熔丝沉积制造中稳固低耗支撑结构生成

魏潇然 [1] 耿国华 [1] 张雨禾 [1]

摘 要 熔丝沉积制造 (Fused deposition modeling, FDM) 是利用熔融塑料丝的一种 3D 打印技术, 热塑料由喷嘴喷出逐层堆积完成打印. 由于熔丝只能沉积在已存在物体的上层, 因此需要构造支撑结构以支撑悬空部分. 针对现有支撑结构生成算法中存在的或结构不稳固或耗材多的缺陷, 提出一种以熔丝为支撑单位的树形稀疏支撑结构. 与传统算法计算模型表面支撑区域不同, 本算法计算每段熔丝需要支撑的区域, 使支撑结构更契合熔丝沉积特点. 算法还将支撑结构分为三类, 将多约束优化问题分解, 降低算法复杂度. 实验结果表明, 本文算法生成的支撑结构算法耗材少、支撑稳定.

关键词 快速成型, 3D 打印, 支撑结构, 熔丝沉积制造

引用格式 魏潇然, 耿国华, 张雨禾. 熔丝沉积制造中稳固低耗支撑结构生成. 自动化学报, 2016, **42**(1): 98−106

DOI 10.16383/j.aas.2016.c150231

Steady and Low Consuming Supporting for Fused Deposition Modeling

WEI Xiao-Ran[1] GENG Guo-Hua[1] ZHANG Yu-He[1]

Abstract Fused deposition modeling (FDM) is the process of 3D printing objects from melted plastic filament. The hot plastic exits from the nozzle and fuses with the part just below, adding a layer of material to the object being formed. Since the filament can only be deposited on top of an existing surface, overhangs require a disposable support structure to be printed. In order to improve the stability of the support structure and reduce its consumption, a sparse tree support structure generation algorithm is presented. Different from the tradition algorithm, the region needs to be supported for each filament is calculated and the support structure fits the FDM better. The support structure is divided into three categories, and the multi-objective programming problem is decomposed. Experimental results show that supports generated by this algorithm consume less time and materials and are more stable.

Key words Rapid prototyping, 3D printing, supports, fused deposition modeling

Citation Wei Xiao-Ran, Geng Guo-Hua, Zhang Yu-He. Steady and low consuming supporting for fused deposition modeling. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(1): 98−106

熔丝沉积制造 (Fused deposition modeling, FDM) 技术是 3D 打印中的一项常用制造技术. FDM 技术将打印材料加热并在喷头正下方熔化喷出, 喷头在打印过程中不断移动并在其下方形成熔丝段, 熔丝段凝固后模型成型.

该技术的一个主要缺点是熔丝必须沉积在现有支撑面上. 因此若模型表面存在悬空部分, 则必须为其设计支撑结构, 否则这些表面熔丝会坍塌变形.

关于 3D 打印支撑结构的设计问题, 当前已有大量研究工作. 最初的支撑结构算法主要针对支撑区域的计算问题, Allen 等[1] 利用三角网格与托盘的角度来确定需要支撑的区域, Snead 等[2] 采用布尔运算计算上下层间的打印切面以决定上层表面的支撑区域, 之后为这些区域构造完整支撑结构. 随后的研究者对支撑结构进行了优化, 设计不完全填充的支撑结构[3], Huang 等[4] 将柱体支撑结构改良为椎体, 减小了支撑结构的体积; Heide[5] 通过减少支撑结构下层的体积和复杂性进一步减少了支撑结构体积; 陈之佳等[6] 利用扫描线比较方法计算支撑结构, 简化了支撑结构计算的复杂性. 也有学者通过对支撑结构进行受力分析, 进一步优化支撑结构, Wang 等[7] 将建筑学中的绞架结构引入支撑结构设计中, 从力学的角度分析, 设计了一种抗压性强的稳固支撑结构; Dumas 等[8] 在计算稀疏支撑点的基础上, 在支撑点垂直于打印托盘的支撑间进行桥接, 设计支撑结构. 许多公司也开发了生成支撑结构的软件; Autodesk 公司的 meshmixer 软件选取离散支撑点来设计支撑结构并利用树型结构将这些支撑点连接起来, 该软件生成的支撑结构在可靠性方面仍有待提高. Makerbot 公司的 makerware 软件利用大量纵横交错支架生成支撑结构, 其支撑效果虽好, 但是存在大量的冗余支撑. Kritchman 等[9] 从支撑

收稿日期 2015-04-20 录用日期 2015-09-23
Manuscript received April 20, 2015; accepted September 23, 2015
国家自然科学基金 (61373117) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61373117)
本文责任编委 沈轶
Recommended by Associate Editor SHEN Yi
1. 西北大学信息科学与技术学院 西安 710127
1. School of Information Science and Technology, Northwest University, Xi′an 710127

材料考虑, 用可溶解材料打印支撑结构, 使其支撑结构更易分离. 除了外部支撑结构外. 也有学者对模型内部支撑结构进行研究, 以提高模型的稳固性和抗压能力[10−13].

支撑结构的构造算法可以分为两类, 一类在支撑面下方生成完全支撑结构进行支撑, 此类算法稳定性高, 但耗材较大; 另一类选择支撑面下方的稀疏点生成支撑结构, 此类算法耗材小, 但稳定性较差, 可能需要人工交互[8].

本文提出一种稳固的树形支撑结构自动生成算法, 在保证模型成型的基础上, 有效的节约了打印耗材. 本文的主要贡献有以下三点: 1) 根据打印过程中的喷头扫描路径, 以扫描熔丝段为单位, 计算对应的需支撑区域和支撑结构, 算法对未支撑区域的计算和生成的支撑结构更符合 FDM 熔丝打印特点, 成型效果好, 并且能有效减少支撑结构耗材; 2) 针对支撑结构中不同部分的特征, 将支撑结构分为三类, 分别设计支撑结构体积最优化生成算法, 降低了关于支撑结构的多约束优化问题的复杂度; 3) 构造树形支撑结构将三类支撑结构结合, 进一步减少了支撑结构的打印耗材.

