离散线性一致性算法噪声问题研究

窦全胜 [1, 2, 3] 丛 玲 [1, 2] 姜 平 [1, 2] 史忠植 [3]

摘 要 多智能体一致性问题在传感网、社交网、协同控制等诸多领域有着广泛的实际应用背景, 本文对离散线性一致性算法的噪声问题进行了研究, 证明了离散线性一致性算法的噪声不可控性; 提出基于抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 的噪声控制策略, 指出当 $\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 的高阶无穷小时, 抑噪后的一致性算法噪声可控; 分析了抑噪算子对一致性算法收敛性的影响, 证明了在无噪声条件下, 当抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 的低阶无穷小时, 抑噪后的一致性算法依然可以使 Agent 收敛至原收敛状态 x^*. 在上述结论基础上进一步指出, 当 $t \to \infty$ 时, 若抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 的阶在 $t^{-0.5} \sim t^{-1}$ 之间, 所有 Agent 的状态将以原收敛状态 x^* 为中心呈正态分布. 最后, 以 DHA 为例对相应理论结果进行了验证和讨论. 本文为线性一致性算法的噪声控制提供了理论依据, 对抑噪算子的确定有较强的指导意义.

关键词 集群智能, 多智能体系统, 一致性算法, 噪声

引用格式 窦全胜, 丛玲, 姜平, 史忠植. 离散线性一致性算法噪声问题研究. 自动化学报, 2015, **41**(7): 1328−1340

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140698

Research on Discrete Linear Consensus Algorithm with Noises

DOU Quan-Sheng[1, 2, 3] CONG Ling[1, 2] JIANG Ping[1, 2] SHI Zhong-Zhi[3]

Abstract Consensus problem in multi-agent system has a wide application background in many fields, such as sensor networks, social networks, cooperative control and so on. In this paper, we address the problem of the discrete linear consensus algorithm with noise, and point out that the noise of discrete linear consistency algorithm is not controllable. Aiming at this problem, we propose a strategy using noise suppression operator $\varepsilon(t)$ to control noise, and point out that when $\varepsilon(t)$ is the higher-order infinitesimal of $t^{-0.5}$, the noise of consistency algorithm after noise suppression is controllable. We analyze the effect of suppression operator on the convergence of consistency algorithm and prove that under the condition of no noise and if the suppression operator $\varepsilon(t)$ is a lower-order infinitesimal of t^{-1}, the consistency algorithm after noise suppression can still converge to the original convergence state x^*. Based on this, we further point out that if the order of $\varepsilon(t)$ is between the orders of $t^{-0.5}$ and t^{-1} when $t \to \infty$, the states of all the agents will be a normal distribution with its center at the original convergence state x^* in the end. And, by using DHA as an example, we verify and discuss the corresponding theoretical results. This paper provides a theoretical foundation for noise control of linear consensus algorithm, and has a strong directional effect on the determination of noise suppression operator.

Key words Collective intelligence, multi-agents system, consensus algorithms, noises

Citation Dou Quan-Sheng, Cong Ling, Jiang Ping, Shi Zhong-Zhi. Research on discrete linear consensus algorithm with noises. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(7): 1328−1340

多智能体 (Multi-agent) 一致性 (Consensus) 问题是指在多智能体系统 (Multi-agents system, MAS) 中, 智能体通过与相邻智能体的信息交换来修订自身状态, 最终达成所有智能体状态上的趋同. 该问题在传感网、社交网、协同控制等诸多领域有着广泛的应用背景, 已成为集群智能及分布式控制研究的热点领域之一. 关于多智能体一致性问题的研究可以追溯到上个世纪, 早期的工作主要包括: Reynolds[1] 对自然界中鸟群、鱼群等生物群体行为进行了系统研究, 并利用计算机加以仿真, 提出了著名的 Boid 模型, 这个模型在集群智能领域至今仍有广泛影响; 文献 [2] 提出了基于统计力学理论的 Vicsek 模型, 在 Vicsek 模型中, 分布在二维平面上的 N 个智能体运动速率保持不变, 并根据其邻域内所有智能体的运动方向决定其自身运动方向, 该模型比较真实地模拟了自然界中的一些群集同步现象,

