球对称 n 维反应扩散方程的边界观测与输出反馈控制

齐 洁 [1, 2] 王 川 [1, 2] 潘 峰 [1, 2]

摘 要 许多实际系统可用 n 维超球坐标系来描述, 并且系统有球对称的性质, 因而可通过研究半径方向的状态变化, 得到系统的全局动态过程. 通过将高维的对称系统转化为等价的径向一维方程, 本文采用边界 Backstepping 方法设计了球对称反应扩散方程的输出反馈控制器. 使用容易测量的边界状态值, 设计了状态观测器来估计系统在空间域的所有状态, 从而实现输出反馈控制. 本文扩展了连续 Backstepping 方法, 提出了 n 维球坐标的 Volterra 积分映射, 从而求出了显式表达的控制器和状态观测器. 论文用 Lyapunov 函数法证明了输出反馈系统在 H^1 范数下指数稳定, 表明状态对初值的连续依赖, 确保控制系统具有较好的性质, 不会在空间某点发散. 最后进行了数值仿真, 仿真结果表明系统在输出反馈控制律的作用下收敛到稳态值.

关键词 边界观测器, 状态估计, 反步法, 扩散反应方程, 分布式参数系统

引用格式 齐洁, 王川, 潘峰. 球对称 n 维反应扩散方程的边界观测与输出反馈控制. 自动化学报, 2015, **41**(7): 1356−1364

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140741

Boundary Observer and Output-feedback Control for a Class of n-dimensional Symmetric Advection-diffusion Equations

QI Jie[1, 2] WANG Chuan[1, 2] PAN Feng[1, 2]

Abstract Many systems in application are modelled in n-sphere coordinates and also have symmetric properties. For symmetric system, we can obtain the dynamics of n-D states by investigating 1-D states along the radial direction. This paper uses the boundary backstepping method to design an output feedback control law for a symmetrical n-D reaction-diffusion equation by studying an equivalent 1-D radial system. We design an observer by boundary sensor to estimate the whole states in space which are needed in the feedback control. We extend the continuous backstepping method by proposing an n-D sphere Volterra integration mapping, which makes it possible to get explicit controller and observer. We have proved the exponential stability in the H^1 norm by using Lyapunov function, which means that the states are continuous in terms of initial conditions and that the system has good properties in that it will not diverge in some special point. Finally, we do some simulations to illustrate that the system can converge to the equilibrium actuated by the output feedback control.

Key words Boundary observer, state estimation, backstepping, advection-diffusion equation, distributed parameter system

Citation Qi Jie, Wang Chuan, Pan Feng. Boundary observer and output-feedback control for a class of n-dimensional symmetric advection-diffusion equations. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(7): 1356−1364

许多系统的状态不但随时间发生变化, 而且也随空间位置的改变而改变, 例如流体在多孔介质中的流动过程、湿纺碳纤维成形过程、火箭推进器动力学、化学反应过程、生物种群的相互作用关系等[1−2]. 这些系统属于分布式参数系统, 需要用偏微分方程来描述其动态过程. 由于分布式参数系统的普遍存在, 因此其控制方法的研究越来越受到关注, 提出了许多系统设计与分析的方法. 例如最优控制求解 Riccati 方程的方法[3−4]、基于 Lyapunov 函数的方法[5−7]、半群理论[8−9]、滑模控制[10]、滑模与自抗扰控制结合[11]、自抗扰方法应用于输出反馈控制[12]、采用模型预测控制的方法[13−14]、线性矩阵不等式方法[15] 和空间连续 backstepping (Spatially continuous backstepping)[16−17]. 空间连续 backstepping 具有核函数可逆、指数稳定、不用求解繁琐的 Riccati 方程以及采用物理上容易实现的边界控制等优点, 引发了偏微分方程 (Partial different equation, PDE) 控制领域的研究兴趣[18]. Backstepping 方法在偏微分方程中的应用始于直角坐标系下的一维抛物方程边界控制器的设计[19], 后来扩展到不同区域上的各类方程[20−21], 包括带有非线性项的抛物方程的控制[22]、直角坐标系中的 2 维和 3 维方程的控制[23−24], 用奇异值扰动和 Backstepping 方法相结合的观测器设计[25], 但研究球坐标系下的偏微分方程的文献较少. 这是因为球心是正则奇异点, 系统化为径向的一维方程时, 球心 $r = 0$ 不是边界, 系统只有 $r = R$ 一个边界. 文献 [26] 设计了球形区域上的边界控制, 通过去掉球心, 在球心的一个小邻域 $\|x\| = \varepsilon$ 上增设一个边界来避开球心奇异性. 文献 [27] 在一个二维圆盘上研究了边界控制器的设计. 本文提出了一个新的 n 维球的 Volterra 积分变换, 因而能求出显示表达的 n 维径向核函数, 并设计了边界观测器, 只需测量边界的状态就可估计系统所有的状态实现输出反馈控制.

在设计边界状态观测器的过程中, 首先根据 n 维球的极坐标积分形式, 定义了新的适应 n 维坐标的 Volterra 积分变换, 将含有边界状态测量项的观测误差系统映射为一个稳定径向扩散方程. 通过观测误差系统与目标系统的等价性, 可以得到观测器核函数方程, 方程含有正则奇异点 (Regular singular)[28]. 通过一系列的变换, 核函数方程可转化为一阶 Bessel 方程, 原方程中的正则奇异点隐含于 Bessel 方程的第二类解中, 由于 $r = 0$ 不能发散, 因此核函数方程中只保留 Bessel 方程的第一类解. 于是得到了用 Bessel 第一类解表示的核函数和观测增益. 通过将观测系统和状态方程级联, 可得基于观测器的边界输出反馈控制方案, 实现系统稳定性控制. 为了分析系统的稳定性, 我们定义了 n 维对称系统的 L^2 和 H^1 范数, 并给出了与 H^1 范数等价的包含两个级联系统的 Lyapunov 函数, 证明了 n 维球对称闭环系统在 H^1 范数下指数稳定, 表明输出反馈系统在定义域中不存在无界尖峰, 闭环系统对初值连续依赖.

1 问题描述

设 $B(0, R)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 空间中以原点为心, R 为半径的 n 维

收稿日期 2014-10-24 录用日期 2015-02-27
Manuscript received October 24, 2014; accepted February 27, 2015
国家自然科学基金 (61134009, 61104154), 中央高校基本科研业务费专项资金 (2232015D3-24, 2232012D3-19) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61134009, 61104154) and Fundamental Research Funds for the Central Universities (2232015D3-24, 2232012D3-19)
本文责任编委 洪奕光
Recommended by Associate Editor HONG Yi-Guang

1. 东华大学信息科学与技术学院 上海 201620 2. 东华大学数字化纺织服装技术教育部工程研究中心 上海 201620

1. School of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 201620 2. Engineering Research Center of Digitized Textile and Fashion Technology, Ministry of Education, Donghua University, Shanghai 201620

