

其中 E 表示数学期望, 则系统 (1) 是随机稳定的.

**定义 3**[28]**.** 对马尔科夫跳变系统形如

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_i\boldsymbol{x}(t) + B_i\boldsymbol{u}(t) + B_{\omega i}\boldsymbol{\omega}(t) \\ \boldsymbol{z}_\omega(t) = C_i\boldsymbol{x}(t) + D_i\boldsymbol{u}(t) + D_{\omega i}\boldsymbol{\omega}(t) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 表示干扰. 如果对于 $\lambda > 0$, 存在常数 $M(\boldsymbol{x}_0, r_0)$ 且 $M(0, r_0) = 0$, 满足

$$\left[ \mathrm{E} \int_0^\infty \boldsymbol{z}_\omega^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}_\omega(t)\mathrm{d}t | \boldsymbol{x}_0, r_0 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \gamma[\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2^2 + M(\boldsymbol{x}_0, r_0)]^{\frac{1}{2}}$$

则系统 (2) 是随机稳定且具有 $H_\infty$ 干扰抑制指数 $\lambda$.

**引理 1.** 对于标量 $\sigma > 0$ 和实矩阵 $\Theta_1$, $\Theta_2$ 有

$$\Theta_1^{\mathrm{T}}\Theta_2 + \Theta_2^{\mathrm{T}}\Theta_1 \leq \sigma^{-1}\Theta_1^{\mathrm{T}}\Theta_1 + \sigma\Theta_2^{\mathrm{T}}\Theta_2$$

**引理 2.** 令矩阵 $U$, $V'$ 和 $F'(t)$ 为任意适当的实数矩阵, 其中 $U$ 和 $V'$ 为已知, $F'(t)$ 为未知且满足 $F'^{\mathrm{T}}(t)F'(t) \leq I$, 对于 $\varepsilon > 0$, 如下不等式

$$UF'(t)V' + V'^{\mathrm{T}}F'^{\mathrm{T}}(t)U^{\mathrm{T}} \leq \varepsilon UU^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}V'^{\mathrm{T}}V'$$

是成立的.

**假设 1.** $\boldsymbol{f}_a$ 是可微的, 且 $\dot{\boldsymbol{f}}_a \in L_2[0\ \infty)$.

**注 2.** 本文所设计方法可以适用于任何有界连续的传感器故障和满足假设 1 的执行器故障, 且设计过程不需要知道有关故障的任何信息, 例如故障的上界[16] 和故障导数的上界[20] 等. 在实际应用中, 故障往往都是经过一个暂态的变化之后几乎保持不变的, 即满足 $\dot{\boldsymbol{f}}_a \in L_2[0\ \infty)$. 相比于文献 [29] 中关于 $\dot{\boldsymbol{f}}_a$ 有界的假设, 文中对于执行器故障的假设 1 更具有一般性.

为了能达到传感器故障和状态同时估计的目的, 定义一个新的变量 $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{f}_s \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+w}$, 相应地, 记 $\bar{A}_i = [A_i\ 0_{n\times w}]$, $\bar{C}_i = [C_i\ G_i]$, $E = [I_n\ 0_{n\times w}]$. 于是, 系统 (1) 可以写为

$$\begin{cases} E\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{A}_i\bar{\boldsymbol{x}} + \Delta A_i\boldsymbol{x} + A_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau) + \\ \qquad B_i\boldsymbol{u} + D_i\boldsymbol{f}_a \\ \boldsymbol{y} = \bar{C}_i\bar{\boldsymbol{x}} \end{cases} \tag{3}$$

系统 (3) 是一个广义描述系统, 状态包括原系统的状态和传感器故障. 如果能够针对系统 (3) 设计一个观测器, 就能够同时得到原系统的状态和传感器故障的估计.

## 2 主要结论

针对系统 (3), 本节将提出一种能同时估计系统状态、执行器和传感器故障的自适应观测器.

设计如下自适应观测器系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = N_i\boldsymbol{z} + L_i\boldsymbol{y} + T_iB_i\boldsymbol{u} + \\ \qquad T_iD_i\hat{\boldsymbol{f}}_a + T_iA_{di}\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau) \\ \hat{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{z} + Q_i\boldsymbol{y} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{f}}}_a = \Phi_i(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}) \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^{n+w}$ 为观测器中间变量, $\hat{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_s \end{bmatrix}$ 为 $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{f}_s \end{bmatrix}$ 的估计, $\hat{\boldsymbol{f}}_a$ 为执行器故障 $\boldsymbol{f}_a$ 的估计, $\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau)$ 为延迟状态 $\boldsymbol{x}(t-\tau)$ 的估计. $N_i$, $L_i$, $T_i$, $Q_i$ 和 $\Phi_i$ 为适当维数的待定矩阵. 本文的主要目标就是求取矩阵 $N_i$, $L_i$, $T_i$, $Q_i$ 和 $\Phi_i$ 使得系统 (4) 可以在 $H_\infty$ 的意义下估计系统 (3) 的状态, 同时可以给出执行器故障 $\boldsymbol{f}_a$ 在 $H_\infty$ 意义下的估计.

因为 $G_i$ 是列满秩, 我们可以得到 $\begin{bmatrix} E \\ \bar{C}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times w} \\ C_i & G_i \end{bmatrix}$ 也是列满秩的. 因此存在矩阵 $T_i \in \mathbf{R}^{(n+w)\times n}$ 和 $Q_i \in \mathbf{R}^{(n+w)\times p}$ 满足

$$T_iE + Q_i\bar{C}_i = I_{n+w} \tag{5}$$

且其中一组特解为

$$\begin{aligned} T_i &= \begin{bmatrix} E \\ \bar{C}_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{p\times n} \end{bmatrix} \\ Q_i &= \begin{bmatrix} E \\ \bar{C}_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n\times p} \\ I_p \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

其中 "$-1$" 为矩阵的 Moore-Penrose 逆.

定义观测误差 $\boldsymbol{e} = \bar{\boldsymbol{x}} - \hat{\bar{\boldsymbol{x}}}$, 由系统 (4) 中的第二式和式 (5) 可得

$$\boldsymbol{e} = \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{z} - Q_i\bar{C}_i\bar{\boldsymbol{x}} = (I_{n+w} - Q_i\bar{C}_i)\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{z} = T_iE\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{z}$$