收稿日期 2014-10-09 录用日期 2015-02-02
Manuscript received October 9, 2014; accepted February 2, 2015
图家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2013CB329502), 国家自然科学基金 (61272244, 611750532, 61173173, 61035003, 61202212) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB329502) and National Natural Science Foundation of China (61272244, 611750532, 61173173, 61035003, 61202212)
本文责任编委 吕金虎
Recommended by Associate Editor LV Jin-Hu
1. 山东工商学院计算机与技术学院 烟台 264005 2. 山东省高校智能信息处理重点实验室 (山东工商学院) 烟台 264005 3. 中国科学院计算技术研究所 北京 100190
1. School of Computer Science and Technology, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005 2. Key Laboratory of Intelligent Information Processing in Universities of Shandong, Yantai 264005 3. Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190

从本质上说 Vicsek 模型是 Boid 模型的一个特例; Jadbabaie 等[3] 利用代数图论对 Vicsek 模型进行了理论解释, 并对几个与 Vicsek 模型类似的模型的收敛性进行了理论分析; Benediktsson 等在文献 [4] 中率先将一致性理论应用于传感网, 开启了系统控制领域一致性问题的研究; Moreau 研究了时变的拓扑结构的多智能体系统, 探讨了智能体间的信息交互频率与其收敛性之间的关系[5]. 随着研究的深入和应用范围的不断拓展, 越来越多新的研究不断涌现, 在理论和应用两个层面不断推动这一领域向前发展. Li 等针对多智能体一致性和复杂网络的同步等问题进行了较为深入的探讨, 提出基于高阶线性系统的多智能体控制构架, 并取得一系列卓有成效的成果[6−10]; 文献 [10] 等对线性一致性算法中的信号延迟问题进行了研究, 提出了强一致 (Strong consensus) 和均方一致性 (Mean square consensus) 的概念, 在固定拓扑结构及 Agent 间信息交互存在噪声和时滞的条件下, 从理论上给出 Non-leader-follower 和 Leader-follower 两种模式下, 强一致和均方一致的充分必要条件; Olfati-Saber 等针对线性一致性问题, 以图理论和动力学理论为基础, 建立了一个相对完整的理论框架, 在此构建的基础上对不同类型的一致性问题进行了系统的分析[11−14]; 在 Olfati-Saber 的研究基础上, Yu 等[15−17] 讨论了当 Agent 状态与 Agent 间传递的数据无关时, 确保算法收敛到一致状态的三个充分必要条件, 对其正确性、有效性及执行效率进行了有意义的分析, 并在几个具体应用中得以验证; 文献 [18] 对平均一致问题进行了讨论, 将一致性算法视作矩阵分解问题, 提出了解决矩阵分解问题的机器学习方法. 文献 [19] 和文献 [20] 讨论了分布式一致跟踪控制问题, 并将问题抽象成二阶非线性动力系统, 利用 Lyapunov 理论及图论等相关理论工具给出了关于系统收敛性的充分条件; 同样针对跟踪控制问题[21], 提出了分布式跟踪算法, 该算法可以在有限时间内收敛至一致状态[22]; 提出了采用 “黑盒” 代替具体动力学模型的方法, 每一次迭代都采用了所谓的 SOO (Simultaneous optimistic optimization) 方法对 Agent 未来的动作进行规划, 由于与具体的动力学模型无关, 该方法能更广泛地使用于某些非线性一致性问题; 在文献 [23] 的研究中, Agent 收到的信息中含有噪声, 噪声的强度与相邻 Agent 状态有关, 在一定假设基础上, 分析了固定拓扑结构、动态切换拓扑结构及随机切换拓扑结构下的一致性算法, 并给出了确保均方一致性的充分条件; 文献 [24] 和文献 [25] 对各类一致性问题进行了较为系统的综述与概括, 指出了这一领域当前的主要研究成果, 并分析了存在的问题及未来的发展趋势.