1　支撑结构分析

1.1　模型分解

根据 FDM 打印原理将模型分解. 首先按每层打印厚度, 沿垂直托盘方向将模型横切, 横切得到的切面记为 p_i, 模型横切 n 次, 生成切片集 $M\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$. 然后在每个切平面上, 喷头按扫描路径移动并喷出熔丝形成切片, 扫描路径中喷头拐点为 $V\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$, 则每两拐点间的熔丝记为 $l_j\{v_j, v_{j+1}\}$, 如图 1 所示. 由此, 切片 p_i 可表示为熔丝形式 $p_i\{l_0, l_1, \cdots, l_{j-1}\}$. 将模型分解为熔丝后, 若每条熔丝均存在支撑, 则模型整体也存在支撑.

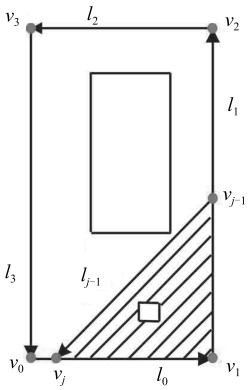


图 1　切面扫描路径

Fig. 1　Scan path of a section

1.2　模型成型因素分析

设计保证成型的支撑结构时, 需要对影响模型成型的因素进行分析, 并根据这些影响因素确定构造支撑结构的约束条件.

1) 支撑间隔约束

两个支撑点可以支撑一段熔丝, 若两个支撑点间支撑熔丝长度过长, 熔丝可能发生形变, 如图 2 (a) 所示, 第一组支撑点间熔丝无形变, 由前往后, 随着支撑点间距离的增加, 形变也随之变大, 且最后两组出现支撑点间熔丝坍塌现象. 定义支撑熔丝无形变打印的支撑点间的最大距离为最大支撑间隔 η.

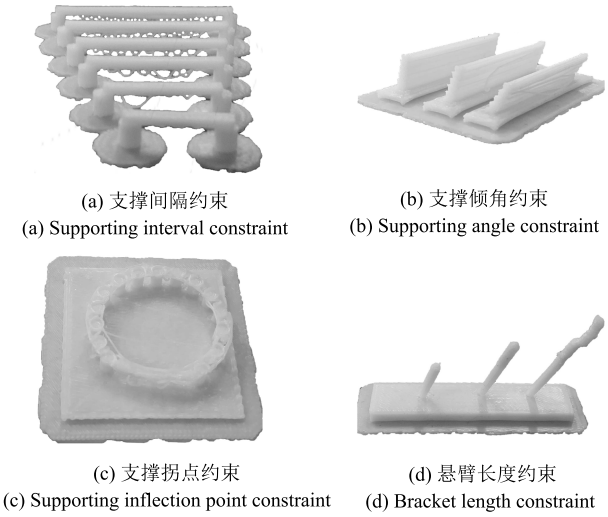


图 2　FDM 打印成型约束条件

Fig. 2　FDM printing molding constraints

约束 1. 熔丝支撑点间最大支撑间隔

若 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ 依次为一熔丝的所有支撑点

$$dis(v_j, v_{j+1}) < \eta, \quad 0 \le j \le n-1 \tag{1}$$

2) 支撑倾角约束

下层熔丝支撑上层熔丝时, 并不需要将横截面完全支撑, 允许上层单丝横截方向部分悬空, 打印时表现为上下层熔丝可以有一定幅度的倾角. 如图 2 (b) 所示, 三组连续熔丝的打印倾角分别为 80°, 70° 和 60°, 倾角为 80° 时各层熔丝无坍塌现象, 倾角为 70° 和 60° 时, 均存在熔丝坍塌现象, 并且随着角度的减小, 坍塌现象加剧.

定义下层熔丝支撑上层熔丝无形变打印的最小倾角, 定义为最小打印倾角 α.

约束 2. 最小打印倾角

如图 3 所示, 将两平行且上下层相接的单丝横截面中心连接, 其与托盘夹角必须大于 α.

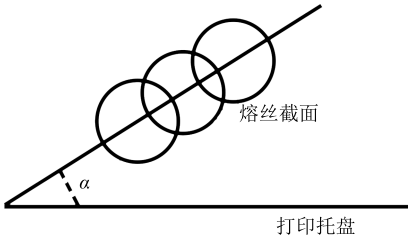


图 3 熔丝与托盘倾角

Fig. 3 The dip angle of fuse and printing platform

3) 支撑拐点约束

若熔丝不是直线段, 还需考虑熔丝曲线拐点处的支撑, 当上层待支撑结构外围轮廓存在拐点时, 在拐点处需要添加支撑结构, 否则拐点处会出现形变现象. 如图 2 (c) 所示, 圆环各点存在支撑点时, 圆环可以成型, 若圆环上一段无支撑点则该段打印时会发生形变. 定义曲线各点曲率小于 κ 时, 曲线无支撑点打印不会形变.

约束 3. 熔丝拐点打印条件

设熔丝为曲线 $y = S(x)$, 若 $S''(x = a) > \kappa$, 则曲线在 $x = a$ 点处需要支撑.

4) 树形支撑结构悬臂长度约束

若模型存在较细悬臂, 悬臂可能会因为承受其自身重量而弯曲, 若形变超出一定程度会导致该悬臂弯曲无法支撑上层. 如图 2 (d) 所示, 三组悬臂与平台夹角一致, 当悬臂增长时, 其末端成型效果会逐渐变差.

悬臂弯曲程度跟材质的弹性模量 EI 相关, 设打印材质的弹性模量 EI, 悬臂受力点距离悬臂两端的距离为 a 和 b, 受力为重力 F, 函数 $f(EI, a, b, F)$ 表示物体的挠度, 挠度是悬臂弯曲变形时横截面形心沿与轴线垂直方向的线位移. 定义挠度小于 W 时, 悬臂形变在可接受范围.

$$f(EI, a, b, F) = \frac{Fb}{9EIl}\sqrt{\frac{(a^2 + 2ab)^2}{3}} < W \quad (2)$$

对于树形支撑结构中的存在长悬臂, 设悬臂倾角为约束 2 中的最小倾角 α. 结合约束和式 (2) 计算最小倾角下悬臂的最长长度 h. 树形支撑结构中叶子节点到根节点的距离应小于 h.