因此误差的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}} &= T_iE\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} - \dot{\boldsymbol{z}} = \\ &\quad T_i\bar{A}_i\bar{\boldsymbol{x}} + T_i\Delta A_i\boldsymbol{x} + T_iA_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau) + T_iB_i\boldsymbol{u} + \\ &\quad T_iD_i\boldsymbol{f}_a - N_i\boldsymbol{z} - L_i\boldsymbol{y} - \\ &\quad T_iB_i\boldsymbol{u} - T_iD_i\hat{\boldsymbol{f}}_a - T_iA_{di}\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau) = \\ &\quad T_i\bar{A}_i\bar{\boldsymbol{x}} + T_i\Delta A_i\boldsymbol{x} + T_iA_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau) + \\ &\quad T_iB_i\boldsymbol{u} + T_iD_i\boldsymbol{f}_a - N_i\boldsymbol{z} - L_i\boldsymbol{y} - \\ &\quad T_iB_i\boldsymbol{u} - T_iD_i\hat{\boldsymbol{f}}_a - T_iA_{di}\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau) + \\ &\quad N_iT_iE\bar{\boldsymbol{x}} - N_iT_iE\bar{\boldsymbol{x}} = \\ &\quad N_i\boldsymbol{e} + (T_i\bar{A}_i - L_i\bar{C}_i - N_iT_iE)\bar{\boldsymbol{x}} + \\ &\quad T_iD_i\tilde{\boldsymbol{f}}_a + T_iA_{di}\tilde{\boldsymbol{x}}(t-\tau) + T_i\Delta A_i\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{f}}_a = \boldsymbol{f}_a - \hat{\boldsymbol{f}}_a$, $\tilde{\boldsymbol{x}}(t-\tau) = \boldsymbol{x}(t-\tau) - \hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau)$. 如果待定矩阵 $N_i \in \mathbf{R}^{(n+w)\times(n+w)}$ 和 $L_i \in \mathbf{R}^{(n+w)\times p}$ 满足

$$T_i\bar{A}_i - L_i\bar{C}_i - N_iT_iE = 0 \tag{8}$$

则式 (7) 可以化简为

$$\dot{\boldsymbol{e}} = N_i\boldsymbol{e} + T_iD_i\tilde{\boldsymbol{f}}_a + T_iA_{di}\tilde{\boldsymbol{x}}(t-\tau) + T_i\Delta A_i\boldsymbol{x} \tag{9}$$

不难发现满足式 (8) 的一组解为

$$N_i = T_i\bar{A}_i - K_i\bar{C}_i \tag{10}$$

和

$$L_i = K_i + N_iQ_i \tag{11}$$

其中 $K_i$ 为具有适当维数的任意矩阵.

由系统 (4) 中第三式和假设 1 可以得到

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{f}}}_a = \dot{\boldsymbol{f}}_a - \Phi_i\bar{C}_i\boldsymbol{e} \tag{12}$$

为了能够方便地求取矩阵 $K_i$ 和 $\Phi_i$, 定义一个新的变量 $\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \tilde{\boldsymbol{f}}_a \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+w+q}$, 则误差方程 (9) 和 (12) 可以合并为

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = (\hat{A}_i - \hat{L}_i\hat{C}_i)\boldsymbol{\zeta} + \hat{D}_i\boldsymbol{v} + \hat{A}_{di}\boldsymbol{\zeta}(t-\tau) + \Delta\hat{A}_i\boldsymbol{x} \quad (13)$$

其中 $\hat{A}_i = \begin{bmatrix} T_i\bar{A}_i & T_iD_i \\ 0_{q\times(n+w)} & 0_{q\times q} \end{bmatrix}$, $\hat{L}_i = \begin{bmatrix} K_i \\ \Phi_i \end{bmatrix}$, $\hat{C}_i = \begin{bmatrix} \bar{C}_i & 0_{p\times q} \end{bmatrix}$, $\hat{D}_i = \begin{bmatrix} 0_{(n+w)\times q} \\ I_q \end{bmatrix}$, $\hat{A}_{di} = \begin{bmatrix} T_i\bar{A}_{di} & 0_{(n+w)\times q} \\ 0_{q\times(n+w)} & 0_{q\times q} \end{bmatrix}$, $\Delta\hat{A}_i = \hat{M}_i\hat{F}_i(t)\hat{N}_i$, $\bar{A}_{di} = \begin{bmatrix} A_{di} & 0_{n\times w} \end{bmatrix}$, $\hat{M}_i = \begin{bmatrix} T_iM_i & 0_{(n+w)\times 1} \\ 0_{q\times 1} & 0_{q\times 1} \end{bmatrix}$, $\hat{F}_i(t) = \mathrm{diag}\{F_i(t), F_i(t)\}$, $\hat{N}_i = \begin{bmatrix} N_i \\ 0_{1\times n} \end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{f}}_a$. 由 $F_i(t)$ 的性质可得 $\hat{F}_i(t)$ 同样满足 $\hat{F}_i^{\mathrm{T}}(t)\hat{F}_i(t) \le I$.

由式 (10)、(11) 和 (13) 可以看出, 只要得到矩阵 $\hat{L}_i$ 使得式 (13) 是鲁棒随机稳定的, 观测器 (4) 即可以实现. 矩阵 $K_i$ 和 $\Phi_i$ 可由下式获得

$$\begin{cases} K_i = \begin{bmatrix} I_{n+w} & 0_{(n+w)\times q} \end{bmatrix}\hat{L}_i \\ \Phi_i = \begin{bmatrix} 0_{q\times(n+w)} & I_q \end{bmatrix}\hat{L}_i \end{cases} \quad (14)$$

下面的定理给出了本文的主要结论. 该定理不仅给出了式 (13) 的鲁棒稳定性的证明, 还给出了矩阵 $\hat{L}_i$ 的求取方法.

**定理 1.** 如果对于 $\lambda_{ij} > 0$, $\mu_{ij} > 0$, $\varepsilon_{1i} > 0$ 和 $\varepsilon_{2i} > 0$, $i, j \in S$, 存在对称正定矩阵 $P_i \in \mathbf{R}^{(n+w+q)\times(n+w+q)}$, $R_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $X \in \mathbf{R}^{(n+w+q)\times(n+w+q)}$, $Z \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 矩阵 $Y_i \in \mathbf{R}^{(n+w+q)\times p}$ 和 $\gamma > 0$ 使得下述凸优化问题 (15) 有解 (其中, $*$ 表示矩阵的对称部分, 这里对对称矩阵 $\wp$, $\wp < 0$ 表示对称矩阵 $\wp$ 是负定的), 则误差系统 (13) 是鲁棒随机稳定的, 且具有 $H_\infty$ 干扰抑制水平 $\gamma$. 其中

$$\Gamma_{1i} = P_i\hat{A}_i - Y_i\hat{C}_i + \hat{A}_i^{\mathrm{T}}P_i - (Y_i\hat{C}_i)^{\mathrm{T}} + I_{n+w+q} + \sum_{j=1,\, j\ne i}^{s} \frac{\kappa_{ij}^2}{4}\lambda_{ij}I_{n+w+q} + \sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}P_j + X$$

$$\Gamma_{2i} = R_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}R_i + Z + \sum_{P_i\hat{L}_i=Y_i}^{s}\hat{\pi}_{ij}R_j + \sum_{j=1,\, j\ne i}^{s}\frac{\kappa_{ij}^2}{4}\mu_{ij}I_n$$