多智能体一致性问题本身是诸如负载平衡、编队控制、自适应机械手等具体实际问题的抽象, 在实际环境中, 由于设备、通信干扰等诸多原因, 信息在传递过程中往往会携有噪声, 在实时噪声的干扰下, 任何一致性算法都无法收敛至理想状态 (无噪音干扰时收敛到的一致状态), 此时人们总是希望相关一致性算法依然能够保证最终智能体在理想状态附近的某一确定范围内分布 (方差有界), 否则一致性算法将没有任何意义. 本文就上述问题进行了讨论, 指出离散线性一致性算法对噪声是不可控的, 提出采用抑噪算子控制噪声的策略, 严格证明了关于抑噪算子合理取值范围的定理及推论, 通过实验仿真对相应理论结果进行了验证和讨论. 本文具体结构如下: 第 1 节对本文所涉及的相关概念进行定义, 对相关符号进行解释和说明; 第 2 节给出定理 1, 指出线性一致性算法是噪声不可控的, 并进行了严格的证明; 第 3 节针对线性一致性算法的噪声不可控性, 提出采用抑噪算子控制噪声的策略, 给出并证明了关于抑噪算子合理范围的定理和推论; 第 4 节通过一致性算法 DHA 对本文理论结果进行印证, 对实验结果进行分析, 讨论了抑噪算子的选择与算法效率及精度之间的关系; 第 5 节对本文的研究成果进行了归纳和概括, 指出与本文相关的未尽问题及下一步的研究方向.

1 相关符号及问题描述

1.1 相关定义及符号

本文所述的多智能体一致性问题可以抽象地用有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 表示, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \cdots, n\}$ 是图 $\mathcal{G}$ 的顶点集, $\mathcal{G}$ 中顶点可视作 Agent 的抽象, 通常用序号 i 来表示 $\mathcal{G}$ 中的第 i 个 Agent. $\mathcal{E} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为图 $\mathcal{G}$ 中所有边构成的集合, 如果存在 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 则意味 j 可以接收到相邻 Agent i 传递的信息. 对于 $\forall (i, j) \in \mathcal{E}$, 若同时存在 $(j, i) \in \mathcal{E}$, 则称 $\mathcal{G}$ 是无向的. 对于 $\mathcal{G}$ 中某一顶点 i, 分别用 $\mathcal{N}_i^+ = \{j \in v | (i, j) \in \mathcal{V}, j \neq i\}$ 和 $\mathcal{N}_i^- = \{j \in v | (j, i) \in \mathcal{V}, j \neq i\}$ 表示 I 的输出邻居和输入邻居, $d_i^+ = |\mathcal{N}_i^+|$, $d_i^- = |\mathcal{N}_i^+|$ 为输出邻居和输入邻居个数, 这里称 d_i^+, d_i^- 为节点 i 的出度和入度, 若 $\mathcal{G}$ 为无向图, 则其输入和输出邻居相同, 此时, $\mathcal{N}_i^+ = \mathcal{N}_i^-$, $d_i^+ = d_i^-$.

定义 1. 称图 $\mathcal{G}$ 是强联通 (Strongly connected, SC), 当且仅当对于 $\forall i, j \in \mathcal{V}$, 在 $\mathcal{G}$ 中都存在从 i 出发、终止于 j 的路径.

对于 $\forall i \in \mathcal{V}$, 用 $x_i(t)$ 表示 Agent i 在时刻 t 的状态, 相邻 Agent 间按照某种方式进行通信, 并根据邻居的状态决定自身下一步状态 $x_i(t+1)$, 若系统中的 Agent 状态最终能够完全趋同, 即对于

$\forall i, j \in \mathcal{V}$

$$\lim_{t\to\infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0 \tag{1}$$

则称上述 Agent 的通信及状态修订机制为一致性算法 (Consensus algorithm) 或一致性协议 (Consensus protocol). 通常情况下, 一致性问题不包括对于任意初始状态 $x_i(0)$, 均有 $\lim_{t\to\infty}|x_i(t)| \neq 0$ 的情形.

所谓线性一致性算法可由式 (2) 和式 (3) 给出:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j\in\mathcal{N}_i^-(t)} \alpha_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)) \tag{2}$$

其中, $i, j \in \mathcal{V}$, $\alpha_{ij}(t)$ 是以 t 为变量的实值函数, 用来刻画 t 时刻智能体 j 对 i 影响程度, 令 $\boldsymbol{X}(k) = [x_1(k), \cdots, x_n(k)]^{\mathrm{T}}$, 则式 (2) 可写成如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{X}(t+1) = \mathcal{A}(t)\boldsymbol{X}(t) \tag{3}$$

矩阵 $\mathcal{A}(t)$ 元素均为正数, 这里称其为算法 (3) 的状态转换矩阵 (或连接矩阵), 用 $\mathcal{I}_n$ 表示 n 阶单位矩阵, 不妨设 $\mathcal{L}(t) = [l_{ij}(t)]_{n\times n}$ 为图 $\mathcal{G}$ 带权值的 Laplacian 矩阵:

$$l_{ij}(t) = \begin{cases} -\alpha_{ij}(t), & \text{若 } j \in \mathcal{N}_i^- \text{ 且 } i \neq j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t), & \text{若 } i = j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然, 连接矩阵 $\mathcal{A}(t)$ 与 $\mathcal{L}(t)$ 有如下关系:

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{I}_n - \mathcal{L}(t) \tag{4}$$

定义 2. 设 $\mathcal{L} = [l_{ij}]_{n\times n}$ 为图 $\mathcal{G}$ 的 Laplacian 矩阵, 若对于 $\forall i$, $1 \le i \le n$, 恒有 $\sum_{i\neq j, j=1}^{n} l_{ij} = \sum_{i\neq j, j=1}^{n} l_{ji}$, 则称 $\mathcal{G}$ 为平衡图.

在式 (3) 中, 若图 $\mathcal{G}$ 的拓扑结构及 Agent 间权值确定不变, 则有 $\mathcal{A}(t) \equiv \mathcal{A}$, 此时称上述一致性问题为确定的一致性问题; 若图 $\mathcal{G}$ 的拓扑结构或 Agent 间的关系随时间变化而变化, $\mathcal{A}(t)$ 为时变矩阵, 则称之为动态一致性问题.

目前, 关于线性一致性算法的研究通常从分析 Laplacian 矩阵 $\mathcal{L}(t)$ 及连接矩阵 $\mathcal{A}(t)$ 入手, 着重讨论系统的收敛性、收敛效率等方面问题. 但在实际应用中, 由于设备、环境、通信干扰等诸多原因, 信息在传递过程中往往会携带一些噪声, 本文将重点研究噪声对一致性算法的影响, 以下将就这一问题进行详细论述.

1.2 线性一致性算法中的噪声问题

设 r 为任意满足正态分布的随机数, $r \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 用 $\mathrm{mean}(r)$ 和 $\mathrm{var}(r)$ 分别表示 r 的均值 μ 和方差 σ^2, 若 $\boldsymbol{R} = [r_1, \cdots, r_n]^{\mathrm{T}}$ 为一随机向量, 则 $\mathrm{mean}(\boldsymbol{R}) = [\mathrm{mean}(r_1), \cdots, \mathrm{mean}(r_1)]^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{var}(\boldsymbol{R})$ 则为该随机向量联合分布的方差矩阵.

若 Agent i 接收到的信息中包含着相互独立且呈正态分布的噪声干扰, 此时式 (2) 可改写为

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j\in\mathcal{N}_i^{-1}(t)} \alpha_{ij}(t)((x_j(t) + r_j(t)) - x_i(t)) \tag{5}$$

其中, $i, j \in \mathcal{V}$, $r_j(t) \sim \mathrm{N}(0, \sigma_j^2)$ 为以 0 为均值、σ_j^2 为方差, 满足正态分布的随机数, 表示状态信息 $x_j(t)$ 中携带的噪声. 令 $\boldsymbol{R}(t) = [r_1(t), \cdots, r_n(t)]^{\mathrm{T}}$, 则可将式 (5) 写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{X}(t+1) = \mathcal{A}(t)\boldsymbol{X}(t) + \mathcal{W}(t)\boldsymbol{R}(t) \tag{6}$$

其中, $\mathcal{W}(t) = -\mathcal{L}(t) - \mathrm{diag}\{-\mathcal{L}(t)\}$, $\mathrm{diag}\{-\mathcal{L}(t)\}$ 为 $-\mathcal{L}(t)$ 的对角矩阵, 由此可以进一步得出:

$$\boldsymbol{X}(t+1) = \prod_{k=0}^{t} \mathcal{A}(k)\boldsymbol{X}(0) + \sum_{m=1}^{t}\left(\left(\prod_{j=t-m+1}^{t} \mathcal{A}(j)\right)\mathcal{W}(t-m)\boldsymbol{R}(t-m)\right) + \mathcal{W}(t)\boldsymbol{R}(t) \tag{7}$$

为方便描述, 当 $m = 0$ 时, 规定

$$\prod_{j=t-m+1}^{t} \mathcal{A}(j) = \boldsymbol{\mathcal{I}}_n$$

则式 (7) 可以简写为

$$\boldsymbol{X}(t+1) = \prod_{k=0}^{t} \mathcal{A}(k)\boldsymbol{X}(0) + \sum_{m=0}^{t}\left(\left(\prod_{j=t-m+1}^{t} \mathcal{A}(j)\right)\mathcal{W}(t-m)\boldsymbol{R}(t-m)\right) \tag{8}$$