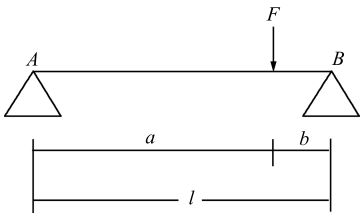


图 4 悬臂受力分析

Fig. 4 Bracket stress analysis

约束 4. 树形支撑结构悬臂最大长度

$$g(EI, \alpha, W) < h \quad (3)$$

2 支撑结构生成算法

2.1 算法概述

算法首先将模型 M 切片为 $M\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$, 根据相邻层切面非相交区域, 求出各层的未支撑区域 b_i. 然后计算能够支撑模型各层的最小支撑结构, 同时要求支撑点集 V_i (V_i 是第 i 层支撑结构 s_i 和上一层的打印切面 b_{i+1} 的交点集合) 和上层切面间满足上述四个约束, 最终得到符合约束的体积最小支撑结构集合 S, 算法输入输出如式 (4) 所示.

输入. $M(p_0, \cdots, p_n)$

$$\begin{aligned} & b_i = p_i - p_{i-1} \\ & \min \sum_{i=0}^{n-1} Volumn(s_i) \\ & V_i = s_i \cap (b_{i+1} \cup s_{n+1}) \quad \text{s.t. 约束 } 1 \sim 4 \end{aligned} \quad (4)$$

输出. $S(s_0, \cdots, s_{n-1})$

分析模型支撑结构可知, 并非每一处支撑结构均需要满足上述四个约束, 例如图 5 所示模型中, 区域一下方的支撑结构构造时不需要考虑约束 4, 而区域二中支撑结构构造不需要考虑约束 1 和约束 3. 故可以将支撑结构分类构造, 将式 (3) 中的多约束优化问题化简, 以达到求解目的.

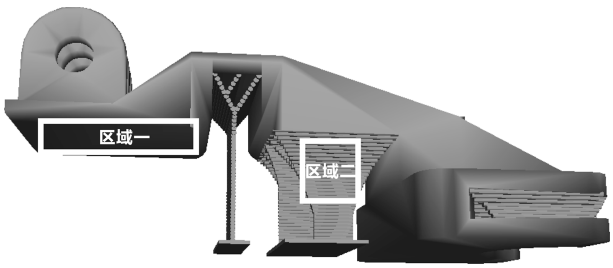


图 5 模型不同区域支撑结构

Fig. 5 The supporting structure at different regions of a model

因此, 根据支撑结构的特点可以将其分为三类:

第一类为熔丝拐点支撑结构, 如图 6 中白色框 1 所示支撑结构, 这类支撑结构位置恒定, 必须添加. 若缺少这类支撑点, 扫描熔丝在拐点位置会因缺少着力点而发生形变. 这类支撑结构使模型支撑满足约束 3.

第二类为模型悬空表面支撑结构, 如图 6 中白色框 2 所示支撑结构, 该类支撑结构支撑模型切面中没有下层支撑的熔丝, 这类支撑结构位置不固定, 使模型支撑满足约束 1.

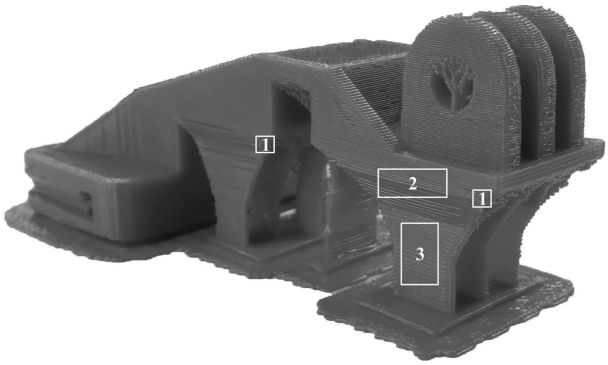


图 6　带支撑结构模型

Fig. 6　The printing model with supporting

第三类支撑结构支撑第一类和第二类支撑结构, 并最终落脚于托盘或模型表面. 如图 6 中白色框 3 所示支撑结构, 该类支撑结构由第一类和第二类支撑结构计算得到.

树形结构能很好地节约打印耗材, 根据约束 2 中的最小倾角, 将支撑熔丝以最小倾角向下生长, 熔丝向下生长后会互相靠近结合, 结合后熔丝继续向下生长并与其他单丝继续结合最终构成一棵树. 图 6 所示为采用本文算法生成支撑结构后的模型打印效果, 第一类和第二类支撑结构稀疏地附着在模型需支撑区域, 第三类支撑结构为树形支撑结构, 不断结合向下生长直至落脚于托盘或模型表面.

2.2　算法实现

2.2.1　计算模型表面未支撑区域

在生成打印支撑结构时, 首先需要计算模型表面未支撑区域. 本文对各切面未支撑熔丝区域进行计算. 首先计算扫描熔丝拐点是否需要支撑, 然后计算扫描熔丝非拐点处是否需要支撑. 具体步骤如下:

1) 在计算扫描熔丝拐点支撑时, 提取切面扫描熔丝所有拐点, 若拐点在下表面不存在支撑点, 将该拐点记录至点集 S_1.

2) 在计算非拐点熔丝支撑时, 取当前切面与下层切面熔丝集. 计算切面熔丝与下层熔丝的所有交点. 将这些交点与切面熔丝拐点集按照切面熔丝扫描顺序进行排序 $I\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$, n 为交点数与拐点数之和.

3) 计算 I 中所有相邻点的间距 $dist(v_i, v_{i+1})$, 若 $dist(v_i, v_{i+1}) > \eta$ (η 为约束 1 中的最大支撑间隔), 则该段熔丝需要支撑, 同时将这段熔丝 $l\{v_i, v_{i+1}\}$ 记录至熔丝集 S_2.

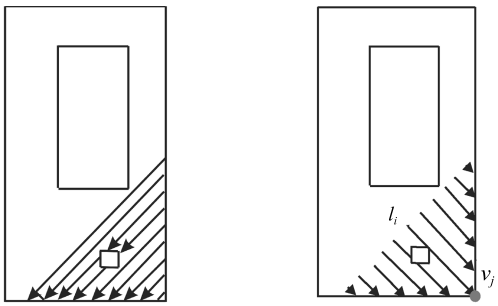
4) 最终获得该层所有需要支撑的熔丝集 $S_2\{l_0, \cdots, l_{m-1}\}$, m 为待支撑熔丝数.

