一类高阶线性系统的分层控制

杨开红 [1]　季海波 [1]

摘　要　近年来, 一种基于系统层次结构的分层控制方法发展了起来, 它主要针对的是高阶复杂系统. 为了分析和控制这类系统, 我们首先根据需要构建一个合适的低阶抽象系统, 然后在此基础上分析和设计原始系统控制律, 即所谓的接口函数. 本文将此方法用于一类高阶线性系统的稳定控制问题, 并得到了相应的控制律. 最后, 算例部分的仿真结果说明了这种方法的有效性.

关键词　分层控制, 抽象系统, 接口函数, 线性系统

引用格式　杨开红, 季海波. 一类高阶线性系统的分层控制. 自动化学报, 2015, **41**(1): 176−179

DOI　10.16383/j.aas.2015.c141079

Hierarchical Control of a Class of High-dimensional Linear Systems

YANG Kai-Hong[1]　JI Hai-Bo[1]

Abstract　Recently, the hierarchical control method based on a hierarchical architecture has been developed, which is mainly aimed at large-scale complex systems. In order to analyze and control this class of systems, we at first, construct an appropriate and low-dimensional abstract system, then synthesize and lift the control law from the obtained abstraction of the original system by the notion of interface function. This paper studies the stable control problem of a class of high-dimensional linear systems and obtains the results by employing the hierarchical control method. Finally, a simulation example is given to illustrate the effectiveness of this method.

Key words　Hierarchical control, abstraction, interfaces, linear systems

Citation　Yang Kai-Hong, Ji Hai-Bo. Hierarchical control of a class of high-dimensional linear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 176−179

对于类似于电力系统、混合动力学系统以及大尺度系统等的复杂对象, 由于其非线性、高阶性、状态的混合性和对性能指标的高要求, 系统的分析和控制器的设计始终是工程界一个极富挑战性的问题. 以往的学者利用降阶技术[1−3] 得到低阶模型并在其上进行控制, 其中低阶模型具有原系统的基本特性. 这种方法的一个限制条件是要求两个系统的输入具有相同的维数. 而最近, Pappas 等学者利用模型抽象化提出了 Π 相关系统[4] 和接口函数的概念, 它并不要求原系统和抽象化后的低阶系统具有相同的输入空间维数, 并且可通过接口函数来增加控制设计的自由度.

正是在这种背景下, 分层控制方法被提了出来. 这种控制结构至少包括两层, 第一层是原始对象的精确模型, 也就是最终需要实现控制的系统, 称为原始系统. 第二层是对象的一个简化或降阶的粗糙模型, 称为抽象系统.

收稿日期 2013-11-29　录用日期 2014-06-10
Manuscript received November 29, 2013; accepted June 10, 2014
国家自然科学基金 (61273090, 61333008) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61273090, 61333008)
本文责任编委 贾英民
Recommended by Associate Editor JIA Ying-Min
1. 中国科学技术大学自动化系 合肥 230027
1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027

分层控制方法最重要的两个方面是对抽象系统的构建以及由抽象系统控制器求取原始系统控制器. 对于前一个问题, 传统的方法是各种形式的降阶技术[1−3]. Π 相关抽象提出后就立即受到了很大关注[4−7]. 尤其值得一提的是, 文献 [8−9] 在考虑了 Π 相关抽象的同时, 也讨论了上述提到的第二个问题, 并对线性系统得到了控制器转移的条件和结构. 文献 [10] 将其扩展到非线性的情况并得到了相似的结论.

需要提醒的是, 文献 [9−10] 主要研究的是系统轨线在受限区域下的控制, 包括了安全控制以及避障等问题. 它们首先假定已经找到了一个使原始系统能够渐近稳定的控制器, 然后再在此基础上利用模拟函数的概念设计接口函数以保证原始系统的输出轨线实现所要求的控制目标. 而本文的核心目标是寻找一个使原始系统渐近稳定的控制器, 使得系统状态轨线最终趋于原点. 很明显, 虽然我们与文献 [9] 都是用分层控制方法研究线性系统, 但控制目标却有显著的不同. 具体说来, 本文不是直接对原始系统进行稳定控制, 而是在分层控制系统的构架中, 首先得到一个辅助的抽象系统, 以抽象系统控制律已知为前提, 然后讨论怎样利用这一控制律得到可使原始系统渐近稳定的控制器. 注意, 这种方法虽然可以应用于一般的线性系统, 但对高阶线性系统的稳定控制问题更为有效.