$$\bar{P}_i = \begin{bmatrix} P_1 - P_i & \cdots & P_{i-1} - P_i & P_{i+1} - P_i & \cdots & P_s - P_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}_i = \begin{bmatrix} R_1 - R_i & \cdots & R_{i-1} - R_i & R_{i+1} - R_i & \cdots & R_s - R_i \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{1i} = \mathrm{diag}\big\{ -\lambda_{i1}I_{n+w+q}, \cdots, -\lambda_{i(i-1)}I_{n+w+q}, -\lambda_{i(i+1)}I_{n+w+q}, \cdots, -\lambda_{is}I_{n+w+q} \big\}$$

$$\Lambda_{2i} = \mathrm{diag}\big\{ -\mu_{i1}I_n, \cdots, -\mu_{i(i-1)}I_n, -\mu_{i(i+1)}I_n, \cdots, -\mu_{is}I_n \big\}$$

$$\min\ \gamma^2$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{1i} & P_i\hat{A}_{di} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_i\hat{D}_i & P_i\hat{M}_i & \bar{P}_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_{2i} & R_iA_{di} & R_iB_i & R_iD_i & 0 & 0 & 0 & \hat{N}_i^{\mathrm{T}} & R_iM_i & N_i^{\mathrm{T}} & \bar{R}_i \\ * & * & * & -Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2I_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{1i}^{-1}I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Lambda_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{1i}I_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{2i}^{-1}I_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_{2i}I_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Lambda_{2i} \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

**证明.** 选取 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{x},i)=V(\boldsymbol{\zeta},i)+\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(\theta)X\boldsymbol{\zeta}(\theta)\mathrm{d}\theta+V(\boldsymbol{x},i)+\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)Z\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中 $V(\boldsymbol{\zeta},i)=\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{\zeta}$, $V(\boldsymbol{x},i)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_i\boldsymbol{x}$. 定义对于具有马尔科夫过程的 Lyapunov 函数的弱微分算子为

$$\ell V(\boldsymbol{\zeta},i)=V(\boldsymbol{\zeta},r_t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{d}t}|_{r_t=i}+\sum_{j\in S}\pi_{ij}V(\boldsymbol{\zeta},j)$$

$$\ell V(\boldsymbol{x},i)=V(\boldsymbol{x},r_t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}|_{r_t=i}+\sum_{j\in S}\pi_{ij}V(\boldsymbol{x},j)$$

因此对于任意 $i\in S$ 有

$$\begin{aligned}\ell V(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{x},\,i)=&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(P_i(\hat{A}_i-\hat{L}_i\hat{C}_i)+(\hat{A}_i-\hat{L}_i\hat{C}_i)^{\mathrm{T}}P_i)\boldsymbol{\zeta}+2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\hat{D}_i\boldsymbol{v}+\\&2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\Delta\hat{A}_i\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\hat{A}_{di}\boldsymbol{\zeta}(t-\tau)+\\&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}X\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t-\tau)X\boldsymbol{\zeta}(t-\tau)+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(R_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}R_i)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Z\boldsymbol{x}+\\&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iB_i\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iD_i\boldsymbol{f}_a+\\&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iA_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_i\Delta A_i\boldsymbol{x}-\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Z\boldsymbol{x}(t-\tau)+\\&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}P_j\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}R_j\boldsymbol{x}\end{aligned}\tag{16}$$

对于上式中的 $2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\Delta\hat{A}_i\boldsymbol{x}$ 和 $2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_i\Delta A_i\boldsymbol{x}$ 应用引理 2 可得, 对于 $\varepsilon_{1i}>0$ 和 $\varepsilon_{2i}>0$, $i\in S$ 有

$$2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\Delta\hat{A}_i\boldsymbol{x}\le\varepsilon_{1i}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\hat{M}_i\hat{M}_i^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{\zeta}+\varepsilon_{1i}^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\hat{N}_i^{\mathrm{T}}\hat{N}_i\boldsymbol{x}\tag{17}$$

和

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_i\Delta A_i\boldsymbol{x}\le\varepsilon_{2i}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iM_iM_i^{\mathrm{T}}R_i\boldsymbol{x}+\varepsilon_{2i}^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}N_i^{\mathrm{T}}N_i\boldsymbol{x}\tag{18}$$

此外, 基于状态转移概率矩阵的特性我们可以分析得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}P_j=&\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}P_j+\sum_{j=1}^{s}\Delta\pi_{ij}P_j=\\&\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}P_j+\sum_{j=1,j\ne i}^{s}(\frac{\Delta\pi_{ij}}{2}(P_j-P_i)+\\&\frac{\Delta\pi_{ij}}{2}(P_j-P_i))\end{aligned}$$

对上式第二行最后一项应用引理 1, 可以得到对于 $i,j\in S$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}P_j\le&\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}P_j+\\&\sum_{j=1,j\ne i}^{s}(\frac{\kappa_{ij}^2}{4}\lambda_{ij}I_{n+w+q}+\lambda_{ij}^{-1}(P_j-P_i)^2)\end{aligned}\tag{19}$$

其中 $\kappa_{ij}$ 为 $\Delta\pi_{ij}$ 的上界在第一部分已经被定义, $\lambda_{ij}>0$ 为任意标量. 同理对于 $i,j\in S$, $\mu_{ij}>0$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}R_j\le&\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}R_j+\\&\sum_{j=1,j\ne i}^{s}(\frac{\kappa_{ij}^2}{4}\mu_{ij}I_n+\mu_{ij}^{-1}(R_j-R_i)^2)\end{aligned}\tag{20}$$

将式 (17) ∼ (20) 代入式 (16) 可得

$$\begin{aligned}\ell V(\boldsymbol{\zeta},x,\,i)\le&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(P_i(\hat{A}_i-\hat{L}_i\hat{C}_i)+(\hat{A}_i-\hat{L}_i\hat{C}_i)^{\mathrm{T}}P_i)\boldsymbol{\zeta}+2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\hat{D}_i\boldsymbol{v}+\\&\varepsilon_{1i}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\hat{M}_i\hat{M}_i^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{\zeta}+\varepsilon_{1i}^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\hat{N}_i^{\mathrm{T}}\hat{N}_i\boldsymbol{x}+\\&2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\hat{A}_{di}\boldsymbol{\zeta}(t-\tau)+\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}X\boldsymbol{\zeta}-\\&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t-\tau)X\boldsymbol{\zeta}(t-\tau)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Z\boldsymbol{x}+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(R_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}R_i)\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iB_i\boldsymbol{u}+\\&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iD_i\boldsymbol{f}_a+\varepsilon_{2i}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iM_iM_i^{\mathrm{T}}R_i\boldsymbol{x}+\\&\varepsilon_{2i}^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}N_i^{\mathrm{T}}N_i\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iA_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau)-\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Z\boldsymbol{x}(t-\tau)+\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}P_j\boldsymbol{\zeta}+\\&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1,j\ne i}^{s}(\frac{\kappa_{ij}^2}{4}\lambda_{ij}I_{n+w+q}+\lambda_{ij}^{-1}(P_j-P_i)^2)\boldsymbol{\zeta}+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}R_j\boldsymbol{x}\;+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1,j\ne i}^{s}(\frac{\kappa_{ij}^2}{4}\mu_{ij}I_n+\mu_{ij}^{-1}(R_j-R_i)^2)\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