2.2.2　第一类和第二类支撑结构计算

第一类支撑结构为扫描线的未支撑拐点, 即上节中的点集 S_1, 其支撑结构为点形式. 由于点在 FDM 制作过程中的成型可靠性较差, 因此需要将第一类支撑结构与第二类支撑结构进行连接, 形成熔丝线段.

分析计算第二类支撑结构, 根据扫描路径生成原理, 扫描线通常为大量的平行熔丝段, 因此待支撑的熔丝集 S_2 中也包含大量平行熔丝. 将平行熔丝划分为一簇, S_2 被划分为若干簇, 然后分别对各簇求解支撑结构. 其步骤如下:

1) 取一簇熔丝集, 该簇单丝方向为 $\vec{a}$, 以垂直于 $\vec{a}$ 方向的单丝做该簇的下层完全支撑面 $S_c\{l_0, \cdots, l_{m-1}\}$, 如图 7 (a) 所示, 右下方三角区域为一簇待支撑熔丝, 图 7 (b) 右下三角区域为其完全支撑面 S_c.



(a) 打印扫描线方向
(a) Direction of print scan line direction

(b) 支撑熔丝方向
(b) Direction of fuse support

图 7　第二类支撑结构中熔丝方向

Fig. 7　The direction of the fuse in the second kind of supporting structure

2) 将第一类支撑结构连接到相邻的第二类支撑熔丝上, 更新支撑面集 S_c, 如图 7 (b) 中外轮廓线右下角拐点 v_j 与第二类支撑熔丝 l_i 连接.

3) 在不影响支撑的情况下去掉部分熔丝, 将支撑面 $S_c\{l_0, \cdots, l_{m-1}\}$ 稀疏化. 方法如下:

设 $W(w_0, \cdots, w_{m-1})$ 为 S_c 中各熔丝的权重向量, w_i 对应熔丝 l_i 的打印耗材, 即熔丝长度乘以熔丝横截面积, $\boldsymbol{A}(a_0, \cdots, a_{m-1})$ 为支撑面 S_c 的稀疏表示方法, $\boldsymbol{A}$ 为 m 维向量, 每行 a_i 对应 S_c 中 l_i 熔丝, a_i 若为 1 表示保留 S_c 中第 l_i 熔丝, a_i 若为 0 表示去掉 S_c 中 l_i 熔丝.

设熔丝横截半径为 r, 则 l_i 与 l_{i+k} 间距为 $k \times r$, 可以将约束 1 转化为式 (5), 熔丝段在 $k \times r$ 长度范围内必须存在两个支撑点.

$$\sum_{i=j}^{i=j+\left\lceil \frac{\eta}{r} \right\rceil} a_i > 1, \quad 0 \le j \le m - \left\lceil \frac{\eta}{r} \right\rceil - 1 \tag{5}$$

第一类支撑结构是固定且必须存在的, 故连接了第一类熔丝的第二类熔丝也是必须存在的, 因此求解支撑熔丝时还需要添加约束式 (6), 其中 a_{x0},

$\cdots$, a_{xj} 对应 $l_{x0}, \cdots, l_{xj}$ 为 S_c 中所有含有一类支撑点的熔丝.

$$a_{x0} = 1,\ \cdots,\ a_{xj} = 1 \tag{6}$$

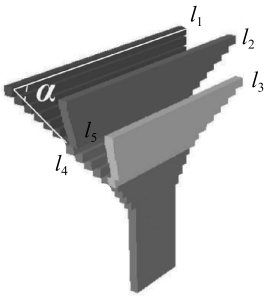
根据式 (7) 求得 S_c 的稀疏解 A.

$$\begin{aligned} &\min\ V = W^{\mathrm{T}}A \\ &\text{s.t.}\quad \sum_{i=j}^{i=j+\left\lceil \frac{\eta}{r} \right\rceil} a_i > 1 \\ &\qquad 0 \le j \le m - \left\lceil \frac{\eta}{r} \right\rceil - 1 \\ &\qquad a_{x0} = 1,\ \cdots,\ a_{xj} = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

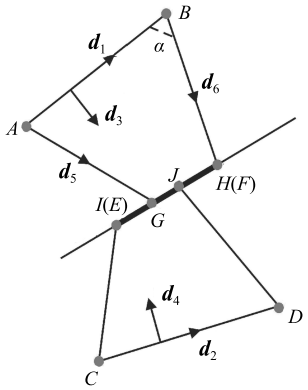
计算所有熔丝簇的解, 获取第一类和第二类支撑结构.

2.2.3 第三类支撑结构计算

将位置较近的熔丝以树状形式连接, 并将熔丝树向下生长直至落脚至可接触表面上, 形成第三类支撑结构, 如图 8 (a) 所示. 第三类支撑结构生成时需要考虑支撑树的稳固性和总体支撑代价.



(a) 多条熔丝组成树形结构
(a) Fuse component trees tructure



(b) 两条熔丝连接示意图
(b) Schematic diagram of two fuse link

图 8 两熔丝间连接代价分析
Fig. 8 Analysis of two fuse link cost

2.2.4 任意两条熔丝连接的体积代价

图 8 (a) 所示为熔丝 l_1、l_2 和 l_3 组成的一棵支撑树, 需要对 l_1 和 l_2 连接代价进行分析, 连接代价定义为 l_1、l_2 与 l_4 之间所有熔丝体积之和. 图 8 (b) 所示为 l_1 和 l_2 连接示意图, 其中 AB 为 l_1, CD 为 l_2, EF 为 l_4.

任意一段熔丝可以表示为 $r(t) = o + t\boldsymbol{d}$ $(0 < t < a)$, 其中 o 和 $o + a\boldsymbol{d}$ 为熔丝的两端点, $\boldsymbol{d}$ 为熔丝的方向向量, a 为常量, $\|a\boldsymbol{d}\|^2$ 为熔丝的长度.