超球. 记 $B(0,R)$ 的边界为 ∂B, 考虑在球 $\boldsymbol{x}\in B(0,R)$ 上的问题:

$$\begin{aligned}&u_t(t,\boldsymbol{x})=\varepsilon\Delta u(t,\boldsymbol{x})+\lambda u(t,\boldsymbol{x})\\&u(t,\boldsymbol{x})|_{\partial B}=U(t)\\&u(0,\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x})\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $\lambda>0$ 是一个常数. 为了理解系统 (1) 的物理含义, 可将方程 (1) 看作在 n 维球中有扩散源的扩散过程. $u(t,\boldsymbol{x})$ 表示 t 时刻, 空间位置 $\boldsymbol{x}$ 处的物质浓度. 扩散项 $\varepsilon\Delta u$ 表示空间的浓度扩散过程, ε 是扩散系数. 反应项 λu 表示扩散源的作用, 其线性依赖于当前位置和时刻的浓度 u. 由于扩散源产生的浓度积累, 即使对于光滑的初值也会出现浓度发散的现象. 因此, 在球的边界处设计控制器 U 用于抵消扩散源的作用, 稳定系统. 如果初值 u_0 和边界条件 $U(t)$ 关于球心旋转对称, 对称系统 (1) 可只考虑径向状态. 设 $r=|\boldsymbol{x}|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, 则有 $\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r}$. 令 $u(t,\boldsymbol{x})=u(t,r)$, 可得 $\Delta u(t,\boldsymbol{x})=(u_{rr}(t,r)+\frac{n-1}{r}u_r(t,r))$, 所以系统 (1) 可等价为如下的一维系统:

$$\begin{aligned}&u_t(t,r)=\varepsilon\left(u_{rr}+\frac{n-1}{r}u_r\right)+\lambda u\\&u(t,R)=U(t)\\&u(0,r)=u_0(r)\end{aligned}\tag{2}$$

其中, $(t,r)\in\mathbf{R}^+\times[0,R]$. 首先设计边界控制器 $U(t)$, 控制系统稳定到平衡点 $u(t,x)\equiv 0$.

1.1　边界控制器

为了镇定系统, 采用针对偏微分方程控制的 Backstepping 方法设计边界控制器. 根据高斯–格林公式, 我们提出了 n 维球对称的 Volterra 积分映射:

$$w(t,r)=u(t,r)-\int_0^r k(r,\rho)u(t,\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\tag{3}$$

将原系统 u 映射为目标系统 w. 其中 $k(r,\rho)$ 是定义在 $\mathcal{T}=\{(r,\rho):0\le\rho\le r\le R\}$ 上的核函数. 变换 (3) 将原系统 u 映射为目标系统 w:

$$\begin{aligned}&w_t(t,r)=\varepsilon\left(w_{rr}+\frac{n-1}{r}w_r\right)-cw\\&w(t,R)=0\end{aligned}\tag{4}$$

其中, $(t,r)\in\mathbf{R}^+\times[0,R]$, $c\ge 0$ 可用于调节系统的收敛速度. 由两个系统的等价性, 我们可推导出核函数方程:

$$k_{rr}(r,\rho)-k_{\rho\rho}(r,\rho)+\frac{n-1}{r}k_r(r,\rho)-\frac{n-1}{\rho}k_\rho(r,\rho)=\frac{\lambda+c}{\varepsilon}k(r,\rho)\tag{5}$$

其边界条件为

$$\frac{\mathrm{d}k(r,r)}{\mathrm{d}r}+(n-1)\frac{k(r,r)}{r}=-\frac{\lambda+c}{2\varepsilon r^{n-1}}\tag{6}$$

通过一系列等价变换, 类似文献 [29], 可求得:

$$k(r,\rho)=-\frac{\lambda+c}{\varepsilon\rho^{n-2}}\frac{I_1\left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)}}\tag{7}$$

进一步由 Volterra 积分映射 (3), 可得边界控制器:

$$u(t,R)=-\frac{\lambda+c}{\varepsilon}\int_0^R\frac{I_1\left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2-\rho^2)}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2-\rho^2)}}u(t,\rho)\rho\mathrm{d}\rho\tag{8}$$

1.2　观测器设计

边界控制的实现需要全状态反馈, 而在实际应用中测量所有状态量很困难, 因此, 我们设计了边界观测器, 可通过边界微分 $u_r(t,R)$ 的测量值, 估计所有的状态值. 状态观测器在与原系统保持同样的结构的基础上, 增加了测量误差项, 令 $\tilde{u}=u-\hat{u}$ 表示实际状态量与观测值之间的误差, 定义观测器为

$$\begin{aligned}&\hat{u}_t(t,r)=\varepsilon\left(\hat{u}_{rr}+\frac{n-1}{r}\hat{u}_r\right)+\lambda\hat{u}+q_1(r)\tilde{u}_r(t,R)\\&\hat{u}(t,R)=U(t)+q_0\tilde{u}_r(t,R)\end{aligned}\tag{9}$$

其中, $q_1(r)$ 和 q_0 是观测器增益, 需要用 Backstepping 方法设计. 定义观测误差系统为

$$\begin{aligned}&\tilde{u}_t(t,r)=\varepsilon\left(\tilde{u}_{rr}+\frac{n-1}{r}\tilde{u}_r\right)+\lambda\tilde{u}-q_1(r)\tilde{u}_r(t,R)\\&\tilde{u}(t,R)=q_0\tilde{u}_r(t,R)\end{aligned}\tag{10}$$

设计 $q_1(r)$ 和 q_0 使得误差系统 (10) 收敛到零, 即观测值与实际值的偏差为零.

利用 Volterra 可逆映射:

$$\tilde{u}(t,r)=\tilde{w}(t,r)-\int_r^R Q(r,\rho)\tilde{w}(t,\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\tag{11}$$

其中, $Q(r,\rho)$ 为定义在 $\mathcal{T}=\{(r,\rho):0\le\rho\le r\le R\}$ 上的核函数, 可将观测误差转化为一个稳定的误差目标系统:

$$\begin{aligned}&\tilde{w}_t(t,r)=\varepsilon\left(\tilde{w}_{rr}+\frac{n-1}{r}\tilde{w}_r\right)-c_1\tilde{w}\\&\tilde{w}(t,R)=0\end{aligned}\tag{12}$$

其中 c_1 可用于调节观测误差的收敛速度. 根据式 (11) 可知 $\tilde{u}(t,R)=\tilde{w}(t,R)$, 因此 $q_0=0$. 将式 (11) 代入观测误差系统式 (10) 的左边, 可得:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(t,r)=\tilde{w}_t-\int_r^R Q(r,\rho)\tilde{w}_t(t,\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho=\\\tilde{w}_t-\int_r^R Q(r,\rho)\left(\frac{\varepsilon}{\rho^{n-1}}\left(\rho^{n-1}\tilde{w}_r\right)_\rho-c_1\tilde{w}\right)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho=\\\frac{\varepsilon}{r^{n-1}}(r^{n-1}\tilde{w}_r)_r-c_1\tilde{w}+\varepsilon Q(r,R)R^{n-1}\tilde{w}_r(t,R)+\\\varepsilon Q(r,r)r^{n-1}\tilde{w}_r(t,r)-\varepsilon Q_\rho(r,r)r^{n-1}\tilde{w}(t,r)-\\\int_r^R\left[\varepsilon(Q_{\rho\rho}+\frac{n-1}{\rho}Q_\rho)-c_1Q\right]\tilde{w}(t,\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\end{aligned}\tag{13}$$

将式 (11) 代入目标系统 (10) 的右边, 得:

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{r^{n-1}}(r^{n-1}\tilde{u}_r)_r+\lambda\tilde{u}+q_1(r)\tilde{u}_r(t,R)=\\&\quad\frac{\varepsilon}{r^{n-1}}(r^{n-1}\tilde{w}_r)_r+(2n-2)\varepsilon r^{n-2}Q(r,r)\tilde{w}(t,r)+\\&\quad\varepsilon\frac{\mathrm{d}Q(r,r)}{\mathrm{d}r}r^{n-1}\tilde{w}(t,r)+\varepsilon Q(r,r)r^{n-1}\tilde{w}_r(t,r)+\\&\quad\varepsilon Q_r(r,r)r^{n-1}\tilde{w}(t,r)+\lambda\tilde{w}(t,r)+q_1(r)\tilde{w}_r(t,R)-\\&\quad\int_r^Q\left[\varepsilon(Q_{rr}+\frac{(n-1)Q_r}{r})+\lambda Q(r,\rho)\right]\tilde{w}(t,\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\end{aligned}\tag{14}$$