令 $W=\ell V(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{x},\,i)+\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}-\gamma^2\boldsymbol{\varpi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varpi}$, 其中 $\boldsymbol{\varpi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{f}_a\\\boldsymbol{v}\end{bmatrix}$, 则有

$$\begin{aligned}W\le&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(P_i(\hat{A}_i-\hat{L}_i\hat{C}_i)+(\hat{A}_i-\hat{L}_i\hat{C}_i)^{\mathrm{T}}P_i)\boldsymbol{\zeta}+\\&2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\hat{D}_i\boldsymbol{v}+\varepsilon_{1i}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\hat{M}_i\hat{M}_i^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{\zeta}+\\&\varepsilon_{1i}^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\hat{N}_i^{\mathrm{T}}\hat{N}_i\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}P_i\hat{A}_{di}\boldsymbol{\zeta}(t-\tau)+\\&\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}X\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t-\tau)X\boldsymbol{\zeta}(t-\tau)+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(R_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}R_i)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Z\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iB_i\boldsymbol{u}+\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{2i}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iM_iM_i^{\mathrm{T}}R_i\boldsymbol{x}+\varepsilon_{2i}^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}N_i^{\mathrm{T}}N_i\boldsymbol{x}+$$
$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iD_i\boldsymbol{f}_a+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R_iA_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau)-$$
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)Z\boldsymbol{x}(t-\tau)+\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}P_j\boldsymbol{\zeta}+$$
$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1,j\neq i}^{s}(\frac{\kappa_{ij}^2}{4}\lambda_{ij}I_{n+w+q}+\lambda_{ij}^{-1}(P_j-P_i)^2)\boldsymbol{\zeta}+$$
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}R_j\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1,j\neq i}^{s}(\frac{\kappa_{ij}^2}{4}\mu_{ij}I_n+$$
$$\mu_{ij}^{-1}(R_j-R_i)^2)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}-\gamma\boldsymbol{\varpi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varpi}=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\Omega_i\boldsymbol{\eta}$$

其中

$$\Omega_i=\begin{bmatrix}\Upsilon_{1i}&P_i\hat{A}_{di}&0&0&0&0&P_i\hat{D}_i*&-X&0&0&0&0&0*&*&\Upsilon_{2i}&R_iA_{di}&R_iB_i&R_iD_i&0*&*&*&-Z&0&0&0*&*&*&*&-\gamma^2I_m&0&0*&*&*&*&*&-\gamma^2I_q&0*&*&*&*&*&*&-\gamma^2I_q\end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{1i}=P_i(\hat{A}_i-\hat{L}_i\hat{C}_i)+(\hat{A}_i-\hat{L}_i\hat{C}_i)^{\mathrm{T}}P_i+I_{n+w+q}+$$
$$\varepsilon_{1i}P_i\hat{M}_i\hat{M}_i^{\mathrm{T}}P_i+X+\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}P_j+$$
$$\sum_{j=1,j\neq i}^{s}(\tfrac{\kappa_{ij}^2}{4}\lambda_{ij}I_{n+w+q}+\lambda_{ij}^{-1}(P_j-P_i)^2)$$

$$\Upsilon_{2i}=R_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}R_i+Z+\sum_{j=1}^{s}\hat{\pi}_{ij}R_j+$$
$$\sum_{j=1,j\neq i}^{s}(\tfrac{\kappa_{ij}^2}{4}\mu_{ij}I_n+\mu_{ij}^{-1}(R_j-R_i)^2)+$$
$$\varepsilon_{2i}R_iM_iM_i^{\mathrm{T}}R_i+\varepsilon_{1i}^{-1}\hat{N}_i^{\mathrm{T}}\hat{N}_i+\varepsilon_{2i}^{-1}N_i^{\mathrm{T}}N_i$$

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}&\boldsymbol{\zeta}(t-\tau)&\boldsymbol{x}&\boldsymbol{x}(t-\tau)&\boldsymbol{\varpi}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

注意到 $P_i\hat{L}_i=Y_i$, 且对式 (15) 计算舒尔补可得 $W<0$, 即 $\ell V+\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}-\gamma\boldsymbol{\varpi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varpi}<0$. 由 Dynkin′s 公式, 有

$$\mathrm{E}\left\{V(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{x},i)\right\}-\mathrm{E}\left\{V(\boldsymbol{\zeta}_0,\boldsymbol{x}_0,r_0)\right\}+$$
$$\mathrm{E}\int_0^{\infty}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{\zeta}(\theta)\mathrm{d}\theta-\mathrm{E}\int_0^{\infty}\gamma^2\boldsymbol{\varpi}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{\varpi}(\theta)\mathrm{d}\theta<0$$

其中 $\boldsymbol{\zeta}_0$, $\boldsymbol{x}_0$, $r_0$ 分别为相应量的初始值. 因此我们可以得到

$$\mathrm{E}\int_0^{\infty}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{\zeta}(\theta)\mathrm{d}\theta-\mathrm{E}\int_0^{\infty}\gamma^2\boldsymbol{\varpi}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{\varpi}(\theta)\mathrm{d}\theta<\mathrm{E}V(\boldsymbol{\zeta}_0,\boldsymbol{x}_0,r_0)$$

由定义 1 即

$$[\int_0^{\infty}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{\zeta}(\theta)\mathrm{d}\theta]^{\frac{1}{2}}\leq[\gamma^2\left\|\boldsymbol{\varpi}(\theta)\right\|_2^2+V(\boldsymbol{\zeta}_0,\boldsymbol{x}_0,r_0)]^{\frac{1}{2}}\tag{21}$$

因此结合定义 2 和 3, 系统 (13) 鲁棒随机稳定且具有干扰抑制水平 $\gamma$. □

**注 3.** 本文引入了 Lyapunov-Krasovskii 函数来处理带有时滞项的稳定性证明, 利用 Lyapunov-Krasovskii 函数中的积分项可以把系统的时滞项连同状态引入到线性矩阵不等式中, 从而利用 Lyapunov 稳定性理论可以使得整个系统的状态满足定义 2 的要求.

由定理 1 可以得出, 系统 (4) 是系统 (3) 的鲁棒观测器, 并且可以估计出系统状态、执行器和传感器故障. 具体的算法如下:

1) 由式 (5) 和 (6) 计算得出矩阵 $T_i$ 和 $Q_i$;

2) 求解凸优化问题 (15), 若有解, 则可以得到 $\hat{L}_i=P_i^{-1}Y_i$, 并通过式 (14) 计算得到矩阵 $K_i$ 和 $\Phi_i$;

3) 将 $K_i$ 代入式 (10) 和 (11) 即可得到矩阵 $N_i$ 和 $L_i$.

至此观测器的系数矩阵均求取得到, 观测器 (4) 可以实现. 系统的状态和传感器故障可由 $\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}I_n&0_{n\times w}\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\tilde{x}}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{f}}_s=\begin{bmatrix}0_{w\times n}&I_w\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\tilde{x}}}$ 得到. $\hat{\boldsymbol{f}}_a$ 可由系统 (4) 中的第三式在线调节得到.