设熔丝 AB 和 CD 为

$$r(t)_{AB} = o_1 + t\boldsymbol{d}_1, \quad 0 < t < a_1 \tag{8}$$

$$r(t)_{CD} = o_2 + t\boldsymbol{d}_2, \quad 0 < t < a_2 \tag{9}$$

持续在 AB 和 CD 下方添加支撑单丝, 直至下方支撑相交, 如图 8 (a) 和图 8 (b) 所示, 将 AB 和其支撑单丝看作一个平面 $ABGH$, CD 和其支撑单丝看作一个平面 $CDIJ$, 两平面相交线为 EF.

设支撑单丝生长方向分别为 $\boldsymbol{d}_3$ 和 $\boldsymbol{d}_4$. 则两平面 $ABGH$ 和 $CDIJ$ 可表示为

$$\begin{aligned} (x, y, z)(\boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_3)^{\mathrm{T}} = 0 \\ (x, y, z)(\boldsymbol{d}_2 \times \boldsymbol{d}_4)^{\mathrm{T}} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

两平面相交直线 EF 向量为 $(\boldsymbol{d}_2 \times \boldsymbol{d}_4)(\boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_3)^{\mathrm{T}}$, EF 可表示为

$$r(t)_{EF} = o_3 + t(\boldsymbol{d}_2 \times \boldsymbol{d}_4)(\boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_3)^{\mathrm{T}}, \quad 0 < t < a_3 \tag{11}$$

根据 AB 和 CD 方向向量, 和约束 2 中的打印最大倾角 α 以及平面法向可以求得, 单丝向下生长的边界直线 AG 和 BH 的方向向量 $\boldsymbol{d}_5$ 和 $\boldsymbol{d}_6$. 则 AG 和 BH 为

$$r(t)_{AG} = o_1 + t\boldsymbol{d}_5, \quad 0 < t < a_5 \tag{12}$$

$$r(t)_{BH} = o_1 + a\boldsymbol{d}_1 + t\boldsymbol{d}_6, \quad 0 < t < a_6 \tag{13}$$

联立式 (11) 和式 (12) 可得 AG 与 EF 的交点 G, 联立式 (11) 和式 (13) 可得 BH 与 EF 的交点 H. 同理可得交点 I 与 J. 取 $\{G, H, I, J\}$ 的凸包, 凸包点两侧点分别定义为 E 和 F. EF 为熔丝 AB 和 CD 连接后形成的新熔丝.

两个四边形 $ABEF$ 和 $CDEF$ 面积之和乘以熔丝横截面积即为熔丝 l_1 和 l_2 连接体积代价, 记为 $E(l_1\, l_2)$.

2.2.5 构造熔丝的树结构

在构造熔丝的树型结构时, 需要对每条支撑熔丝的落脚区域进行计算, 落脚区域为熔丝沿最大倾角向下生长到达的模型表面或托盘区域, 如图 9 所示, 熔丝沿其最大倾角向下投影, 其落在模型或托盘

上投影间的距离即为其落脚区域, 计算所有熔丝的落脚区域 $R\{r_0,\cdots,r_n\}$. 若多条熔丝落脚区域存在交集, 说明这些熔丝可以构造一棵树并在该落脚区域落脚.

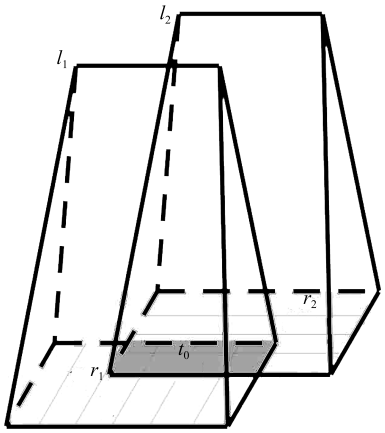


图 9　两熔丝投影区域分析

Fig. 9　Analysis of two fuse projection area

计算 $R\{r_0,\cdots,r_n\}$ 集合中所有区域间的交集, 每个交集对应一棵支撑树 $t_i\{l_0,\cdots,l_k\}$, 表示熔丝 $l_0,\cdots,l_k$ 落在第 i 个交集中, 其中 $l_0,\cdots,l_k$ 为支撑树 t_i 的叶子节点. 所有支撑树的集合记为 $T\{t_0,\cdots,t_m\}$.

计算交集 t_i 对应的支撑二叉树, 将 t_i 中所有熔丝作为二叉树的叶子节点; 首先计算叶子节点与熔丝间两两连接的耗费, 每次取连接耗费最小的两个节点进行连接, 生成新熔丝, 该新熔丝作为这两个节点的父节点. 将这两个节点从 t_i 中移除并将父节点加入 t_i 中, 继续选取连接耗费最小的两个节点连接, 最终生成二叉树. 生成二叉树后, 根据约束 4 剪枝, 剪掉与根节点距离超过最大悬臂的枝干. 算法过程见算法 1.

算法 1. 构造熔丝二叉树

输入. t 树的叶子节点集合 $t\{l_0,\cdots,l_i\}$
输出. t 树的二叉树结构
while (t 中不存在 $\{l_0,\cdots,l_i\}$)
1. 计算 t 中节点间两两连接代价 $E_{pq}(l_p,\ l_q)$
2. 选取代价最小的 $\min(E_{pq})$
3. 构造 l_p, l_q 父节点 l_{pq} 将 E_{pq} 记录在 l_{pq} 节点信息内;
4. 去除 t 中的 l_p, l_q, 同时将 l_{pq} 加入 t 中
endwhile
5. 获取 t 的根节点 l_{root}
for ($j=0,\cdots,i$)
　if ($dist(l_j,l_{root})>h$)
　6. 将 l_j 从树中移除
　　while (l_j 父节点无子节点)
　　7. 去除 l_j 父节点, 并将 l_j 父节点赋给 l_j
　　endwhile
　endif
endfor

t_i 树对应的耗费为其所有分支节点记录的耗费信息 E 之和, 定义为 $CT_i=\sum E$.

支撑结构最优解 $T\{t_0,\cdots,t_m\}$ 需满足式 (14), 式 (14) 中 L 为支撑熔丝的全集. 最优解 T 包含所有支撑熔丝, 且 T 中所有树耗费和最小.

$$\min\left(\sum_{i=0}^{m}CT_i\right)\qquad \text{s.t.}\quad \bigcup_{i=0}^{m}t_i=L \tag{14}$$

一熔丝投影可能落在 R 集合中多个区域内, 故在 $T\{t_0,\cdots,t_m\}$ 集合中, 熔丝可能属于多棵树, 但最终生成树时一熔丝只属于一棵树, 故要进行优化分析对树进行剪枝.