记 $\overline{\boldsymbol{R}}(t-m) = \mathcal{W}(t-m)\boldsymbol{R}(t-m)$, 则式 (8) 进一步简写为

$$\boldsymbol{X}(t+1) = \prod_{k=0}^{t} \mathcal{A}(k)\boldsymbol{X}(0) + \sum_{m=0}^{t}\left(\prod_{j=t-m+1}^{t} \mathcal{A}(j)\overline{\boldsymbol{R}}(t-m)\right) \tag{9}$$

分析式 (9) 的噪声部分, 可以看出其为若干随机向量的线性组合, 因此也是一个满足正态分布的随机向量.

定义 3. 设 $\sigma_i^2(t)$ 是式 (9) 中噪声向量 $\sum_{m=0}^{t}(\prod_{j=t-m=1}^{t}\mathcal{A}(j)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m))$ 的第 i 个分量的方差, 当 $t\to\infty$ 时, 若存在常数 M, 使得 $\lim_{t\to\infty}\sigma_i^2(t)<M$, $i=1,\cdots,n$, 则称线性一致性算法噪声可控.

2 线性一致性算法的噪声不可控性

不妨设对于任意初始状态 $\boldsymbol{X}(0)$, 式 (3) 所述一致性算法均收敛至与 $\boldsymbol{X}(0)$ 相关的一致状态 $\boldsymbol{X}^*$, 在此前提下, 我们讨论噪声对该算法的影响.

定理 1. 线性一致性算法 (3) 噪声不可控.

证明. 在有噪声的情况下, 一致性算法 (3) 可由式 (9) 表示, 考察式 (9) 中随机向量 $\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}(j)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m)$ 的方差:

$$\begin{aligned}&\operatorname{var}\left(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}(j)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m)\right)=\\&\mathcal{A}(t-m+1)\operatorname{var}\left(\prod_{j=t-m+2}^{t}\mathcal{A}(j)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m)\right)\times\\&\mathcal{A}(t-m+1)^{\mathrm{T}}=\\&\left(\prod_{j=t}^{t-m+1}\mathcal{A}(j)\right)\operatorname{var}\left(\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m)\right)\left(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}(j)\right)\end{aligned}\tag{10}$$

在以上公式中, $\operatorname{var}(\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m))=\mathcal{W}(t-m)\times\operatorname{var}(\boldsymbol{R}(t-m))\mathcal{W}(t-m)^{\mathrm{T}}$, 并且 $\operatorname{var}(\boldsymbol{R}(t-m))=\operatorname{diag}\{\operatorname{var}(r_1(t-m)),\cdots,\operatorname{var}(r_n(t-m))\}$, $m=1,\cdots,t$.

已知在没有噪声的前提下, $t\to\infty$ 时, $\prod_{k=0}^{t}\mathcal{A}(k)\boldsymbol{X}(0)$ 收敛, 因此, 对于某一确定的常数 m, 均有:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\operatorname{var}\left(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}(j)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m)\right)=\\&\lim_{t\to\infty}\left(\boldsymbol{V}_1(m),\cdots,\boldsymbol{V}_n(m)\right)\mathcal{A}(t-m+1)^{\mathrm{T}}\cdots\\&\mathcal{A}(t)^{\mathrm{T}}=\lim_{t\to\infty}(\mathcal{A}(t)\cdots\mathcal{A}(t-m+1)\times\\&\left(\boldsymbol{V}_1(m),\cdots,\boldsymbol{V}_n(m)\right)^{\mathrm{T}}\Big)^{\mathrm{T}}=[\zeta(m)]_{n\times n}\end{aligned}\tag{11}$$

其中, $\boldsymbol{V}_i(m)=(v_i,\cdots,v_i)^{\mathrm{T}}$ 为与 m 有关的常向量, $[\zeta(m)]_{n\times n}$ 为常数矩阵, 且 $\zeta(m)>0$, $t\to\infty$ 时矩阵 $[\zeta(m)]_{n\times n}$ 对角线上的 n 元素即为随机向量 $\prod_{j=t-m=1}^{t}\mathcal{A}(j)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m)$ 每个分量的方差.