**注 4**[13]**.** 系统 (4) 中的观测器是依赖于马尔科夫跳变系统的模态的, 因此当系统跳变到某一个模态时, 观测器相应地切换到这个模态. 此外, 观测器又依赖于转移概率 $\pi_{ij}$, 使得其能够处理跳变所带来的影响. 因此, 观测器 (4) 可以保证在系统跳变的情形下始终能估计出系统状态、执行器和传感器故障.

**注 5.** 本文所设计的方法中传感器估计的思路与文献 [16] 相类似, 都是利用了广义描述系统的思想, 但是设计观测器的技术手段是不同的. 文献 [16] 将传感器故障引入到描述系统中, 然后针对该描述系统设计了滑模观测器, 利用滑模控制律抑制了传感器故障, 然后对系统状态 (包含传感器故障) 做出了估计. 而本文并没有将传感器故障引入描述系统中, 针对描述系统设计了自适应观测器, 该观测器不仅可以估计系统状态和传感器故障, 还可以在线自动调节出执行器故障. 相较于文献 [16], 本文存在以下优点: 1) 本文考虑的是一类具有参数不确定且状态转移概率不确定的延迟马尔科夫跳变系统, 而文献 [16] 假定状态转移概率精确可得, 这具有一定限制性; 2) 本文同时估计了状态、执行器和传感器故障, 文献 [16] 并没有涉及到执行器故障的估计; 3) 由于文献 [16] 通过设计滑模观测器估计系统状态和抑制传感器故障, 因此需要提前获知传感器故障的上界, 而本文设计无需知道其上界.

## 3　仿真分析

### 3.1　数值例子

为验证本文所提出方法的有效性, 考虑一个形如式 (1) 的具有两个模态的数值延迟马尔科夫跳变

系统, 相关参数如下:

$$A_1=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 1\\ 0 & -7.5 & 0\\ 2 & 0 & -5\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 1.1\\ 0 & -8 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$A_{d1}=\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 0.1\\ 0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$A_{d2}=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0.05\\ 0.05 & 0 & 0\\ 0 & 0.05 & 0\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0.5\\ 0\\ 0.5\end{bmatrix}$$

$$D_1=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.1\\ 0.1\end{bmatrix}, D_2=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.05\\ 0.1\end{bmatrix}$$

$$C_1=C_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$G_1=G_2=\begin{bmatrix}0.1\\ -0.3\end{bmatrix}, M_1=M_2=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.2\\ 0.1\end{bmatrix}$$

$$N_1=N_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.2\end{bmatrix}$$

$$F_1(t)=F_2(t)=\sin(t)$$

估计的状态转移概率矩阵为 $\hat{\Pi}=\begin{bmatrix}-0.4 & 0.4\\ 0.3 & -0.3\end{bmatrix}$, $\kappa_{12}=\kappa_{21}=1$ 和 $\lambda_{12}=\lambda_{21}=\varepsilon_{11}=\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\varepsilon_{22}=\mu_{12}=\mu_{21}=1$, 且延迟时间为 3 s. 执行器故障设定为 $f_a=\sin(5t)+\mathrm{e}^{-2t}+2\cos(t)$, 传感器故障设定为 $f_s=\sin(t)+2\cos(5t)$. 本文假设马尔科夫系统有 2 个模态 $S=\{1,2\}$.

在仿真中分别设置初始状态 $\boldsymbol{x}_0=[\ 3\quad -2\quad 2\ ]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{z}_0=[\ 0\quad 0\quad 2\ ]^{\mathrm{T}}$, $r_0=1$ 和 $\boldsymbol{\phi}(t)=[\ 1\quad 0\quad 0\ ]^{\mathrm{T}}$, $t\in[\ -3\quad 0\ ]$. 系统状态估计如图 1～3 所示. 图 4 为执行器故障估计效果, 图 5 为传感器故障估计效果. 图 6 为马尔科夫跳变系统的切换信号. 由图 1～5 可以看出本文方法对状态、执行器和传感器故障有很好的估计效果, 仿真结果证明了方法的可行性.

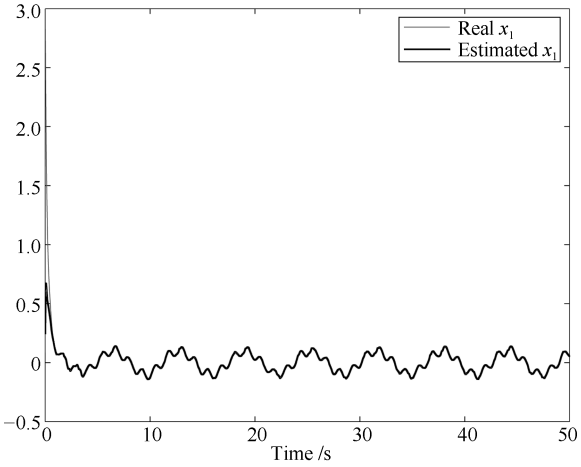


图 1 状态 $x_1$ 的估计曲线

Fig. 1 The curve of the estimation of $x_1$

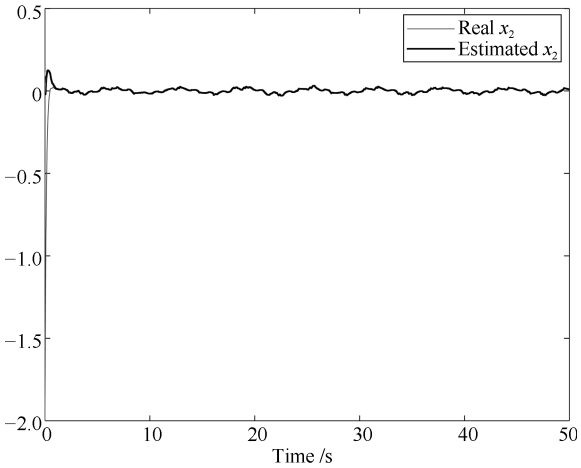


图 2 状态 $x_2$ 的估计曲线

Fig. 2 The curve of the estimation of $x_2$

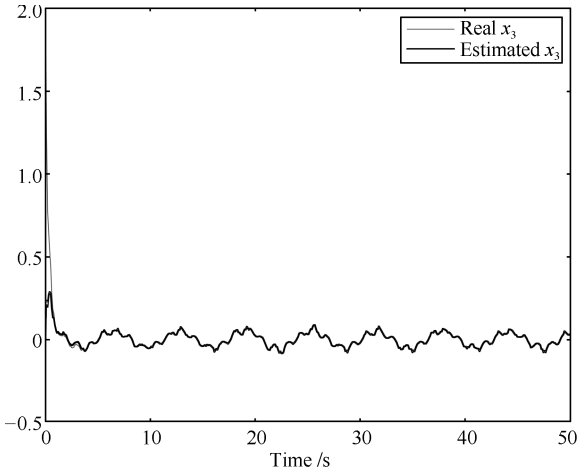


图 3 状态 $x_3$ 的估计曲线

Fig. 3 The curve of the estimation of $x_3$

### 3.2 实际例子

为了进一步验证本文所设计方法, 接下来针对一个实际例子进行仿真, 以此验证设计方法的实用

性. 考虑一个线性化的 F-404 飞行器引擎模型, 其中矩阵 $A$ 为

$$A(t)=\begin{bmatrix}-1.46 & 0 & 2.428\\ 0.1643+0.5\beta(t) & -0.4+\beta(t) & -0.3788\\ 0.3107 & 0 & -2.23\end{bmatrix}$$