用 n 维向量 $\boldsymbol{x}_i(x_{i0},x_{i1},\cdots,x_{in})^{\mathrm{T}}$ 表示 t_i 树的剪枝, $\boldsymbol{x}_i$ 中包含模型的所有熔丝, n 为模型支撑熔丝总数, x_{ij} 为 1 表示熔丝 l_j 在树 t_i 中, x_{ij} 为 0 表示熔丝 l_j 不在树 t_i 中. 根据 $\boldsymbol{x}_i$ 求出 t_i 去掉部分枝干后生成的支撑树 t_i' 及其耗费. t_i' 计算方法为在 t_i 二叉树中, 从叶子节点向上遍历, 若分支节点的子节点均为 0, 则将其置为 0. 去掉 t_i 中值为 0 的节点得到 t_i', 重新计算分支节点的耗费信息 E, 对 E 求和得到 t_i' 的耗费. 算法过程见算法 2.

算法 2. 二叉树 t 剪枝后代价计算

输入. $t_i,\boldsymbol{x}_i(x_{i0},x_{i1},\cdots,x_{in})^{\mathrm{T}}$
输出. 剪枝后 t_i' 树的耗费
1. 根据 x_i 对 t_i 中的叶子节点赋值
2. 从叶子节点逐层向上遍历, 若一节点两孩子节点均为 0, 则将该节点置为 0
3. 构造 t_i', 去除所有为 0 的节点
4. 计算 t_i' 每分支节点的连接耗费
5. 将所有分支节点连接耗费相加, 得到 t_i' 树的耗费

t_i 剪去部分叶子节点后耗费记为 $C(t_i)=T(x_i)$.

模型中所有支撑树森林的集合表示为矩阵 $X(\boldsymbol{x}_0\ \boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)$, 其中 x_{ij} 为 1 或 0 且 $\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{x}_i=(1\ \cdots\ 1)^{\mathrm{T}}$, 表示森林包含所有熔丝, 并且熔丝在森林中仅出现一次.

对式 (15) 求解, 最优解 $X(\boldsymbol{x}_0\ \boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_m)$ 对应最优解森林 $T\{t_0,\cdots,t_m\}$.

式 (15) 是一个精确覆盖优化问题, 是 NP 问题, 故将其转化为式 (16) 的最优解问题, 并将式 (16) 以离散最优化问题方式求解: 将 x_{ii} 看作 [0, 1] 区间内的连续变量, 首先求式 (16) 在 [0, 1] 区间内的最优解 $X\,(\boldsymbol{x'}_0\boldsymbol{x'}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x'}_m)$, 然后对所有 $\boldsymbol{x}_i'$ 计算其每列距 0 或 1 的最小距离的平均值. 最后确定平均距离最小的 $\boldsymbol{x}_i'$ 为 $\boldsymbol{x}_i$ 的最优解, 将其带入式 (16), 迭代计

算, 直至 $\boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 均确定为最优解. 计算 T 中所有支撑树的树形结构, 输出第三类支撑结构.

$$\begin{aligned} &\min\left(\sum_{i=0}^{n} T(\boldsymbol{x}_i)\right) \\ &\text{s.t.} \quad x_{ij}=1|x_{ij}=0, \quad \sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{x}_i=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\min\left(\sum_{i=0}^{n} T(\boldsymbol{x}_i)+\lambda\left(\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}-\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{x}_i\right)\right) \\ &\text{s.t.} \quad x_{ij}=1|x_{ij}=0 \end{aligned} \tag{16}$$

3 实验结果与分析

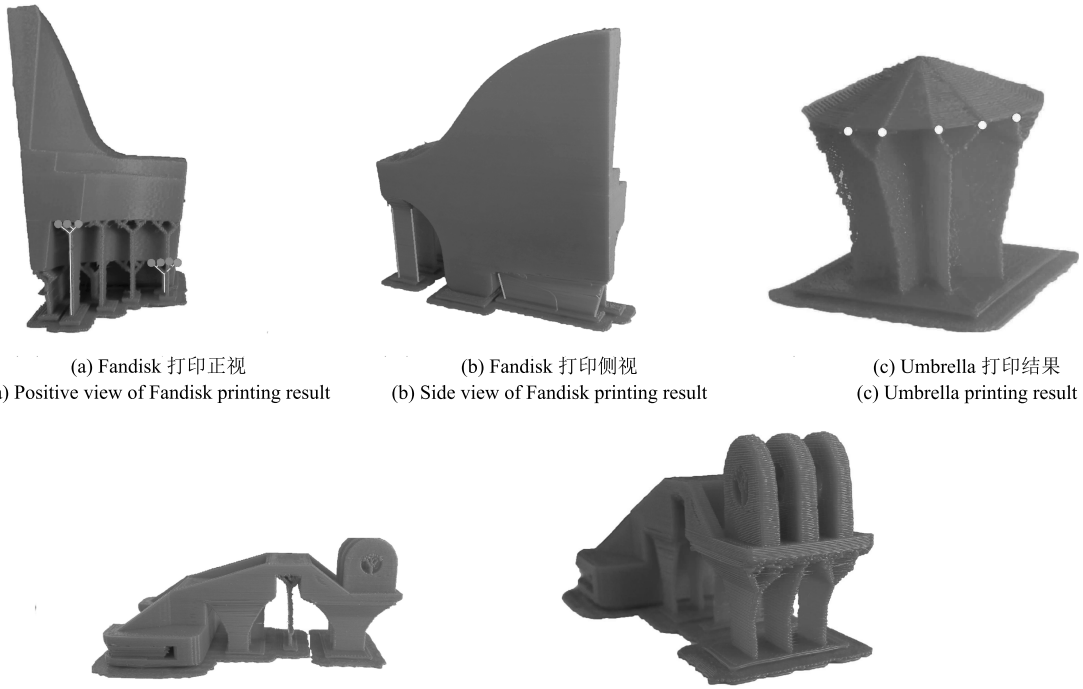
实验采用 Makerbot Replicator2X 打印机, 打印参数设置为层厚 0.3 mm, 喷头扫描速度为 120 mm/s, 喷头空驶速度为 150 mm/s, 打印材料为 ABS 树脂.