令左边项等于右边项, 并利用式 (12), 计算得到观测器核函数 $Q(r,\rho)$ 的双曲偏微分方程:

$$Q_{rr}-Q_{\rho\rho}+\frac{n-1}{r}Q_r-\frac{n-1}{\rho}Q_\rho=-\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}Q\tag{15}$$

$$r\frac{\mathrm{d}Q(r,r)}{\mathrm{d}r}+(n-1)Q(r,r)=-\frac{\lambda+c_1}{2\varepsilon r^{n-2}}\tag{16}$$

由 $\tilde{u}_r(t,R)=\tilde{w}_r(t,R)$, 可得 q_1 与观测器核函数 Q 之间的关系:

$$q_1(r)=\varepsilon Q(r,R)R^{n-1}\tag{17}$$

观测器的核函数可通过一系列的函数变换求得. 首先令 $W=Q\rho^{n-2}$, 则有:

$$W_{rr}-W_{\rho\rho}+\frac{n-1}{r}W_r+\frac{n-3}{\rho}W_\rho=-\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}W\tag{18}$$

边界条件为

$$r\frac{\mathrm{d}W(r,r)}{\mathrm{d}r}+W(r,r)=-\frac{\lambda+c_1}{2\varepsilon}\tag{19}$$

W 系统简化了边界条件. 进一步化简方程, 令 $W(r,\rho)=\Phi(x)$, $x=\sqrt{\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)}$. 则 W 的各项偏导数为

$$W_r=\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}r\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)\right)^{-\frac{1}{2}}\Phi'\tag{20}$$

$$W_\rho=-\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)\right)^{-\frac{1}{2}}\Phi'\tag{21}$$

$$\begin{aligned}W_{rr}=&\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}r^2\right)\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)\right)^{-1}\Phi''-\\&\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}\rho^2\right)\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)\right)^{-\frac{3}{2}}\Phi'\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}W_{\rho\rho}=&\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}\rho^2\right)\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)\right)^{-1}\Phi''-\\&\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}r^2\right)\left(\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)\right)^{-\frac{3}{2}}\Phi'\end{aligned}\tag{23}$$

代入式 (18), 可得:

$$\Phi''(x)+\frac{3}{x}\Phi'(x)=-\Phi(x)\tag{24}$$

由于 $\lim_{r\to\rho}\frac{\mathrm{d}W(r,r)}{\mathrm{d}r}=\lim_{r\to\rho}(W_r(r,r)+W_\rho(r,r))=0$, 所以式 (19) 等价于

$$\Phi(0)=-\frac{\lambda+c_1}{2\varepsilon}\tag{25}$$

方程 (24) 通过变换 $\Phi(x)=S(x)/x$ 可转化为一阶贝塞尔方程 (Bessel equatoin)

$$\begin{aligned}&x^2S''(x)+xS'(x)+(x^2-1)S=0\\&S(0)=0\end{aligned}\tag{26}$$

解为

$$S(x)=C_1J_1(x)+C_2Y_1(x)\tag{27}$$

返回到函数 Φ 得:

$$\Phi(x)=C_1\frac{J_1(x)}{x}+C_2\frac{Y_1(x)}{x}\tag{28}$$

$Y_1(x)$ 是第二类 Bessel 函数, 有 $\lim_{x\to0}Y_1(x)=\infty$, 所以参数 $C_2=0$. 由边界条件 (25) 和 $\lim_{x\to0}J_1(x)/x=1/2$ 可得, 参数 $C_1=-(\lambda+c_1)/\varepsilon$. 因此原方程 (15) 解的显式表达式为

$$Q(r,\rho)=-\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon\rho^{n-2}}\frac{J_1\left[\sqrt{\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-\rho^2)}}\tag{29}$$

由式 (17), 可得观测器增益

$$\begin{aligned}q_1(r)=&-(\lambda+c_1)R\frac{J_1\left[\sqrt{\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-R^2)}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(r^2-R^2)}}=\\&-(\lambda+c_1)R\frac{I_1\left[\sqrt{\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(R^2-r^2)}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c-1}{\varepsilon}(R^2-r^2)}}\end{aligned}\tag{30}$$

因此, 观测器为

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(t,r)=&\varepsilon\left(\hat{u}_{rr}+\frac{n-1}{r}\hat{u}_r\right)+\lambda\hat{u}-\\&(\lambda+c_1)R\frac{I_1\left[\sqrt{\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(R^2-r^2)}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c_1}{\varepsilon}(R^2-r^2)}}\tilde{u}_r(t,R)\end{aligned}\tag{31}$$

$$\hat{u}(t,R)=U(t)\tag{32}$$

其中, $U(t)=-\frac{\lambda+c}{\varepsilon}\int_0^R\frac{I_1\left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2-\rho^2)}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2-\rho^2)}}\hat{u}(t,\rho)\rho\mathrm{d}\rho$ 是系统的边界状态反馈控制.

观测器与原系统 (2) 形成级联系统, 通过测量边界微分量 $u_r(t,R)$ 得到所有状态的估计值 $\hat{u}(t,r)$, 将其作为状态反馈输入控制器, 有效地解决了在实际应用中难以测量系统全状态的问题.

2 输出反馈系统的 H^1 稳定性

本节考察观测器和与其级联的输出反馈系统的稳定性. 首先分析级联目标系统的稳定性, 然后证明目标系统与原系统在 H^1 范数下等价. 综合这两个结论就能得到输出反馈系统的稳定性.

由于系统定义在 n 维空间中, 所以首先定义对称系统 (1) 在 n 维球 $B(0,R)$ 上的 L^2 和 H^1 范数:

$$\|f(\boldsymbol{x})\|_{L^2(B)}=\left(\int_B|f(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^R\left(\int_{\partial B}|f(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^R n\alpha(n)|f(r)|^2r^{n-1}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}\tag{33}$$

$$\|f(\boldsymbol{x})\|_{H^1(B)}=\|f(\boldsymbol{x})\|_{L^2(B)}+\sum_{i=1}^n\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|_{L^2(B)}\tag{34}$$

其中, $n\alpha(n)r^{n-1}$ 表示 n 维球的表面积. 当函数关于球心对称, $f(\boldsymbol{x})=f(r)$ 只与 r 有关, 所以 $f(\boldsymbol{x})$ 的 L^2 范数可写为 (35). 同时函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对 x_i 的一阶导数还剩 $\frac{\partial f}{\partial r}$, 因此对称情况下, 范数定义等价于 ($n\alpha(n)r^{n-1}$ 作为系数不影响等价性)

$$\|f(r)\|_{L^2}=\left(\int_0^R|f(r)|^2r^{n-1}\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}\tag{35}$$

$$\|f(r)\|_{H^1}=\|f(r)\|_{L^2}+\|f_r(r)\|_{L^2}\tag{36}$$

通过控制核函数 (7) 和下列变换

$$\hat{w}(t,r)=\hat{u}(t,r)-\int_0^r k(r,\rho)\hat{u}(t,\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\tag{37}$$

得到观测器目标系统:

$$\begin{aligned}\hat{w}_t=&\frac{\varepsilon}{r^{n-1}}(r^{n-1}\hat{w}_r)_r-c\hat{w}+q_1(r)\tilde{w}_r(t,R)-\\&\int_0^r k(r,\rho)q_1(\rho)\tilde{w}_r(t,R)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\\\hat{w}(t,R)=&\,0\end{aligned}\tag{38}$$

上述系统 (38) 包含 $\tilde{w}(t,R)$, 因此与式 (12) 相关, 因此分析稳定性时, 需要同时考虑这两个目标系统构成的级联系统.