$\beta(t)$ 是一个不确定的模型参数. 假设 $\beta(t)$ 满足一个 $N=2$ 的 Markov 过程:

$$\beta(t)=\begin{cases}-1, & r(t)=1\\ -2, & r(t)=2\end{cases}$$

其他矩阵设置如下:

$$B_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0.3\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}-1\\0.2\\-2\end{bmatrix}, D_1=\begin{bmatrix}0\\-0.1\\0\end{bmatrix}$$

$$D_2=\begin{bmatrix}-0.1\\0\\-0.3\end{bmatrix}, C_1=C_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$G_1=G_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$A_{d1}=\begin{bmatrix}0.1&0&0.1\\0.1&0&0\\0&0.1&0.2\end{bmatrix}$$

$$A_{d2}=\begin{bmatrix}0.1&0&0.05\\0.03&0&0\\0&0.05&0.1\end{bmatrix}$$

$$M_1=M_2=\begin{bmatrix}0.1\\0\\0.3\end{bmatrix}, F_1(t)=F_2(t)=\sin(t)$$

$$N_1=N_2=\begin{bmatrix}0.1&0.3&0.1\end{bmatrix}$$

估计的转移概率矩阵为 $\hat{\Pi}=\begin{bmatrix}-3&3\\4&-4\end{bmatrix}$, 其他参数选取如同实例 1.

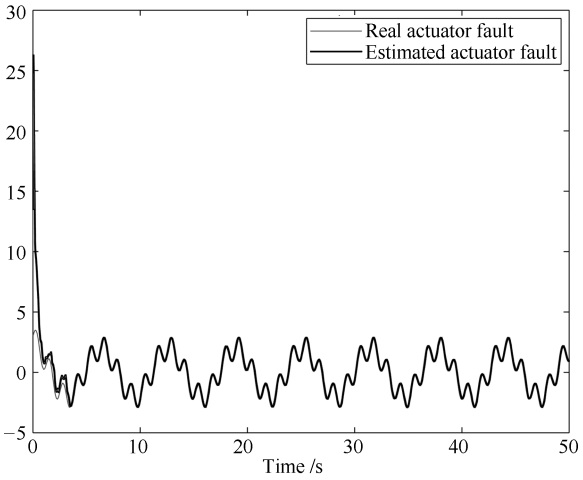


图 4　执行器故障估计曲线

Fig. 4　The curve of the estimation of actuator fault

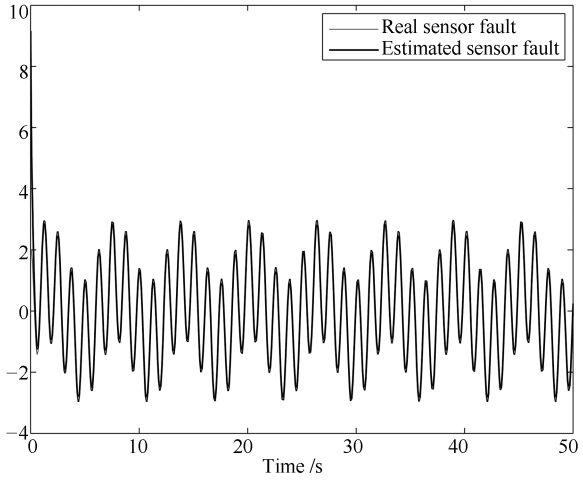


图 5　传感器故障估计曲线

Fig. 5　The curve of the estimation of sensor fault

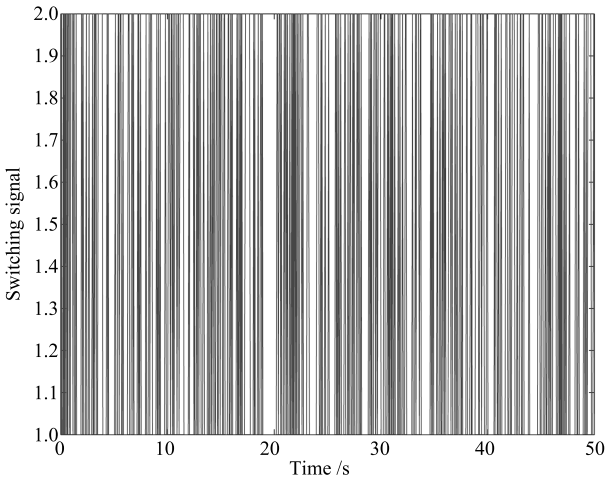


图 6　切换信号

Fig. 6　Switching signal

从参数中不难发现系统满足 $\mathrm{rank}(D_1)\neq$

$\mathrm{rank}(C_1D_1) = 0$, 这与基于滑模观测器利用等价输出注入信号重构故障方法[30] 的匹配条件是矛盾的. 因此, 传统的基于滑模观测器的方法不能用于该系统. 此外, 由于本文所讨论的系统是随机系统, 因此系统的输出也是随机的, 这就意味着基于代数重构的故障估计方法[31] 也是不可行的, 因为该方法中涉及到输出的微分信息. 相比于文献 [16] 中的设计方法要求传感器故障是有界的且上界已知, 以及其一阶微分也是有界的且上界已知[20], 本文的设计方法中对这两种故障仅作了如下要求 $\dot{\boldsymbol{f}}_a \in L_2[0\ \infty)$, 这就使得本文的设计方法在实际应用中具有更广泛的应用范围.

为了验证本文所设计方法的优越性, 选取执行器故障和传感器故障分别为 $f_a = 0.3\sin(t) + 0.5\cos(3t)$ 和 $f_s = \sin(2t)$.

在仿真中分别设置初始状态 $\boldsymbol{x}_0 = [\ 1\quad 1\quad 1\ ]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{z}_0 = [\ 1\quad 2\quad 0.3\quad 0\ ]^{\mathrm{T}}$, $r_0 = 1$ 和 $\boldsymbol{\phi}(t) = [\ 1\quad 0\quad 0\ ]^{\mathrm{T}}$, $t \in [\ -3\quad 0\ ]$. 系统状态估计如图 7 ∼ 9 所示. 图 10 和图 11 分别为执行器和传感器故障估计效果. 图 12 为马尔科夫切换信号. 由图 7 ∼ 11 可以看出本文方法对状态、执行器和传感器故障有很好的估计效果, 仿真结果也证明了正如注 5 所示, 该方法相较于文献 [16, 20] 具有优越性.