本文的组织结构如下: 第 1 节简单介绍分层控制系统的一些概念和方法; 第 2 节作为本文的重点, 说明怎样根据抽象系统的控制律构造原始系统的控制律; 第 3 节列举一个例子以说明本文提出的方法, 并用仿真结果验证了本文的结论; 最后一节给出本文的结论.

1　分层控制基础

首先考虑一个非线性系统:

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\\ \boldsymbol{y}(t)=g(\boldsymbol{x}(t))\end{cases}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^p$, $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^k$. 假定 $f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^n$ 和 $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^k$ 均为连续映射. 输入为映射 $u:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^p$. 我们将系统 Σ 看作是要实现控制目标的原始系统.

在很多情况下, 由于实际系统的复杂性, 直接对原始系统进行控制是非常困难的. 在这种情况下, 一些学者提出了基于近似模拟的分层控制系统. 这种方法是在构建好的抽象系统的基础上进行控制器的分析和设计, 然后再通过接口函数将设计好的控制律嵌入到实际系统当中. 其中的抽象系统是一个比原始系统更简单更粗糙的系统, 但它会保留原始系统的一些主要性质和期望特性. 我们将 Σ 的抽象系统记为

$$\Sigma':\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}(t)=h(\boldsymbol{z}(t),\boldsymbol{v}(t))\\ \boldsymbol{w}(t)=k(\boldsymbol{z}(t))\end{cases}$$

其中, $\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{v}(t)\in\mathbf{R}^q$, $\boldsymbol{w}(t)\in\mathbf{R}^k$. f,g 为连续映射. 我们看到 Σ 和 Σ' 有相同的输出维数, 即 $\mathbf{R}^k$. 但是却可以有不同的输入空间和状态空间. 一般情况下, $m<n$, 即抽象系统的状态空间比原始系统的状态空间维数低.

分层控制的一个重要概念是接口函数 $u_v:\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$, 由于原始系统和抽象系统的输入空间并不一致, 所以需要这个函数将抽象系统的控制器以某种方式嵌入到原始系统当中, 以实现对实际系统的控制. 一般说来, 它是抽象系统的输入和状态以及原始系统的状态的函数. 但在某些特

殊情况下, 可以只包含有其中的一个或两个.

由上述分析可知, 分层控制方法主要包括了两个关键的步骤: 1) 由原始系统构造一个有效的抽象系统 Σ'; 2) 在已知抽象系统控制律的前提下设计原始系统的控制器 u_v. 下面我们就开始这两方面的研究.

2　接口函数设计

由于本文讨论的是状态反馈的稳定控制. 故假设原始系统为如下形式的高阶线性系统:

$$\Sigma : \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

此处, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^p$, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times p}$, 并且系统是完全可控的. 不失一般性, 我们可假设[1]$\mathrm{rank}(B) = p$.

抽象线性控制系统为

$$\Sigma' : \dot{\boldsymbol{z}}(t) = F\boldsymbol{z}(t) + G\boldsymbol{v}(t) \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{v}(t) \in \mathbf{R}^q$, $F \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $G \in \mathbf{R}^{m\times q}$. 注意, 抽象系统的输入维数不必与原始系统的输入维数相同, 而且 $\mathrm{rank}(G)$ 也不必等于 q.

实现本文所述的控制目标的重点在于接口函数的设计. 更详细地说, 就是对于抽象系统 Σ', 假设存在一个反馈控制律 $\boldsymbol{v} = K\boldsymbol{z}$ 使 $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = (F + GK)\boldsymbol{z}(t)$ 渐近稳定, 则据此控制律构造一个可使原系统稳定的控制器. 由于在接口函数中引入了抽象系统的状态 $\boldsymbol{z}$, 所以 $\boldsymbol{z}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 两状态需要满足一定的关系. 那么, F 和 G 也必定与 A 和 B 有内在的联系.