图 10 所示为利用本文算法对模型生成支撑后的实际打印结果. 图 10 (a) 中模型所示, 上方三个并列点中, 最右侧点为第一类支撑结构, 其余两点为第二类支撑结构, 下方四个并列点中, 最右侧点为第一类支撑结构, 其余两点为第二类支撑结构, 树形线条为第三类支撑结构, 可见第一类和第二类支撑结构稀疏地附着于未支撑区域的下表面, 第三类结构生成熔丝树对上层结构稳固支撑, 图 10 (b) 模型中, 右侧线条所示支架与平台存在打印倾角, 能有效节约打印耗材; 而左侧线条部分支架与平台不存在打印倾角, 这是由于其宽度已经达到支撑宽度临界, 如果该部分支架过细会影响打印时的稳固性. 在宽度没有达到临界时, 支撑支架存在打印倾角, 到达临界时, 支架无打印倾角, 支架临界宽度限制根据其支撑模型体积决定.

图 10 (c) 所示模型中, 伞模型的支撑白色点均为第一类支撑结构, 每层均只在拐点处作支撑, 拐点处熔丝与伞边缘曲线熔丝成型效果良好.

图 11 和图 12 为模型分别用 Meshmixer 软件和 Makerware 软件生成支撑结构后实际打印结果, Makerware 支撑结构参数为软件自动设置, Meshmixer 支撑结构参数设置时将打印倾角阈值和支撑结构密度均调为最大值, 使得 Meshmixer 算法可靠性增大. Makerware 生成支撑结构打印效果良好, 但是其支撑结构冗余耗材较多; 而 Meshmixer 算法即使在可靠性最大时由于其支撑结构本身稳固性较差, 多次打印均存在失败情况, 整体成型效果不佳, 实验证明, Meshmixer 算法需要大量先验知识以调节参数并需要人工交互建立支撑结构.

三种算法实验结果数据如表 1 所示, 其中 S 为打印模型尺寸, W 为打印模型去支撑后的重量, T_P



(a) Fandisk 打印正视
(a) Positive view of Fandisk printing result

(b) Fandisk 打印侧视
(b) Side view of Fandisk printing result

(c) Umbrella 打印结果
(c) Umbrella printing result

(d) Element 打印正视
(d) Positive view of Element printing result

(e) Element 打印侧视
(e) Side view of Element printing result

图 10 本文算法生成支撑结构打印结果

Fig. 10 Printing results dealt with our algorithm

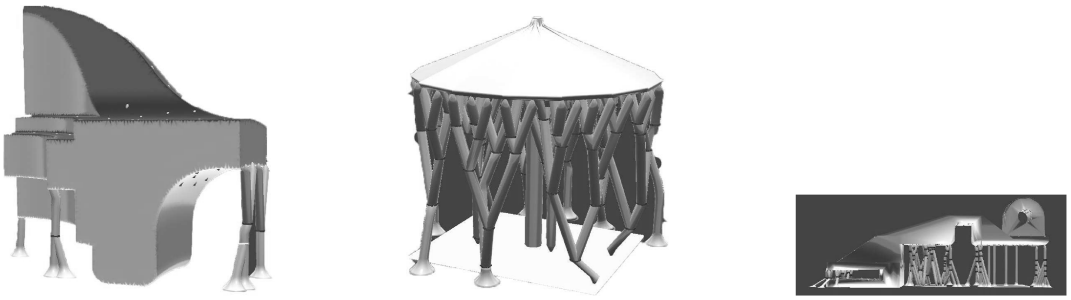
(a) Fandisk 打印结果
(a) Fandisk printing result

(b) Umbrella 打印结果
(b) Umbrella printing result

(c) Element 打印结果
(c) Element printing result

图 11　Makerware 软件生成支撑结构打印结果

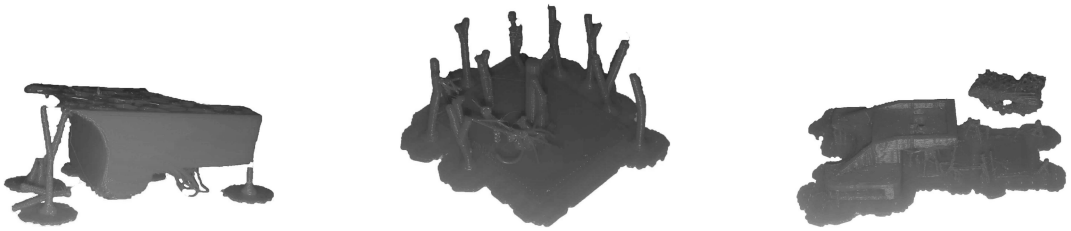
Fig. 11　Printing results dealt with Makerware



(a) 软件生成 Fandisk 支撑
(a) Fandisk supporting generated by Meshmixer

(b) 软件生成 Umbrella 支撑
(b) Umbrella supporting generated by Meshmixer

(c) 软件生成 Element 支撑
(c) Element supporting generated by Meshmixer



(d) Fandisk 打印结果
(d) Fandisk printing result

(e) Umbrella 打印结果
(e) Umbrella printing result

(f) Element 打印结果
(f) Element printing result

图 12　Meshmixer 软件生成支撑结构打印结果

Fig. 12　Printing results dealt with Meshmixer

表 1　Meshmixer、Makerware 及本文算法打印结果数据对比

Table 1　Printing results comparison among Meshmixer, Makerware and our algorithm

模型	S (mm^3)	W (g)	Meshmixer			Makerware			本文算法		
			T_P (s)	W_S (g)	T_A (s)	T_P (s)	W_P (g)	T_A (s)	T_P (s)	W_S (g)	T_A (s)
Fandisk	$64 \times 40 \times 52$	23.35	80	4.67	10	62	5.37	8	66	2.8	11
Element	$34 \times 70 \times 29$	15.34	70	2.91	12	45	4.75	14	51	2.15	19
Umbrela	$50 \times 50 \times 49$	8.72	70	1.48	8	42	2	9	45	0.78	8

为模型打印时间, W_S 为模型支撑结构重量, T_A 为支撑结构生成算法运行时间. 由于 Meshmixer 算法打印均以失败告终 (如图 12 所示), 故 Meshmixer 算法列举的数据为 Replicator2X 打印机软件计算的估计数据.