为了证明目标系统的稳定性, 首先证明如下引理.

引理 1. 在 $n\geq 2$ 维球 $B(0,R)$ 上定义的对称系统 (12) 满足下列不等式:

$$|w_r(t,R)|^2\leq\frac{2}{R^{n-2}}\left\|\frac{\left(w_rr^{n-1}\right)_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2\tag{39}$$

证明. 因为

$$\begin{aligned}\int_0^R\frac{2(n-1)}{r}w_{rr}w_rr^{n-1}\mathrm{d}r=&\\-2(n-1)(n-2)\int_0^R w_r^2r^{n-3}\mathrm{d}r-&\\\int_0^R\frac{2(n-1)}{r}w_{rr}w_rr^{n-1}\mathrm{d}r+|w_r(t,R)|^2r^{n-2}|_0^R&\end{aligned}\tag{40}$$

并且, 由系统对称, 得到 $w_r(t,0)=0$, 所以

$$\begin{aligned}|w_r(t,R)|^2R^{n-2}=&\int_0^R\frac{4(n-1)}{r}w_{rr}w_rr^{n-1}\mathrm{d}r+\\&2(n-1)(n-2)\int_0^R w_r^2r^{n-3}\mathrm{d}r\end{aligned}\tag{41}$$

又因为

$$\int_0^R\left(w_{rr}-\frac{n-1}{r}w_r\right)^2r^{n-1}\mathrm{d}r=\left\|\frac{\left(w_rr^{n-1}\right)_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2\tag{42}$$

所以式 (42) 左边平方的交叉项为

$$\begin{aligned}\int_0^R\frac{2(n-1)}{r}w_{rr}w_rr^{n-1}\mathrm{d}r=&\\\left\|\frac{\left(w_rr^{n-1}\right)_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2-\|w_{rr}\|_{L^2}^2-(n-1)^2\left\|\frac{w_r}{r}\right\|_{L^2}^2&\end{aligned}\tag{43}$$

因此, 式 (41) 可写为

$$\begin{aligned}|w_r(t,R)|^2=&\frac{2}{R^{n-2}}\left\|\frac{\left(w_rr^{n-1}\right)_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2-\frac{2}{R^{n-2}}\|w_{rr}\|_{L^2}^2-\\&\frac{2(n-1)}{R^{n-2}}\|\frac{w_r}{r}\|_{L^2}^2\leq\\&\frac{2}{R^{n-2}}\|\frac{\left(w_rr^{n-1}\right)_r}{r^{n-1}}\|_{L^2}^2\end{aligned}\tag{44}$$

□

定理 1. 如果初始值 $\hat{w}_0(r)$, $\tilde{w}_0(r)\in H^1$ 且满足相容条件 $\hat{w}_0(R)$, $\tilde{w}_0(R)=0$, 则存在 D, α, 使得级联系统 $\hat{w}(t,r),\tilde{w}(t,r)$ 和在 H^1 范数下指数稳定, 即

$$\|\hat{w}\|_{H^1}+\|\tilde{w}\|_{H^1}\leq D\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\|\hat{w}\|_{H^1}+\|\tilde{w}\|_{H^1}\right)\tag{45}$$

证明. 运用 Hille-Yoida 定理, 可得 $\hat{w}(t,r)$ 与 $\tilde{w}(t,r)$ 系统解的存在性与正则性[30]. 进一步研究系统的稳定性. 由于观测器目标函数 $\hat{w}(t,r)$ 中存在 $\tilde{w}(t,R)$, 因此需要 $\tilde{w}$ 的 H^1 范数来证明 $\hat{w}$ 的 L^2 稳定性. 所以直接分析系统的 H^1 稳定性, 定义与 H^1 范数等价的 Lypunov 函数

$$V=\frac{1}{2}\|\hat{w}\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\tilde{w}\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\hat{w}_r\|_{L^2}^2+\frac{A}{2}\|\tilde{w}_r\|_{L^2}^2\tag{46}$$

求 V 对时间的导数, 得:

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\int_0^R\hat{w}_t\hat{w}r^{n-1}\mathrm{d}r+\int_0^R\tilde{w}_t\tilde{w}r^{n-1}\mathrm{d}r+\\&\int_0^R\hat{w}_{rt}\hat{w}_rr^{n-1}\mathrm{d}r+A\int_0^R\tilde{w}_{rt}\tilde{w}_rr^{n-1}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

将式 (12) 和 (38) 代入, 并进行分步积分, 整理得:

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\int_0^R\hat{w}(r^{n-1}\hat{w}_r)_r\mathrm{d}r+\int_0^R\tilde{w}(r^{n-1}\tilde{w}_r)_r\mathrm{d}r-c\|\hat{w}\|_{L^2}^2-\\&c_1\|\tilde{w}\|_{L^2}^2-\int_0^R\hat{w}_t(r^{n-1}\hat{w}_r)_r\mathrm{d}r-A\int_0^R\tilde{w}_t(r^{n-1}\tilde{w}_r)_r\mathrm{d}r+\\&\int_0^R\hat{w}(t,r)q_1(r)\tilde{w}_r(t,R)r^{n-1}\mathrm{d}r-\\&\int_0^R\hat{w}(t,r)\int_0^r k(r,\rho)q_1(\rho)\tilde{w}(t,R)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho r^{n-1}\mathrm{d}r\end{aligned}\tag{47}$$

继续整理, 并进一步分步积分可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}=&-\varepsilon\int_0^R|\hat{w}_r|^2r^{n-1}\mathrm{d}r-\varepsilon\int_0^R|\tilde{w}_r|^2r^{n-1}\mathrm{d}r-\\&c\|\hat{w}\|_{L^2}^2-c_1\|\tilde{w}\|_{L^2}^2-\varepsilon\|\frac{\left(\hat{w}_rr^{n-1}\right)_r}{r^{n-1}}\|_{L^2}^2-c\|\hat{w}_r\|_{L^2}^2-\\&A\varepsilon\|\frac{\left(\tilde{w}_rr^{n-1}\right)_r}{r^{n-1}}\|_{L^2}^2-Ac\|\tilde{w}_r\|_{L^2}^2+\end{aligned}$$

$$\int_0^R \left(\hat{w}(t,r)r^{n-1} - \left(\hat{w}_r r^{n-1}\right)_r\right) q_1(r)\tilde{w}_r(t,R)\mathrm{d}r - \int_0^R \hat{w}(t,r)\int_0^r k(r,\rho)q_1(\rho)\tilde{w}(t,R)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho r^{n-1}\mathrm{d}r + \int_0^R \left(\hat{w}_r r^{n-1}\right)_r \int_0^r k(r,\rho)q_1(\rho)\tilde{w}(t,R)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}r \quad (48)$$

由于

$$q_1(r) - \int_0^r k(r,\rho)q_1(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho \in \mathcal{C}^2(\mathcal{T}) \quad (49)$$

所以存在正实数 M_1 使得:

$$|q_1(r) - \int_0^r k(r,\rho)q_1(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho| \le M_1 \quad (50)$$