为此, 先对原始系统进行一个等价变换. 假设 $\Pi \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 为行满秩矩阵, 则存在另一个行满秩矩阵 $N \in \mathbf{R}^{(n-m)\times n}$ 使得矩阵 $T = \begin{bmatrix}\Pi\\ N\end{bmatrix}$ 可逆. 那么等价变换 $\bar{\boldsymbol{x}} = T\boldsymbol{x}$ 可将原系统 Σ 变换成

$$\bar{\Sigma} : \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{B}\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t) \tag{3}$$

其中, $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$, $\bar{B}_1 = \Pi B$, $\bar{B}_2 = NB$. 由于抽象系统是可以按照自己的期望进行构建的, 不妨令

$$F = \bar{A}_{11}, \quad G = [\bar{A}_{12}, \bar{B}_1] \tag{4}$$

并取 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_2\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}$, 若将状态 $\bar{\boldsymbol{x}}_1$ 与状态 $\boldsymbol{z}$ 对应, 则很容易看出, $\bar{\boldsymbol{x}}_1$ 子系统与抽象系统 (2) 是一样的.

下面通过 Π 相关的定义来说明原始系统与抽象系统的关系.

定义 1[4]**.** 设 Π 是一个 $m \times n$ 的矩阵, 如果对于所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^p$, 存在 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^q$, 使得:

$$\Pi(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}) = F\Pi\boldsymbol{x} + G\boldsymbol{v} \tag{5}$$

成立, 则称 Σ' 系统对于 Σ 系统是 Π 相关的.

很容易证明由式 (4) 确定的系统 (2) 对于系统 (1) 是 Π 相关的. 由文献 [4] 可知, 式 (1) 成立当且仅当对于原始系统 (1) 的任意一个状态轨线 $\boldsymbol{x}$, 存在抽象系统 (2) 的状态轨线 $\boldsymbol{z}$ 使得对所有的 t, $\boldsymbol{z}(t) = \Pi\boldsymbol{x}(t)$ 成立. 这一点由以上定义的抽象系统与 $\bar{\boldsymbol{x}}_1$ 子系统的一致性也可看出.

[1] $\mathrm{rank}(B)$ 表示矩阵 B 的秩.

在正式开始设计接口函数之前, 首先通过下面的引理来得到抽象系统的状态矩阵 F 和输入矩阵 G 的一个明确表达式.

引理 1. 如果 $\Pi \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 为行满秩矩阵, 其中 $m < n$, 那么存在另一个行满秩矩阵 $N \in \mathbf{R}^{(n-m)\times n}$ 使得 $\Pi N^{\mathrm{T}} = 0$, 并且矩阵 $T = \begin{bmatrix}\Pi\\ N\end{bmatrix}$ 可逆, $T^{-1} = [\Pi^+ \quad N^+]$. 其中, Π^+ 和 N^+ 分别表示矩阵 Π 和 N 的 PM 广义逆矩阵.

证明. 由引理条件可知[2]$\dim(\mathcal{R}(\Pi^{\mathrm{T}})) = m$, $\dim(\mathcal{N}(\Pi)) = n - m$, 并存在行满秩矩阵 $N \in \mathbf{R}^{(n-m)\times n}$ 使得 $\mathcal{N}(\Pi) = \mathcal{R}(N^{\mathrm{T}})$, 此时即有 $\Pi N^{\mathrm{T}} = 0$, 而且矩阵 $T = \begin{bmatrix}\Pi\\ N\end{bmatrix}$ 的秩为 n, 它是一个可逆方阵. 另外, 容易得到 $\Pi\Pi^{\mathrm{T}}$ 和 NN^{T} 也是可逆方阵. 下面证明 $T^{-1} = [\Pi^+ \quad N^+]$, 由于 $\Pi N^{\mathrm{T}} = 0$, 则:

$$TT^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\Pi\\ N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Pi^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Pi\Pi^{\mathrm{T}} & \Pi N^{\mathrm{T}}\\ N\Pi^{\mathrm{T}} & NN^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Pi\Pi^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & NN^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} T^{-1} &= T^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Pi\Pi^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & NN^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{-1} = \\ &\begin{bmatrix}\Pi^{\mathrm{T}} & N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\Pi\Pi^{\mathrm{T}})^{-1} & 0\\ 0 & (NN^{\mathrm{T}})^{-1}\end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix}\Pi^{\mathrm{T}}(\Pi\Pi^{\mathrm{T}})^{-1} & N^{\mathrm{T}}(NN^{\mathrm{T}})^{-1}\end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix}\Pi^+ & N^+\end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

为了表达方便, 后文中出现的所有 N 均为满足 $\mathcal{R}(N^{\mathrm{T}}) = \mathcal{N}(\Pi)$ 的行满秩矩阵.