## 4 结论

本文针对具有参数不确定和延迟环节的马尔科夫跳变系统, 在状态转移概率矩阵不确定的情形下, 讨论了执行器和传感器故障同时估计的方法. 首先构造一个广义描述系统, 接着针对该系统设计自适应状态观测器使得执行器和传感器故障可以同时估计出. 该方法的充分条件由线性矩阵不等式给出. 仿真分析证明了该方法的可行性.

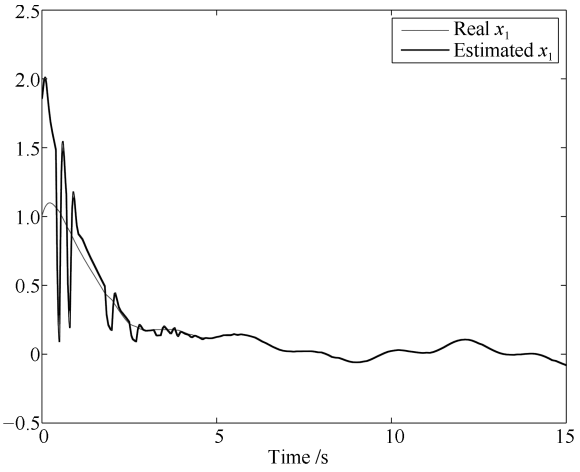


图 7 F-404 模型状态 $x_1$ 的估计曲线

Fig. 7 The curve of the estimation of $x_1$ of Model F-404

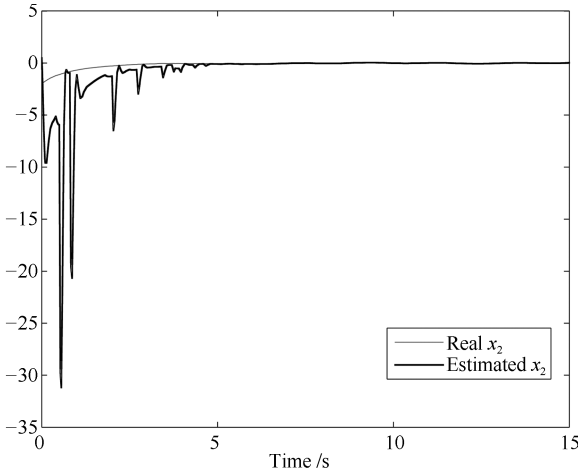


图 8 F-404 模型状态 $x_2$ 的估计曲线

Fig. 8 The curve of the estimation of $x_2$ of Model F-404

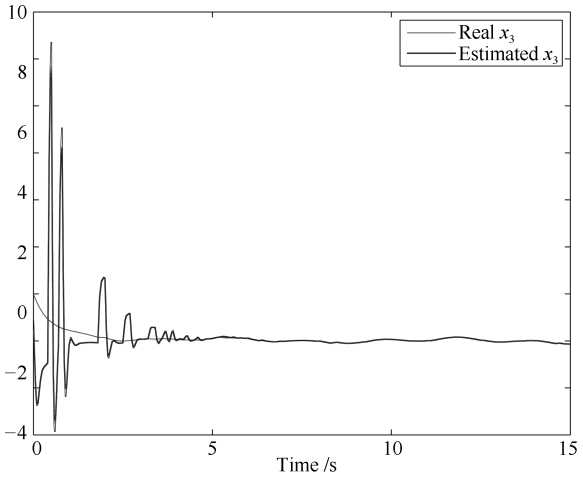


图 9 F-404 模型状态 $x_3$ 的估计曲线

Fig. 9 The curve of the estimation of $x_3$ of Model F-404

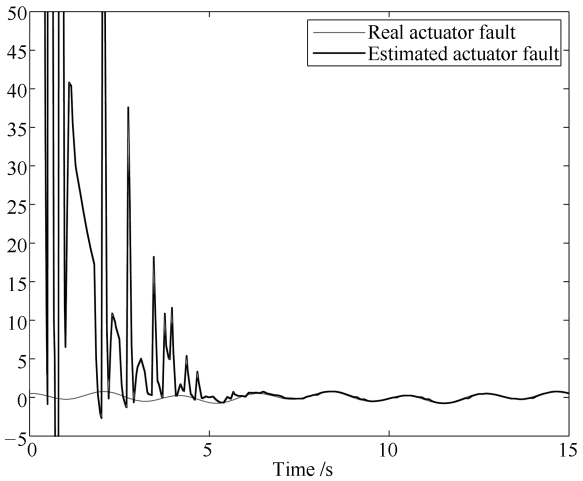


图 10 F-404 模型执行器故障估计曲线

Fig. 10 The curve of the estimation of actuator fault of Model F-404

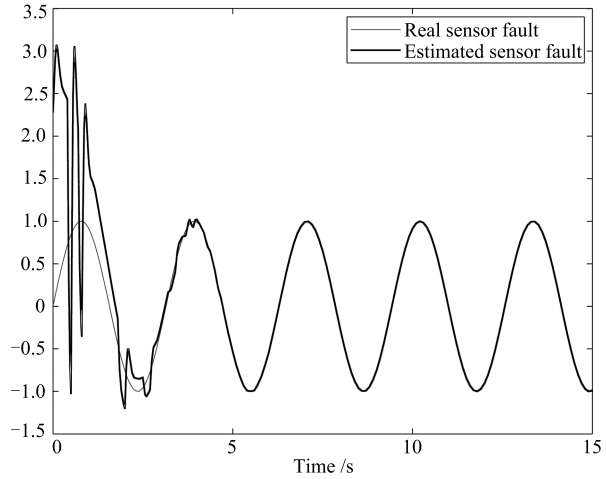


图 11　F-404 模型传感器故障估计曲线

Fig. 11　The curve of the estimation of sensor fault of Model F-404

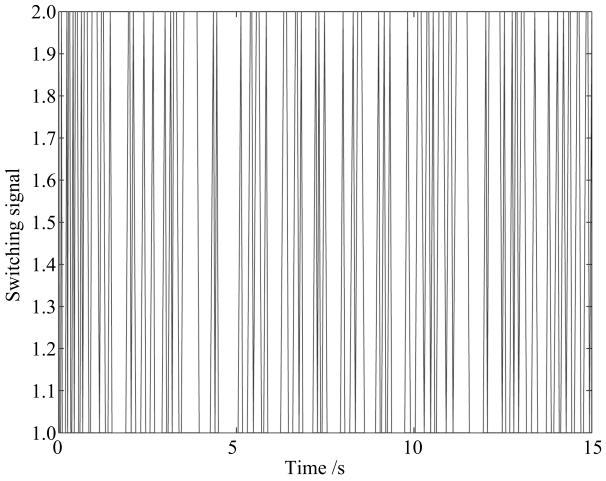


图 12　切换信号

Fig. 12　Switching signal

## References


1 Mahmoud M S, Shi P. Robust Kalman filtering for continuous time-lag systems with Markovian jump parameters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, **50**(1): 98−105