因此, V 的后三行小于等于

$$M_1|\tilde{w}_r(t,R)|\left|\int_0^R \left(\hat{w}(t,r)r^{n-1} - \left(\hat{w}_r r^{n-1}\right)_r\right)\mathrm{d}r\right| \le \frac{M_1^2}{2\gamma_1}R^n|\tilde{w}_r(t,R)|^2 + \frac{\gamma_1}{2n}\left(\|\hat{w}\|_{L^2}^2 + \|\frac{(\hat{w}_r r^{n-1})_r}{r^{n-1}}\|_{L^2}^2\right) \quad (51)$$

上面推导运用 Cauthy-Schwarz, Young 不等式. 运用引理 1, 式 (51) 小于等于

$$\frac{M_1^2R^2}{\gamma_1}\left\|\frac{(\tilde{w}_r r^{n-1})_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_1}{2n}\left(\|\hat{w}\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{(\hat{w}_r r^{n-1})_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2\right) \quad (52)$$

因而 V 的导数可写为

$$\dot{V} \le -(\varepsilon + c)\|\hat{w}_r\|_{L^2}^2 - (\varepsilon + Ac_1)\|\tilde{w}_r\|_{L^2}^2 - (c - \frac{\gamma_1}{2n})\|\hat{w}\|_{L^2}^2 - c_1\|\tilde{w}\|_{L^2}^2 - (\varepsilon - \frac{\gamma_1}{2n})\left\|\frac{(\hat{w}_r r^{n-1})_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2 - \quad (53)$$

$$\left(A\varepsilon - \frac{M_1^2R^2}{\gamma_1}\right)\left\|\frac{(\tilde{w}_r r^{n-1})_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2 \quad (54)$$

根据极坐标下的 Poincare 不等式

$$\|w\|_{L^2}^2 \le 4R^2\|w_r\|_{L^2}^2 \quad (55)$$

得到

$$\dot{V} \le -\left(c_1 + \frac{\varepsilon+c}{8R^2} - \frac{\gamma_1}{2n}\right)\|\hat{w}\|_{L^2}^2 - \left(c_1 + \frac{\varepsilon + Ac_1}{2}\right)\|\tilde{w}\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon+c}{2}\|\hat{w}_r\|_{L^2}^2 - \left(\varepsilon - \frac{\gamma_1}{2n}\right)\left\|\frac{(\hat{w}_r r^{n-1})_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon + Ac_1}{2}\|\tilde{w}_r\|_{L^2}^2 - \left(A\varepsilon - \frac{M_1^2R^2}{\gamma_1}\right)\left\|\frac{(\tilde{w}_r r^{n-1})_r}{r^{n-1}}\right\|_{L^2}^2 \quad (56)$$

令 $\gamma_1 = \min n(8R^2c_1 + \varepsilon + c)/16R^2, n\varepsilon/2\}$, $A > \frac{M_1^2R^2}{\varepsilon\gamma_1}$, 存在 $\alpha > 0$ 使得 $\dot{V} \le -\alpha V$. 由于 V 与范数 H^1 等价, 因此级联的系统 $\hat{w}$ 和 $\tilde{w}$ 在 H^1 范数下指数稳定. □

定理 2. 如果函数 $g(r)$ 定义为函数 $f(r)$ 的 Volterra 变换

$$g(r) = f(r) + \int_0^r F(r,\rho)f(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho \quad (57)$$

其中, $F(r,\rho) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{T})$, $\mathcal{T} = \{(r,\rho) : 0 \le \rho \le r \le R\}$, 则:

$$\|g(r)\|_{L^2} \le B_1\|f(r)\|_{L^2} \quad (58)$$

$$\|g(r)\|_{H^1} \le B_2\|f(r)\|_{H^1} \quad (59)$$

证明. 因为 $F(r,\rho) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{T})$, 则有 $\forall(r,\rho) \in \mathcal{C}$, 使得 $|F(r,\rho)| \le M$ 且 $|F_r(r,\rho)| \le M_r$. 根据 Hölder 不等式, 有:

$$\|g(r)\|_{L^2} \le \|f(r)\|_{L^2} + \left\|\int_0^r F(r,\rho)f(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\right\|_{L^2} = \|f(r)\|_{L^2} + \left[\int_0^R\left|\int_0^r F(r,\rho)f(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\right|^2 r^{n-1}\mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{2}} = \|f(r)\|_{L^2} + \left[\int_0^R M^2\left(\int_0^R \rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\right)\|f(r)\|_{L^2}^2 r^{n-1}\mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{2}} \le \|f(r)\|_{L^2} + \frac{MR^n}{n}\|f(r)\|_{L^2} = \left(1 + \frac{MR^n}{n}\right)\|f(r)\|_{L^2} \quad (60)$$

又令 $B_1 = 1 + MR^n/n$, 即证明了第一个不等式 (58).

$$\|g(r)\|_{H^1} = \|g(r)\|_{L^2} + \|g_r(r)\|_{L^2} \le B_1\|f(r)\|_{L^2} + \|f_r(r)\|_{L^2} + MR^{n-1}\|f(r)\|_{L^2} + \left[\int_0^R\left|\int_0^r F_r(r,\rho)f(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\right|^2 r^{n-1}\mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{2}} \le B_1\|f(r)\|_{L^2} + \|f_r(r)\|_{L^2} + MR^{n-1}\|f(r)\|_{L^2} + \frac{M_rR^n}{n}\|f(r)\|_{L^2} = \left(B_1 + MR^{n-1} + \frac{M_rR^n}{n}\right)\|f(r)\|_{L^2} + \|f_r(r)\|_{L^2} \quad (61)$$

令 $B_2 = \max\{B_1 + RM + \frac{M_rR^n}{\sqrt{2n}}, 1\}$, 即证明了第二个不等式 (59). □

定理 2 表明函数 g 和 f 的 L^2 与 H^1 范数等价. 由于变换 (11) 和 (37) 均可逆, 且正、逆变换的核函数均定义在 $\mathcal{C}^2(\mathcal{T})$ 上, 所以运用定理 2 和定理 1, 可得:

定理 3. 系统 (2), 观测器 (31) 在边界控制器 (32) 的作用下指数稳定, 即当初始条件 $u_0(r), \hat{u}_0(r) \in H^1$ 且满足相容条件

$$u_0(R) = \int_0^R \frac{\lambda + c}{\varepsilon}\frac{I_1\left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2 - \rho^2)}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2 - \rho^2)}}u_0(\rho)\rho\mathrm{d}\rho \quad (62)$$

且 $u_0(R) = \hat{u}_0(R)$, 则有 $u, \hat{u} \in \mathcal{C}\left([0,\infty), H^1\right)$ 且存在 $D_2, \alpha > 0$, 使得:

$$\|u(t,r)\|_{H^1} \le D_2\mathrm{e}^{-\alpha t}\|u_0(r)\|_{H^1} \quad (63)$$

3　数值仿真

为了检验控制器的性能, 采用有限差分方法进行系统仿真. 当系统维数取不同的值时, 沿轴向 r 的取值也不同[31]. 具体为

$$\begin{aligned}
&r_i=\frac{2i-1}{2}h_r,\quad h_r=\frac{2R}{2N-1},\quad n=2\\
&r_i=ih_r,\quad h_r=\frac{R}{N},\quad n=3\\
&r_i=\frac{2i+1}{2}h_r,\quad h_r=\frac{2R}{2N+1},\quad n=4\\
&r_i=(i+1)h_r,\quad h_r=\frac{R}{N+1},\quad n=5\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}\tag{64}$$

其中, N 表示系统沿轴向 r 取 N 个点, h_r 表示轴向步长, r_i 表示第 i 个点的值, $i=1,\cdots,N$. 这样取值满足步长 $h_r=2r_1/(n-1)$, 可简化 u_1, 消去了 u_1 离散化表达式中的内点 u_0.