基于以上引理, 我们得到:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= \Pi A\Pi^+, & \bar{A}_{12} &= \Pi AN^+\\ \bar{A}_{21} &= NA\Pi^+, & \bar{A}_{22} &= NAN^+ \end{aligned} \tag{6}$$

和

$$F = \Pi A\Pi^+ \qquad G = [\Pi AN^+, \Pi B] \tag{7}$$

由上述可知, Π 的选择是至关重要的. 下面我们就围绕寻找 Π 矩阵和设计接口函数展开讨论.

当 $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{N}(\Pi)$ 时, 我们得到 $\Pi B = 0$. 此时, 实际系统的输入将不出现在抽象系统中, 取而代之的是在抽象过程中被忽略的状态, 这正是反步法中虚拟输入的由来. 文献 [4] 还用这种方法定义了一个新型的可控性检验算法, 这种算法对大规模高维数的系统尤其有效. 作为一种特殊情况, $\mathcal{R}(B) = \mathcal{N}(\Pi)$ 所表示的物理意义是: 在原始系统中被输入所直接驱动的所有状态将不再作为状态, 而是作为输入出现在抽象系统中.

[2] $\mathcal{R}(\Pi^{\mathrm{T}})$ 表示矩阵 Π^{T} 的列空间, $\mathcal{N}(\Pi)$ 表示矩阵 Π 的零空间, $\dim(V)$ 表示空间 V 的维数.

为消除输入冗余, 在此种情况下, G 取为 ΠAN^+, 而非 $[\Pi AN^+, 0]$. 那么输入维数 $q = n - m$.

定理 1. 对于完全可控的原始系统 (1), 设 $\Pi \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 为满足 $\mathcal{N}(\Pi) = \mathcal{R}(B)$ 的行满秩矩阵, 抽象系统 (2) 的状态矩阵和输入矩阵分别取为 $F = \Pi A\Pi^+$ 和 $G = \Pi A(B^{\mathrm{T}})^+$, 如果存在反馈控制律 $\boldsymbol{v} = K\boldsymbol{z}$ 使抽象系统渐近稳定, 则反馈律

$$\boldsymbol{u} = -(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}(B^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} - K\Pi A\boldsymbol{x} + 2B^+A^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}P\Pi\boldsymbol{x} + k[B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - K\Pi\boldsymbol{x}]) \tag{8}$$

能够使原始系统闭环渐近稳定. 其中, k 为任意大于 0 的常数, P 为正定矩阵且满足 $(F+GK)^{\mathrm{T}}P + P(F+GK) < 0$.

证明. 由于系统 (1) 经等价变换 $\bar{\boldsymbol{x}} = T\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\Pi\\ N\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 变换为系统 (3), 由引理 1 知, 其中的分块状态矩阵可由式 (6) 决定. 所以我们只需要寻找使系统 (3) 稳定的控制律即可. 为此, 使用

$$V = \bar{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}P\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \frac{1}{2}[\bar{\boldsymbol{x}}_2 - K\bar{\boldsymbol{x}}_1]^{\mathrm{T}}[\bar{\boldsymbol{x}}_2 - K\bar{\boldsymbol{x}}_1]$$

作为系统 $\bar{\Sigma}$ 的李雅谱诺夫函数.

为了方便, 令 $M = -(F+GK)^{\mathrm{T}}P - P(F+GK)$. 显然, 矩阵 M 对称且正定. 对 V 求导, 得到:

$$\begin{aligned}\dot{V} = {}& \bar{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}[(F+GK)^{\mathrm{T}}P + P(F+GK)]\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \\ & 2\bar{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}PG(\bar{\boldsymbol{x}}_2 - K\bar{\boldsymbol{x}}_1) + (\bar{\boldsymbol{x}}_2 - K\bar{\boldsymbol{x}}_1)^{\mathrm{T}}(\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2 - K\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1) = \\ & -\bar{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}M\bar{\boldsymbol{x}}_1 + (\bar{\boldsymbol{x}}_2 - K\bar{\boldsymbol{x}}_1)^{\mathrm{T}}(\bar{A}_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \bar{A}_{22}\bar{\boldsymbol{x}}_2 + \bar{B}_2\boldsymbol{u} - \\ & K(F\bar{\boldsymbol{x}}_1 + G\bar{\boldsymbol{x}}_2) + 2G^{\mathrm{T}}P\bar{\boldsymbol{x}}_1)\end{aligned}$$