2 Park B Y, Kwon N K, Park P G. Stabilization of Markovian jump systems with incomplete knowledge of transition probabilities and input quantization. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, **352**(10): 4354−4365

3 Liu M, Ho D W C, Shi P. Adaptive fault-tolerant compensation control for Markovian jump systems with mismatched external disturbance. *Automatica*, 2015, **58**: 5−14

4 Wu L G, Su X J, Shi P. Output feedback control of Markovian jump repeated scalar nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(1): 199−204

5 Zhang Y, He Y, Wu M, Zhang J. Stabilization for Markovian jump systems with partial information on transition probability based on free-connection weighting matrices. *Automatica*, 2011, **47**(1): 79−84

6 Tian En-Gang, Yue Dong, Yang Ji-Quan. $H_\infty$ control for Markovian jump systems with incomplete transition probabilities and probabilistic nonlinearities. *Control Theory & Applications*, 2014, **31**(3): 392−396
(田恩刚, 岳东, 杨继全. 具有随机非线性和部分转移概率未知的马尔科夫系统的 $H_\infty$ 控制. 控制理论与应用, 2014, **31**(3): 392−396)

7 Li F B, Wu L G, Shi P, Lim C C. State estimation and sliding mode control for semi-Markovian jump systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, 2015, **51**: 385−393

8 Du B Z, Lam J, Zou Y, Shu Z. Stability and stabilization for Markovian jump time-delay systems with partially unknown transition rates. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, **60**(2): 341−351

9 Wu L G, Shi P, Gao H J. State estimation and sliding-mode control of Markovian jump singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(5): 1213−1219

10 Zhang Y S, Xu S Y, Chu Y M. Sliding mode observer-controller design for uncertain Markovian jump systems with time delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(4): 355−368

11 Gao Fei, Zhang Hong-Yue. Stability of time-delay fault tolerant control systems with Markovian parameters. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2006, **32**(5): 566−570
(高飞, 张洪钺. 带马尔科夫参数时滞容错控制系统稳定性分析. 北京航空航天大学学报, 2006, **32**(5): 566−570)

12 Li F B, Wu L G, Shi P. Stochastic stability of semi-Markovian jump systems with mode-dependent delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, **24**(18): 3317−3330

13 Kao Y G, Li W, Wang C H. Nonfragile observer-based $H_\infty$ sliding mode control for Itô stochastic systems with Markovian switching. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, **24**(15): 2035−2047

14 Cong S, Zhang H T, Zou Y. A new exponential stability condition for delayed systems with Markovian switching. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 1025−1029

15 Song Yang, Dong Hao, Fei Min-Rui. Mean square exponential stabilization of Markov networked control systems based on switching frequentness. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(5): 876−881
(宋杨, 董豪, 费敏锐. 基于切换频度的马尔科夫网络控制系统均方指数镇定. 自动化学报, 2012, **38**(5): 876−881)

16 Liu M, Shi P, Zhang L X, Zhao X D. Fault-tolerant control for nonlinear Markovian jump systems via proportional and derivative sliding mode observer technique. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2011, **58**(11): 2755−2764

17 Yu J Y, Liu M, Yang W, Shi P, Tong S Y. Robust fault detection for Markovian jump systems with unreliable communication links. *International Journal of Systems Science*, 2013, **44**(11): 2015−2026

18 Shi P, Liu M, Zhang L X. Fault-tolerant sliding-mode-observer synthesis of Markovian jump systems using quantized measurements. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, **62**(9): 5910−5918

19 Chen L H, Huang X L, Fu S S. Fault-tolerant control for Markovian jump delay systems with an adaptive observer approach. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, DOI: 10.1007/s00034-016-0277-8

20 Li H Y, Gao H J, Shi P, Zhao X D. Fault-tolerant control of Markovian jump stochastic systems via the augmented sliding mode observer approach. *Automatica*, 2014, **50**(7): 1825−1834

21 Wang Guo-Liang, Sun Guang-Jin, Bo Hai-Ying. Partially mode-dependent observer design of singular Markovian jump systems. *Control Theory & Applications*, 2015, **30**(4): 733−738
(王国良, 孙广兢, 薄海英. 广义马尔科夫跳变系统的部分模态依赖观测器设计. 控制与决策, 2015, **30**(4): 733−738)

22 Shen H, Xu S Y, Zhou J P, Lu J J. Fuzzy $H_\infty$ filtering for nonlinear Markovian jump neutral systems. *International Journal of Systems Science*, 2011, **42**(5): 767−780

23 Zhang X M, Lu G P, Zheng Y F. Observer design for descriptor Markovian jumping systems with nonlinear perturbations. *Circuits, Systems & Signal Processing*, 2008, **27**(1): 95−112

24 He S P, Liu F. Adaptive observer-based fault estimation for stochastic Markovian jumping systems. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, **2012**: Article ID 176419

25 Liu M, Cao X B, Shi P. Fuzzy-model-based fault-tolerant design for nonlinear stochastic systems against simultaneous sensor and actuator faults. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, **21**(5): 789−799

26 Kchaou M, El Hajjaji A, Toumi A. Non-fragile $H_\infty$ output feedback control design for continuous-time fuzzy systems. *ISA Transactions*, 2015, **54**: 3−14

27 Yu L, Chu J. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. *Automatica*, 1999, **35**(6): 1155−1159

28 Boukas E K. *Stochastic Switching Systems: Analysis and Design*. Berlin: Birkhäuser, 2005.

29 Jiang B, Staroswiecki M, Cocquempot V. Fault accommodation for nonlinear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(9): 1578−1583

30 Yan X G, Edwards C. Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding mode observer. *Automatica*, 2007, **43**(9): 1605−1614

31 Yang Jun-Qi, Zhu Fang-Lai. FDI based on high-gain robust sliding mode observers. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(12): 2005−2013
(杨俊起, 朱芳来. 基于高增益鲁棒滑模观测器的故障检测和隔离. 自动化学报, **38**(12): 2005−2013)

**李晓航** 同济大学电子与信息工程学院控制理论与控制工程专业博士研究生. 2011 年获得上海理工大学工学学士学位. 主要研究方向为未知输入观测器设计, 故障检测与重构以及容错控制器设计. E-mail: lixiaohang58@163.com
(**LI Xiao-Hang** Ph. D. candidate at the College of Electronics and Information Engineering, Tongji University. She received her bachelor degree from University of Shanghai for Science and Technology in 2011. Her research interest covers unknown input observer design, fault detection and reconstruction, and fault-tolerant control.)

**朱芳来** 同济大学电子与信息工程学院教授. 主要研究方向为非线性系统鲁棒控制, 观测器设计, 基于模型的故障检测与隔离. 本文通信作者.
E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn
(**ZHU Fang-Lai** Professor at the College of Electronics and Information Engineering, Tongji University. His research interest covers nonlinear robust control, observer design, and model-based fault detection and isolation. Corresponding author of this paper.)