研究式 (9) 的噪声部分 $\sum_{m=0}^{t}(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}(j)\times\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m))$, 用 $\theta_i^2(t)$ 和 $\sigma_i^2(t,m)$ 表示随机向量 $\prod_{t-m=1}^{t}\mathcal{A}(j)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m)$ 和 $\sum_{m=0}^{t}(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}(j)\times\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m))$ 的第 i 个分量的方差, 则:

$$\lim_{t\to\infty}\sigma_i^2(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{m=0}^{t}\theta_i^2(t,m)\tag{12}$$

由式 (10) 已经得出, 对于某一确定常数 m, $\lim_{t\to\infty}\theta_i^2(t,m)=\zeta(m)>0$, 则必有当 $t\to\infty$ 时, $\sigma_i^2(t)\to\infty$, 即式 (3) 所述系统噪声不可控. □

定理 1 指出了这样一个事实: 线性一致性算法是噪声不可控的. 事实上, 若在无噪声的条件下, 如果线性一致性算法收敛, 必有 $t\to\infty$ 时, $\prod_{k=0}^{t}\mathcal{A}(k)\boldsymbol{X}(0)$ 最终收敛到某个一致状态, 同样在 $\mathcal{A}(t)$ 的作用下, 对于具体的常数 m, $t\to\infty$ 时随机向量 $(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}(j))\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m)$ 的联合分布方差最终也必趋于一个稳定的常数, 而由式 (9) 可知, 一致性算法的噪声向量正是上述随机向量累加而成的无穷级数, 其方差必不收敛, 即噪声不可控.

3 噪声控制

考察式 (12) 不难看出, 噪声控制问题的本质是无穷级数 $\sum_{m=0}^{t}\theta_i^2(t,m)$ 是否收敛的问题, $t\to\infty$ 时, $\theta_i^2(t,m)\to0$ 是该无穷级数收敛的必要条件, 而 $\theta_i^2(t,m)$ 恰恰是方差矩阵 $\operatorname{var}((\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}(j))\times\mathcal{W}(t-m)\boldsymbol{R}(t-m))$ 对角线上的第 i 个元素. 由式 (10) 可知:

$$\begin{aligned}&\operatorname{var}\left(\left(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}(j)\right)\mathcal{W}(t-m)\boldsymbol{R}(t-m)\right)=\\&\mathcal{A}(t)\cdots\mathcal{A}(t-m+1)\times\\&\mathcal{W}(t-m)\operatorname{var}(R(t-m))\mathcal{W}(t-m)^{\mathrm{T}}\times\\&\mathcal{A}(t-m+1)^{\mathrm{T}}\cdots\mathcal{A}(t)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

在定理 1 的证明过程中, 已经证明了该矩阵收敛至一个常数矩阵, 为了使一致性算法噪声可控, 我们重新构造连接矩阵 $\mathcal{A}(t)$, 令 $\mathcal{L}_\varepsilon(t)=\varepsilon(t)\mathcal{L}(t)$, 其中, $\varepsilon(t)$ 是以 t 为自变量的函数, 当 $t\to\infty$ 时, $\varepsilon(t)\to0$, 称 $\varepsilon(t)$ 为抑噪函数或抑噪算子, 进而 $\mathcal{W}_\varepsilon(t)=-\mathcal{L}_\varepsilon(t)-\operatorname{diag}\{-\mathcal{L}_\varepsilon(t)\}$, 我们的动机是寻找合理的抑噪函数 $\varepsilon(t)$, 使式 (12) 所述无穷级数收敛. 不妨用 $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ 表示引入抑噪函数后的连接矩阵:

$$\mathcal{A}_\varepsilon(t)=\mathcal{I}_n-\varepsilon(t)\mathcal{L}(t)\tag{13}$$

用 $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ 替换式 (3) 中的 $\mathcal{A}(t)$, 得到:

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\mathcal{A}_\varepsilon(t)\boldsymbol{X}(t)\tag{14}$$

式 (14) 称为抑噪一致性算法 (Noise-suppression consensus algorithm, NS-CA), 进一步将式 (14) 改写成 $\boldsymbol{X}(t+1)$ 和初始状态 $\boldsymbol{X}(0)$ 之间的关系, 并考虑 Agent 携带的噪声, 则式 (14) 可写为

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\prod_{k=0}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(k)\boldsymbol{X}(0)+\sum_{m=0}^{t}\left(\left(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)\right)\mathcal{W}_{\varepsilon}(t-m)\boldsymbol{R}(t-m)\right) \tag{15}$$