如果令:

$$\bar{B}_2\boldsymbol{u} = -(\bar{A}_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_1 + \bar{A}_{22}\bar{\boldsymbol{x}}_2 - K(F\bar{\boldsymbol{x}}_1 + G\bar{\boldsymbol{x}}_2) + 2G^{\mathrm{T}}P\bar{\boldsymbol{x}}_1 + k[\bar{\boldsymbol{x}}_2 - K\bar{\boldsymbol{x}}_1]) \tag{9}$$

则

$$\dot{V} = -\bar{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}M\bar{\boldsymbol{x}}_1 - k[\bar{\boldsymbol{x}}_2 - K\bar{\boldsymbol{x}}_1]^{\mathrm{T}}[\bar{\boldsymbol{x}}_2 - K\bar{\boldsymbol{x}}_1] < 0$$

于是系统 $\bar{\Sigma}$ 在原点是渐近稳定的, 那么原始系统 Σ 同样是渐近稳定的.

注意, 式 (9) 对于控制 $\boldsymbol{u}$ 不一定有解, 除非矩阵 $\bar{B}_2 = NB$ 行满秩. 而当 $N = B^{\mathrm{T}}$ 时, 很明显 $\bar{B}_2 = B^{\mathrm{T}}B$ 为满秩方阵, 式 (9) 有解. 而且此时应有 $m = n - p$, 即抽象系统的状态空间维数应等于原始系统的状态空间维数减去原始系统的输入空间维数. 然后我们用 $B^{\mathrm{T}}A\Pi^+$, $B^{\mathrm{T}}A(B^{\mathrm{T}})^+$, $\Pi A\Pi^+$, $\Pi A(B^{\mathrm{T}})^+$, $\Pi\boldsymbol{x}$, $B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 分别代替 $\bar{A}_{21}$, $\bar{A}_{22}$, F, G, $\bar{\boldsymbol{x}}_1$, $\bar{\boldsymbol{x}}_2$, 并注意到 $\Pi^+\Pi + (B^{\mathrm{T}})^+B^{\mathrm{T}} = I$ (由引理 2 得到), 于是可得式 (8). □

在得到上述的定理之后, 我们对式 (9) 详细分析后可得到式 (9) 对于控制 $\boldsymbol{u}$ 有解的充要条件是 $\bar{B}_2$ 为可逆方阵. 充分性显然. 必要性说明如下: 由于式 (9) 始终有解等价于 $\bar{B}_2$ 行满秩, 即 $\mathrm{rank}(\bar{B}_2) = \mathrm{rank}(NB) = \mathrm{rank}(N)$. 因为 $TB = \begin{bmatrix}0\\ NB\end{bmatrix}$, 且 T 可逆, 则 $\mathrm{rank}(\bar{B}_2) = \mathrm{rank}(NB) = \mathrm{rank}(TB) = \mathrm{rank}(B)$, 所以 $\bar{B}_2 \in \mathbf{R}^{(n-m)\times p}$ 又必然是列满秩, 那么必有 $n - m = p$ 且 $\bar{B}_2$ 为可逆方阵. 所以在这种情况下, 应由 $\Pi B^{\mathrm{T}} = 0$ 或由 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{N}(\Pi)$ 来确定的行满秩矩阵 Π, 才能使由式 (9) 确定的控制律 $\boldsymbol{u}$ 有唯一解.

由定理 1 知, 当给定一个满足 $\mathcal{N}(\Pi) = \mathcal{R}(B)$ 的行满秩矩阵 Π 和抽象系统的一个控制器 $\boldsymbol{v} = K\boldsymbol{z}$ 后, 我们就能够设计出使原始系统闭环稳定的控制器. 需要注意的是, 满足条件的 Π 有很多, 但它的不同选择影响的只是最终原始系统控制律的大小, 对系统的渐近稳定性没有任何影响. 为了方便计算, 一般选择形式简单的 Π.