沿系统轴向采用三点中心离散化方程 (2), 截断误差为 $O(h_r^2)$,

$$\dot{u}_i=\varepsilon\frac{(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})}{h_r^2}+\varepsilon\frac{(n-1)(u_{i+1}-u_{i-1})}{2r_ih_r}+\lambda u_i\tag{65}$$

采用式 (64) 的步长取值, 则可以消去 u_0 前面的系数, u_1 写为

$$\dot{u}_1=\frac{2(u_2-u_1)}{h_r^2}+\lambda u_1\tag{66}$$

时间方向采用 Crank-Nicolson 方法, 其截断误差为 $O(\Delta t^2)$. 方程的离散化表达式为

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{t+1}-u_i^t}{\Delta t}=&\varepsilon\frac{(u_{i+1}^{t+1}-2u_i^{t+1}+u_{i-1}^{t+1}+u_{i+1}^t-2u_i^t+u_{i-1}^t)}{2h_r^2}+\\
&\varepsilon\frac{(n-1)(u_{i+1}^{t+1}-u_{i-1}^{t+1}+u_{i+1}^t-u_{i-1}^t)}{4r_ih_r}+\\
&\frac{\lambda(u_i^{t+1}+u_i^t)}{2}
\end{aligned}\tag{67}$$

进一步整理为

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon\left(\frac{\Delta t}{2h_r^2}+\frac{(n-1)\Delta t}{4r_ih_r}\right)u_{i+1}^{t+1}+\left(1+\frac{\varepsilon\Delta t}{h_r^2}-\frac{\lambda\Delta t}{2}\right)u_i^{t+1}+\\
&\varepsilon\left(-\frac{\Delta t}{2h_r^2}+\frac{(n-1)\Delta t}{4r_ih_r}\right)u_{i-1}^{t+1}=\\
&\varepsilon\left(\frac{\Delta t}{2h_r^2}+\frac{(n-1)\Delta t}{4r_ih_r}\right)u_{i+1}^{t}+\left(1-\frac{\varepsilon\Delta t}{h_r^2}+\frac{\lambda\Delta t}{2}\right)u_i^{t}+\\
&\varepsilon\left(\frac{\Delta t}{2h_r^2}-\frac{(n-1)\Delta t}{4r_ih_r}\right)u_{i-1}^{t}
\end{aligned}\tag{68}$$

观测器 (31) 的有限差分表达式与控制器类似, 只增加了边界误差项 $\tilde{u}_r(t,R)$. 采用三点边界差分可以减小误差.

$$\tilde{u}_r(t,R)=\frac{3\tilde{u}_N-4\tilde{u}_{N-1}+\tilde{u}_{N-2}}{2h_r}\tag{69}$$

Dirichlet 边界控制器 (32) 采用 Simpson 法则进行数值积分.

$$u_N=\sum_{m=1}^{N}a_mk_m\hat{u}_m\tag{70}$$

其中, $k_m=-\frac{\lambda+c}{\varepsilon}r_m\frac{I_1\left[\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2-r_m^2)}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda+c}{\varepsilon}(R^2-r_m^2)}}$. 根据 Simpson 积分法则, N 为奇数, 参数 a_m 取值为

$$\begin{aligned}
&a_m=\frac{h_r}{3},\quad m=\{1,N\}\\
&a_m=\frac{4h_r}{3},\quad m=\{2,4,\cdots,N-1\}\\
&a_m=\frac{2h_r}{3},\quad m=\{3,5,\cdots,N-2\}
\end{aligned}$$

按照同样的方法可离散化观测器. 观测器估计的状态作为控制器的边界输入, 同时实际系统 u 的边界测量值作为观测器的输入, 实际系统与级联的观测器同时运行, 控制观测器的状态值趋近于实际系统, 同时实际系统逐渐稳定于平衡状态. 设置初始状态变量的值为均匀分布随机数 (标准差为 10), 观测器与实际状态值的初始偏差服从均值为 0、方差为 0.05 的正态分布, 并满足相容条件. 仿真参数设定为球半径 $R=1$, 控制参数 $c=1,c_1=1$, 系统的反应项参数 $\lambda=30$, 扩散系数 $\varepsilon=1$. 沿轴向 r 进行 100 等分, 共 $N=101$ 个端点, 时间步长为 $\Delta t=0.005\,\mathrm{s}$. 系统开环不稳定 (如图 1), 因此在边界施加观测器和控制器, 得到系统输出反馈控制的结果, 如图 2～5 所示.

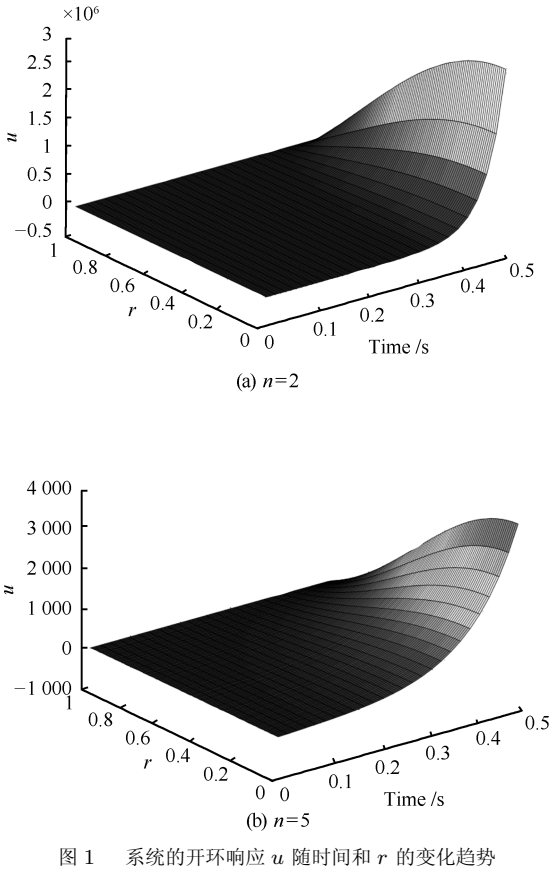
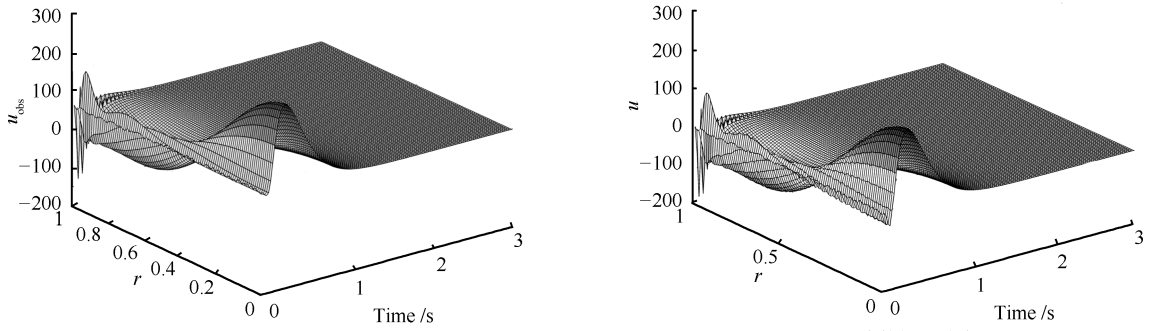


图 1　系统的开环响应 u 随时间和 r 的变化趋势

Fig. 1　The open-loop response u versus time and r

由图 2 和 4 可知, 系统的状态值和观测值均快速收敛到平衡态. 系统的观测误差随时间减小, 在 1 s 左右, 趋近于零. 系统状态的均值出现震荡, 并且随着维数的增加, 震荡加剧.