本文算法在支撑结构耗材方面优于 Meshmixer 算法与 Makerware 算法; 在打印时间方面本算法优于 Meshmixer 算法, 与 Makerware 算法相近, 这是由于本文算法虽然支撑结构体积较小, 但是喷头移动路径并没有明显减少.

本文算法主要计算量集中在第三类支撑结构生成中, 第三类支撑结构计算时首先计算第一类和第

二类支撑熔丝投影区域的相交区域, 之后对各相交区域进行支撑树生成运算, 最后对所有支撑树做最优化运算求解. 相交区域数量是影响算法运算效率的关键因素. 为提高算法效率, 可以在获取相交区域时进行限制, 设定阈值 N, 根据相交区域中熔丝数量由大到小顺序遍历相交区域, 当区域中熔丝数量大于 N 或区域内存在熔丝不在其他区域中, 选取该区域. 本文实验数据阈值设定为 4, 选取适当阈值后, 本文算法运行时间与 Meshmixer 算法、Makerware 算法相近.

与 Makerware 算法对比, 本文支撑结构明显更为稀疏, 并且采用了锥形结构, 节省材料效果明显; 与 Meshmixer 树状结构对比, 本文算法稳定性更好, 这是由于本文算法考虑了熔丝支撑问题并且合理约束了树枝长度, 不会出现过长树枝悬臂致使打印悬臂坍塌折断, 另外在拐点处的支撑使得本文算法打印极少出现图 12 (d) 右下角的熔丝坍塌现象.

4 结论

本文提出了一种熔丝沉积制造中的支撑结构生成方法, 充分分析熔丝沉积制造中扫描熔丝构造特点, 对支撑区域进行分类, 根据每类支撑的特点设计相应的支撑结构成型算法, 并建立最优化计算模型, 计算符合各类约束的最小支撑结构, 在保证了打印成型质量同时节省了打印耗材.

在构造支撑结构时, 除了稳固支撑外还有其他因素需要考虑, 包括: 1) 并不是所有模型都需要非常精确的支撑, 应根据需求变换支撑结构生成尺度. 2) 支撑结构去除时易造成模型受损, 应构造易于去除的支撑结构.

References

1 Allen S, Dutta D. Determination and evaluation of support structures in layered manufacturing. *Journal of Design and Manufacturing*, 1995, **5**(3): 153−162

2 Snead D E, Smalley D R, Cohen A L, Alison J W, Vorgitch T J, Chen T P. Boolean Layer Comparison Slice, U. S. Patent 6333741, December 2001.

3 Strano G, Hao L, Everson R M, Evans K E. A new approach to the design and optimisation of support structures in additive manufacturing. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2013, **66**(9−12): 1247−1254

4 Huang X M, Ye C S, Wu S Y, Guo K B, Mo J H. Sloping wall structure support generation for fused deposition modeling. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2009, **42**(11−12): 1074−1081

5 Heide E K. Method for Generating and Building Support Structures with Deposition-Based Digital Manufacturing Systems, U. S. Patent 8983643, January 2010.

6 Chen Zhi-Jia, Wang Cong-Jun, Zhang Li-Chao. An algorithm of automatic support generation of FDM based on linescan. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition)*, 2004, **32**(6): 60−62 (陈之佳, 王从军, 张李超. 基于直线扫描的 FDM 支撑自动生成算法. 华中科技大学学报 (自然科学版), 2004, **32**(6): 60−62)

7 Wang W M, Wang T Y, Yang Z W, Liu L G, Tong X, Tong W H, Deng J S, Chen F L, Liu X P. Cost-effective printing of 3D objects with skin-frame structures. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, **32**(5): 177

8 Dumas J, Hergel J, Lefebvre S. Bridging the gap: automated steady scaffoldings for 3D printing. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, **33**(4): 98

9 Kritchman E, Gothait H, Miller G. System and Method for Printing and Supporting Three Dimensional Objects, U. S. Patent 20080211124, April 2008.

10 Prévost R, Whiting E, Lefebvre S, Sorkine-Hornung O. Make it stand: balancing shapes for 3d fabrication. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, **32**(4): 81

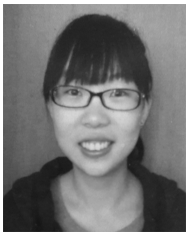
11 Stava O, Vanek J, Benes B, Carr N, Měch R. Stress relief: improving structural strength of 3D printable objects. *ACM Transactions on Graphics*, 2012, **31**(4): 48

12 Lu L, Sharf A, Zhao H S, Wei Y, Fan Q N, Chen X L, Savoye Y, Tu C H, Cohen-Or D, Chen B Q. Build-to-last: strength to weight 3D printed objects. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, **33**(4): 97

13 Zhang X L, Xia Y, Wang J Y, Yang Z W, Tu C H, Wang W P. Medial axis tree — an internal supporting structure for 3D printing. *Computer Aided Geometric Design*, 2015, **35-36**: 149−162

魏潇然 西北大学博士研究生. 2008 年获得西北大学学士学位. 主要研究方向为图形几何处理, 3D 打印技术.
E-mail: wxran1987@163.com
(**WEI Xiao-Ran** Ph. D. candidate at Northwest University. He received his bachelor degree from Northwest University in 2008. His research interest covers graphics geometry processing and 3D printing.)

耿国华 西北大学教授. 1978 年获得西北大学学士学位. 主要研究方向为计算机图形图像处理, 可视化技术. 本文通信作者. E-mail: ghgeng@nwu.edu.cn
(**GENG Guo-Hua** Professor at Northwest University. She received her bachelor degree from Northwest University in 1978. Her research interest covers graphics image processing and visualization technology. Corresponding author of this paper.)



张雨禾 西北大学博士研究生. 2012 年获得西北大学学士学位. 主要研究方向为图形几何处理, 3D 打印技术.
E-mail: zhangyuhe0601@126.com
(**ZHANG Yu-He** Ph. D. candidate at Northwest University. She received her bachelor degree from Northwest University in 2012. Her research interest covers graphics geometry processing and 3D printing.)