接下来, 我们讨论后一个前提假设: 存在一个反馈控制律 $\boldsymbol{v} = K\boldsymbol{z}$ 使 $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = (F+GK)\boldsymbol{z}(t)$ 渐近稳定. 现在如果把抽象系统 Σ': $\dot{\boldsymbol{z}}(t) = F\boldsymbol{z}(t) + G\boldsymbol{v}(t)$ 作为一个原始系统, 对其进行抽象, 那么可得到一个它自身的抽象系统, 就可以利用上述的方法对 Σ' 进行镇定. 这样就形成了一个递归控制方法. 注意, 运用这种方法时, 在每一步的抽象过程中, 可忽略的状态的维数并不是无限制的, 为了使式 (9) 有解, 其维数必须严格等于 $\mathrm{rank}(B)$ (在第二步及其之后用 $\mathrm{rank}(G)$ 代替). 第 3 节的算例将能够说明这样的迭代过程.

当然, 在维数不高的线性系统控制问题中, 这种方法不如传统的控制方法. 但当系统维数很高时, 这种可递归的控制算法为计算机的实现提供了方便, 也许就可以显示出它的优越性. 关于这种迭代的控制算法的实现, 需要做进一步的研究.

3 算例

假设我们考虑的原始系统为下列三阶线性系统:

$$\Sigma^{(3)}: \dot{\boldsymbol{x}}^{(3)} = A^{(3)}\boldsymbol{x}^{(3)} + B^{(3)}u^{(3)} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&5&1\\2&1&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(3)} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}u^{(3)}$$

为使 $\mathcal{N}(\Pi_2) = \mathcal{R}(B^{(3)})$, 取

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

得

$$\Sigma^{(2)}: \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)} = A^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)} + B^{(2)}u^{(2)} = \begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(2)} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u^{(2)}$$

仿 Π_2 的取法, Π_1 取为

$$\Pi_1 = [1, 0]$$

得

$$\Sigma^{(1)}: \dot{x}^{(1)} = A^{(1)}x^{(1)} + B^{(1)}u^{(1)} = x^{(1)} + u^{(1)}$$

对于 $\Sigma^{(1)}$ 的一阶系统, 很明显取输入为 $u^{(1)} = K_1x^{(1)} = -2x^{(1)}$ 时, 一阶系统稳定. 运用式 (8), 并取 $k_1 = 1$, 可得:

$$\begin{aligned}u^{(2)} = {}& -(2x_1^{(2)} + 3x_2^{(2)} + 2(x_1^{(2)} + x_2^{(2)}) + 2x_1^{(2)} + \\ & (x_2^{(2)} + 2x_1^{(2)})) = -8x_1^{(2)} - 6x_2^{(2)}\end{aligned}$$

故 $K_2 = [-8, -6]$, 另外, P_2 可取为 $\begin{bmatrix}8&1.5\\1.5&5/6\end{bmatrix}$ 以使 $(A^{(2)} + B^{(2)}K_2)^{\mathrm{T}}P_2 + P_2(A^{(2)} + B^{(2)}K_2) < 0$.

注意到 $\bar{\boldsymbol{x}}_1^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(2)} = [x_1^{(3)}, x_3^{(3)}]^{\mathrm{T}}, \bar{x}_2^{(3)} = x_2^{(3)}$, 并取 $k_2 = 1$, 那么

$$u^{(3)} = -([0,1]\bar{\boldsymbol{x}}_1^{(3)} + 5\bar{x}_2^{(3)} + [8,6]\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1^{(3)} + 6\bar{x}_2^{(3)} + 2\left[1.5, \frac{5}{6}\right]\bar{\boldsymbol{x}}_1^{(3)} + (\bar{x}_2^{(3)} + [8,6]\bar{\boldsymbol{x}}_1^{(3)})) = -31x_1^{(3)} - 12x_2^{(3)} - \left(33 + \frac{5}{6}\right)x_3^{(3)}$$

将上述控制律加入到原始系统 $\Sigma^{(3)}$ 的输入端, 能够证明闭环系统是稳定的.

图 1 和图 2 分别显示的是对上述原始闭环系统的状态轨线和三个不同系统输入轨线的仿真结果. 其中初始值为 $\boldsymbol{x}^{(3)}(0) = [3, -6, -2]^{\mathrm{T}}$. 由此可知, 原始系统的三个状态皆趋于零, 尽管 $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ 的绝对值的最大值依次增大, 但这并不是本文所考虑的问题, 关于输入上的变化情况将作为以后的研究课题.