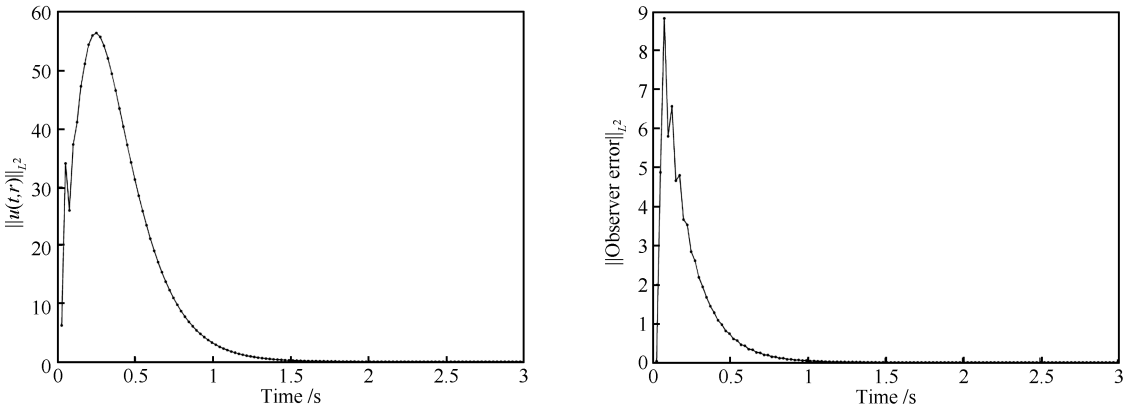


(a) 状态量的闭环响应 (a) The state of the closed-loop response

(b) 观测值的闭环响应 (b) The observed state of the closed-loop response

图 2 当 $n = 2$ 时, 系统的闭环响应随时间和 r 的变化

Fig. 2 The close-loop response versus time and r as $n = 2$

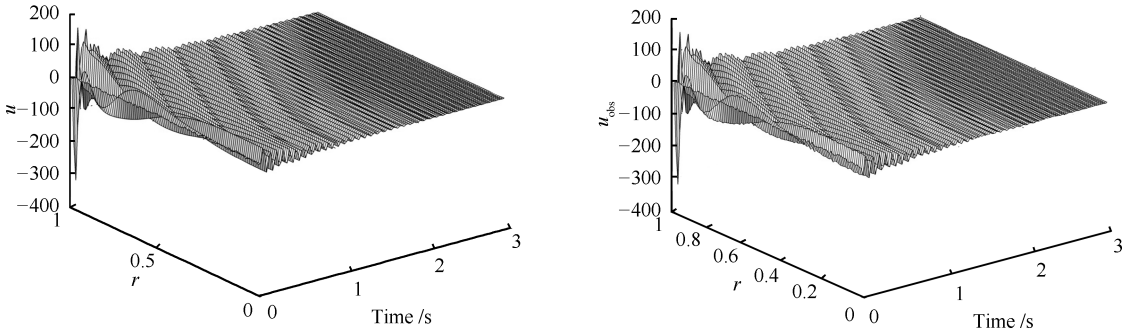


(a) 系统状态量的平均值随时间的变化 (a) The average state versus time

(b) 系统观测误差随时间的变化 (b) The observer error versus time

图 3 当 $n = 2$ 时, 系统状态量的平均值和观测器误差随时间的变化趋势

Fig. 3 As $n = 2$, the varying trends of the average state and the observer error with times as $n = 2$



(a) 状态量的闭环响应 (a) The state of the closed-loop response

(b) 观测值的闭环响应 (b) The observed state of the closed-loop response

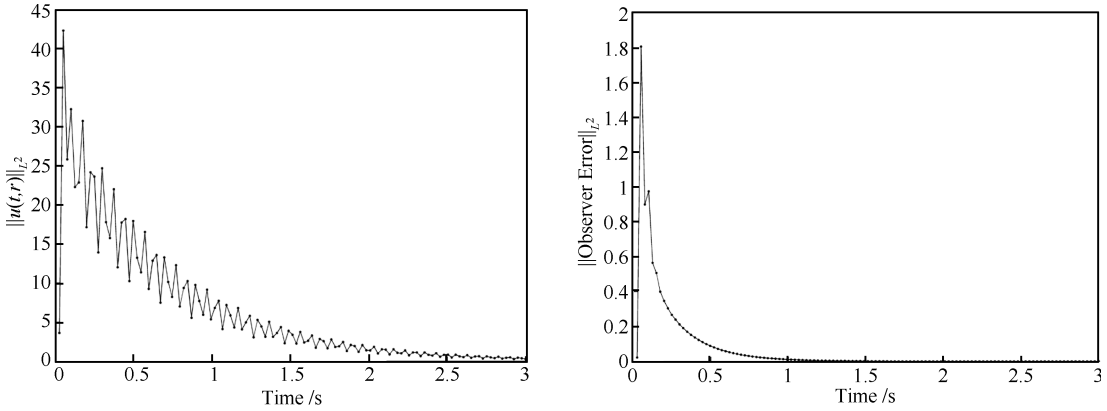
图 4 当 $n = 5$ 时, 系统的闭环响应随时间和 r 的变化

Fig. 4 The close-loop response versus time and r as $n = 5$

同时, 我们作出了两个时刻 ($t = 1\,\mathrm{s}$ 和 $t = 3\,\mathrm{s}$), 2-D 系统在圆盘上的状态值, 分别表示系统的初期暂态和末期的渐近态. 由图 6 可知, 对称系统的状态在圆盘上分布不均匀, 靠近圆心的值较大, 圆心处出现峰值, 随着的半径增加, 状态值具有先减小后增加的趋势. 由于边界控制的作用, 在边界附近较接近于零.

4 结论

本文研究了 n 维球上具有球对称初始数据的反应扩散方程, 为其设计了边界状态观测器, 应用观测器估计的状态值实施边界输出反馈控制, 使系统指数收敛于系统的平衡态. 通常用连续 Backstepping 方法设计高维控制器, 都是将高维

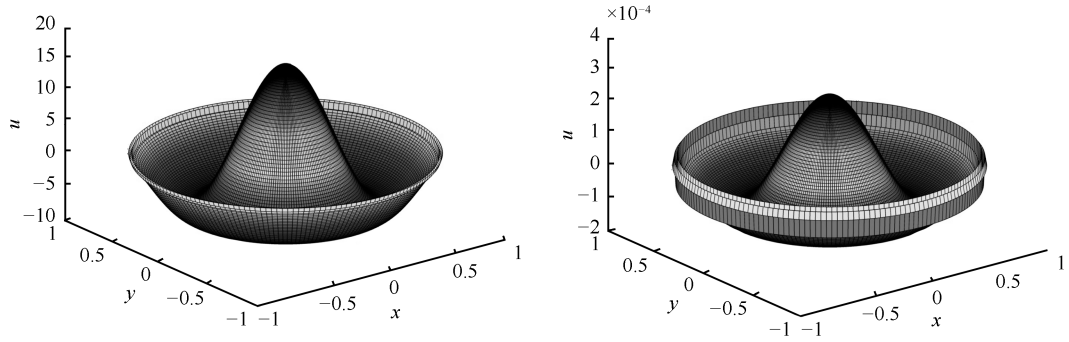


(a) 系统状态量的平均值随时间的变化
(a) The average state versus time

(b) 系统观测误差随时间的变化
(b) The observer error versus time

图 5　当 $n = 5$ 时, 系统状态量的平均值和观测器误差随时间的变化趋势

Fig. 5　As $n = 5$, the varying trends of the average state and the observer error with time as $n = 5$



(a) 当 $t = 1$ s, 2 维系统在圆盘上的状态
(a) The states of the 2-D system in the disk as $t = 1$ s

(b) 当 $t = 3$ s, 2 维系统在圆盘上的状态
(b) The states of the 2-D system in the disk as $t = 3$ s

图 6　圆盘上 2 维系统状态变化的快照

Fig. 6　The snapshots of the 2-D system in disk

进行降维处理, 因此我们也将高维的球对称系统转化为一维系统, 一维系统保持了高维系统沿半径方向的状态特征.