类似地, 令 $\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)=\mathcal{W}_{\varepsilon}(t-m)\boldsymbol{R}(t-m)$, 式 (15) 简写为

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\prod_{k=0}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(k)\boldsymbol{X}(0)+\sum_{m=0}^{t}\left(\left(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)\right)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)\right) \tag{16}$$

定理 2. 设 $\mathcal{A}(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$ 为算法 (3) 中的状态转换矩阵, $\varepsilon(t)$ 为抑噪算子, 若对于 $\forall j$, 均有 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(t)\leq 1$, 且 $t\to\infty$ 时, $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)/t^{-0.5}=0$, 即 $\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 高阶无穷小时, 则一致性算法 (14) 噪声可控.

证明. 用 $\sigma_{\varepsilon i}^{2}(t)$ 和 $\theta_{\varepsilon i}^{2}(t,m)$ 分别表示随机向量 $\sum_{m=0}^{t}(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m))$ 和 $\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)$ 的第 i 个分量的方差, $\|\cdot\|_{\infty}$ 为矩阵的行和范数, 考察随机向量 $\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)$ 的方差矩阵的行和范数, 有:

$$\begin{aligned}&\left\|\mathrm{var}\left(\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)\right)\right\|_{\infty}=\\&\quad\left\|\mathcal{W}_{\varepsilon}(t-m)\,\mathrm{var}\left(\boldsymbol{R}(t-m)\right)\mathcal{W}_{\varepsilon}(t-m)^{\mathrm{T}}\right\|_{\infty}=\\&\quad\varepsilon^{2}(t-m)\left\|\mathcal{W}(t-m)\,\mathrm{var}\left(\boldsymbol{R}(t-m)\right)\times\right.\\&\quad\left.\mathcal{W}(t-m)^{\mathrm{T}}\right\|_{\infty}\leq\\&\quad\varepsilon^{2}(t-m)\left\|\mathrm{var}\left(\boldsymbol{R}(t-m)\right)\right\|_{\infty}\end{aligned} \tag{17}$$

考察随机向量 $(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j))\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)$ 方差矩阵的行和范数:

$$\begin{aligned}&\left\|\mathrm{var}\left(\left(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)\right)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)\right)\right\|_{\infty}=\\&\quad\left\|\prod_{j=t}^{t-m+1}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)\mathrm{var}\left(\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)\right)\times\right.\\&\quad\left.\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)^{\mathrm{T}}\right\|_{\infty}\leq\\&\quad\prod_{j=t}^{t-m+1}\left(\|\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)\|_{\infty}\left\|\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)^{\mathrm{T}}\right\|_{\infty}\right)\left\|\mathrm{var}\left(\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)\right)\right\|_{\infty}\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{A}(t)=\mathcal{I}_{n}-\mathcal{L}(t)$, 且 $\mathcal{A}(t)$ 的每个元素都大于等于 0, 显然 $\mathcal{A}_{\varepsilon}(t)=[a_{\varepsilon ij}(t)]_{n\times n}=\mathcal{I}_{n}-\varepsilon(t)\mathcal{L}(t)$ 的行和范数 $\|\mathcal{A}_{\varepsilon}(t)\|_{\infty}=\max_{i}\sum_{j=1}^{n}|a_{\varepsilon ij}(t)|=1$.

由已知条件, 连接矩阵 $\mathcal{A}(t)$ 的任意一列 j 均有 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(t)\leq 1$, 即 $0<(1-\sum_{k\neq j,k=1}^{n}a_{jk}(t))+\sum_{i\neq j,i=1}^{n}a_{ij}(t)\leq 1$, 进而得出:

$$-1\leq\sum_{i\neq j,i=1}^{n}a_{ij}(t)-\sum_{k\neq j,k=1}^{n}a_{jk}(t)\leq 0$$

对于 $\mathcal{A}_{\varepsilon}(t)$ 的任意一列 j, 其和可以写为

$$\begin{aligned}&1-\varepsilon(t)\sum_{k\neq j,k=1}^{n}a_{jk}(t)+\varepsilon(t)\sum_{i\neq j,i=1}^{n}a_{ij}(t)=\\&\quad 1+\varepsilon(t)\left(\sum_{i\neq j,i=1}^{n}a_{ij}(t)-\sum_{k\neq j,k=1}^{n}a_{jk}(t)\right)\end{aligned}$$