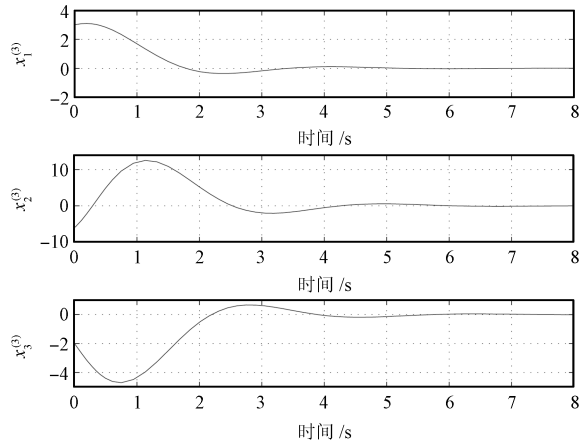

图 1　状态轨线

Fig. 1　State trajectories

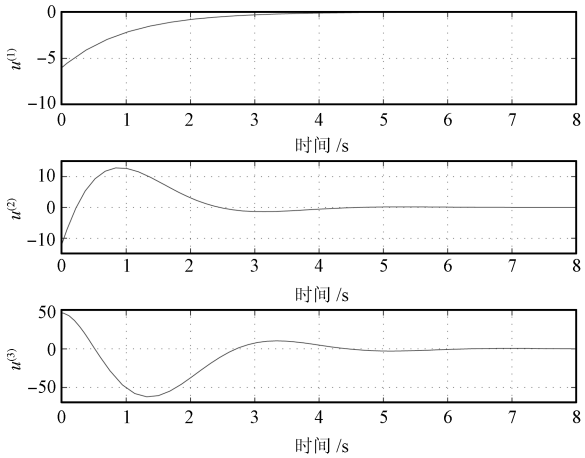

图 2　输入轨线

Fig. 2　Input trajectoriess

4　结语

在本文中, 我们在分层控制系统的构架下对系统进行稳定控制. 在已知抽象系统控制律的前提下, 本文讨论了怎么利用这一控制律得到可使原始系统稳定的控制器. 仿真结果显示这种方法是有效的. 下一步的工作是更详细地探究这些内容, 并将此方法扩展到非线性系统.

References

1 Aoki M. Control of large scale dynamic systems by aggregation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, **13**(3): 246−253

2 Ikeda M, Siljak D, Gugercin S. An inclusion principle for dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, **29**(3): 244−249

3 Antoulas A, Sorensen D, Gugercin S. A survey of model reduction methods for large-scale systems. *Contemporary Mathematics*, 2000, **280**: 193−219

4 Pappas G J, Lafferriere G, Sastry S. Hierarchically consistent control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(6): 1144−1160

5 Pappas G J, Lafferriere G. Hierarchies of stabilizability preserving linear systems. In: Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, USA: IEEE, 2001. 2081−2086

6 Pappas G J, Simic S. Consistent abstractions of affine control systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2002, **47**(5): 745−756

7 Tabuada P, Pappas G J. Hierarchical trajectory refinement for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 2005, **41**(4): 701−708.

8 Girard A, Pappas G J. Approximate hierarchies of linear control systems. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA: IEEE, 2007. 3727−3732

9 Girard A, Pappas G J. Hierarchical control system design using approximate simulation. *Automatica*, 2009, **45**(2): 566−571

10 Tang Y T, Hong Y G. Hierarchical control design of nonlinear systems based on approximate simulation. In: Proceedings of the 12th International Conference on Control, Automation, Robotics, and Vision. Guangzhou, China: IEEE, 2012. 566−571

杨开红　中国科学技术大学自动化系硕士研究生. 主要研究方向为高阶系统的分层控制. 本文通信作者. E-mail: ykh0313@mail.ustc.edu.cn
(**YANG Kai-Hong**　Master student in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. His research interest covers hierarchical control of high-dimensional systems. Corresponding author of this paper.)

季海波　中国科学技术大学自动化系教授. 主要研究方向为非线性系统控制, 自适应控制以及应用. E-mail: jihb@ustc.edu.cn
(**JI Hai-Bo**　Professor in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. His research interest covers nonlinear control, adaptive control, and their applications.)