根据在 n 维球上系统的极坐标积分元, 本文提出了与之对应的 Volterra 映射形式, 因而可得一维径向系统的控制器和观测器的显示表达. 在证明系统稳定性时, 我们定义了 n 维球对称系统的范数, 证明了 n 维对称系统在 H^1 范数下指数稳定. 本文的研究结果可扩展到具有对流项的更一般形式.

References

1 Padhi R, Ali S F. An account of chronological developments in control of distributed parameter systems. *Annual Reviews in Control*, 2009, **33**(1): 59−68

2 Erturk A, Inman D J. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2008, **130**(4): 041002

3 Butkovskii A G. The maximum principle for optimum systems with distributed parameters. *Automation and Remote Control*, 1961, **22**(10): 1156−1169

4 Triggiani R. Boundary feedback stabilizability of parabolic equations. *Applied Mathematics and Optimization*, 1980, **6**(1): 201−220

5 Fard M P, Sagatun S I. Exponential stabilization of a transversely vibrating beam via boundary control. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **240**(4): 613−622

6 Li Jian, Liu Yun-Gang. Adaptive boundary control for a class of uncertain heat equations. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 469−473
(李健, 刘允刚. 一类不确定热方程自适应边界控制. 自动化学报, 2012, **38**(3): 469−473)

7 Guo B Z, Kang W. The Lyapunov approach to boundary stabilization of an anti-stable one-dimensional wave equation with boundary disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, **24**(1): 54−69

8 Rebarber R. Conditions for the equivalence of internal and external stability for distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, **38**(6): 994−998

9 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. Degenerate semi-group methods for the exponential stability of the first order singular distributed parameter systems. *Journal of Systems Science & Complexity*, 2008, **21**(2): 260−266

10 Cheng M B, Radisavljevic V, Su W C. Sliding mode boundary control of a parabolic PDE system with parameter varia-

tions and boundary uncertainties. *Automatica*, 2011, **47**(2): 381−387

11 Guo B Z, Liu J J. Sliding mode control and active disturbance rejection control to the stabilization of one-dimensional schrödinger equation subject to boundary control matched disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, **24**(16): 2194−2212

12 Guo B Z, Jin F F. Output feedback stabilization for one-dimensional wave equation subject to boundary disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(3): 824−830

13 Li Shao-Yuan. *Model Predictive Control for Global Operating Condition System and Its Implementation*. Beijing: Science Press, 2008.
(李少远. 全局工况系统预测控制及其应用. 北京: 科学出版社, 2008.)

14 Dubljevic S, El-Farra N H, Mhaskar P, Christofides P D. Predictive control of parabolic PDEs with state and control constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, **16**(16): 749−772

15 Luo Yi-Ping, Xia Wen-Hua, Liu Guo-Rong, Deng Fei-Qi. LMI approach to exponential stabilization of distributed parameter control systems with delay. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(3): 299−304
(罗毅平, 夏文华, 刘国荣, 邓飞其. 时滞分布参数控制系统指数镇定的 LMI 方法. 自动化学报, 2009, **35**(3): 299−304)

16 Krstic M. Systematization of approaches to adaptive boundary stabilization of PDEs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, **16**(16): 801−818

17 Vazquez R, Krstic M. Boundary observer for output-feedback stabilization of thermaluid convection loop. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, **18**(4): 789−797

18 Li Xiao-Guang, Liu Jin-Kun. Continuum backstepping control algorithms in partial differential equation orientation: a review. *Control Theory & Applications*, 2012, **29**(7): 825−832
(李晓光, 刘金琨. 面向偏微分方程的连续反演控制算法综述. 控制理论与应用, 2012, **29**(7): 825−832)

19 Smyshev A, Krstic M. Closed-form boundary state feedbacks for a class of 1-D partial integro–differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(12): 2185−2202

20 Krstic M, Smyshev A. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. Philadelphia: SIAM, 2008.

21 Qi J, Vazquez R, Krstic M. Multi-agent deployment in 3-D via PDE control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(4): 891−906

22 Vazquez R, Krstic M. Control of 1-D parabolic PDEs with Volterra nonlinearities — Part I: Design. *Automatica*, 2008, **44**(11): 2778−2790

23 Xu C, Schuster E, Vazquez E, Krstic M. Stabilization of linearized 2D magnetohydrodynamic channel flow by backstepping boundary control. *Systems & Control Letters*, 2008, **57**(10): 805−812

24 Vazquez R, Schuster E, Krstic M. A Closed-Form Full-State feedback controller for stabilization of 3D magnetohydrodynamic channel flow. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2009 **131**: 041001

25 Vazquez R, Krstic M. Boundary observer for output-feedback stabilization of thermal-fluid convection loop. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, **18**(4): 789−797

26 Bai Y, Xie C. Temperature control of reaction-diffusion process in ball. In: Proceedings of the 23rd Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Mianyang, China, 2011. 2291−2295

27 Vazquez R, Krstic M. Explicit boundary control of a reaction-diffusion equation on a disk. In: Proceedings of the 19th World Congress The International Federation of Automatic Control. Cape Town, South Africa: IFAC, 2014. 1562−1567

28 Tang K T. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists*. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 142−186

29 Qi Jie, Qi Jin-Peng. Boundary stabilization for a 2-D reaction-diffusion equation with symmetrical initial data. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 209−214
(齐洁, 齐金鹏. 具有对称初始数据的二维反应扩散方程的边界镇定. 自动化学报, 2015, **41**(1): 209−214)

30 Brezis H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2011. 326−328

31 Lai M C. A note on finite difference discretizations for Poisson equation on a disk. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2001, **17**(3): 199−203

齐 洁 博士, 东华大学信息科学与技术学院副教授. 主要研究方向为分布式参数系统控制, 多智能体协同控制与优化. 本文通信作者.
E-mail: jieqi@dhu.edu.cn
(**QI Jie** Ph. D., associate professor at the School of Information Science and Technology, Donghua University. Her research interest covers distributed parameter system control, and multi-agent system cooperated control and optimization. Corresponding author of this paper.)

王 川 东华大学信息科学与技术学院硕士研究生. 主要研究方向为偏微分方程边界控制, 多智能体系统协同控制.
E-mail: 785407617@qq.com
(**WANG Chuan** Master student at the College of Information Science and Technology, Donghua University. His research interest cover boundary control of partial differential equations, and multi-agent system cooperated control and optimization.)

潘 峰 博士, 东华大学信息科学与技术学院讲师. 主要研究方向为系统分析与建模, 算法复杂度研究, 嵌入式系统.
E-mail: fpan@dhu.edu.cn
(**PAN Feng** Ph. D., lecturer at the College of Information Science and Technology, Donghua University. His research interest covers systematic analysis and modelling, computational complexity, and embedded systems.)