显然

$$0\leq 1+\varepsilon(t)\left(\sum_{i\neq j,i=1}^{n}a_{ij}(t)-\sum_{k\neq j,k=1}^{n}a_{jk}(t)\right)\leq 1$$

因此, $\|\mathcal{A}_{\varepsilon}(t)^{\mathrm{T}}\|_{\infty}\leq 1$, 进一步可得出:

$$\begin{aligned}&\left\|\mathrm{var}\left(\left(\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)\right)\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)\right)\right\|_{\infty}\leq\\&\quad\prod_{j=t}^{t-m+1}\left(\|\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)\|_{\infty}\left\|\mathcal{A}_{\varepsilon}(j)^{\mathrm{T}}\right\|_{\infty}\right)\times\\&\quad\left\|\mathrm{var}\left(\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)\right)\right\|_{\infty}\leq\left\|\mathrm{var}\left(\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m)\right)\right\|_{\infty}\leq\\&\quad\varepsilon^{2}(t-m)\left\|\mathrm{var}\left(\boldsymbol{R}(t-m)\right)\right\|_{\infty}\end{aligned}$$

在上面的公式中, $\mathrm{var}(\boldsymbol{R}(t-m))=\mathrm{diag}\{\mathrm{var}(r_{1}(t-m)),\cdots,\mathrm{var}(r_{n}(t-m))\}$. 而 $\theta_{\varepsilon i}^{2}(t,m)$ 恰为方差矩阵 $\mathrm{var}((\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_{\varepsilon}(j))\times\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\varepsilon}(t-m))$ 对角线上第 i 个元素, 不妨记 $\rho=\max(\mathrm{var}(r_{l}(t-m)))$, $l=1,\cdots,n$, 显然, $\theta_{\varepsilon i}^{2}(t,m)\leq\varepsilon^{2}(t-m)\rho$, 进而有:

$$\sigma_{\varepsilon i}^{2}(t)=\sum_{m=0}^{t}\theta_{\varepsilon i}^{2}(t,m)=$$

$$\theta_{\varepsilon i}^2(t,0)+\cdots+\theta_{\varepsilon i}^2(t,t)\leq$$
$$\rho\left(\varepsilon^2(t)+\cdots+\varepsilon^2(0)\right)=\rho\sum_{m=0}^{t}\varepsilon^2(m)$$

由已知条件 $\lim_{m\to\infty}\varepsilon(m)/m^{-0.5}=0$, 可知 $\varepsilon^2(m)$ 是 m^{-1} 的高阶无穷小, 根据级数相关理论, 当 $t\to\infty$ 时, 级数 $\rho\sum_{m=0}^{t}\varepsilon^2(m)$ 收敛, 注意 $\theta_{\varepsilon i}^2(t)$ 单调递增, $\rho\sum_{m=0}^{t}\varepsilon^2(m)$ 为其上界且收敛, 因此, $t\to\infty$ 时, $\sigma_{\varepsilon i}^2(t)$ 收敛. □

由定理 1 可知, 一致性算法 (3) 噪声不可控, 因此我们试图通过 $\varepsilon(t)$ 来抑制噪声对系统的影响. 直觉上, 当抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 的收敛速度大于噪声被放大的速度时, 算法的噪声就会得到有效的控制. 定理 2 给出了使系统噪声可控的充分条件, 当抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 的收敛速度大于 $t^{-0.5}$ 时, 即当 $\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 的高阶无穷小时, 抑噪一致性算法 (14) 是噪声可控的.

考察式 (16), 定理 2 给出了保证随机向量 $\sum_{m=0}^{t}((\prod_{j=t-m+1}^{t}\mathcal{A}_\varepsilon(j))\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_\varepsilon(t-m))$ 的每一个分量分布的方差是有界的充分条件, 这里还需要讨论的另一个问题是抑噪算法对 $\prod_{k=0}^{t}\mathcal{A}_\varepsilon(k)\boldsymbol{X}(0)$ 本身的影响. 在没有噪声的情况下, 一致性算法 (3) 能够收敛至与初始状态 $\boldsymbol{X}(0)$ 相关的一致状态 $\boldsymbol{X}^*=[x^*,\cdots,x^*]^{\mathrm{T}}$. 定理 3 将给出确保抑噪一致性算法 (14) 在没有噪声的前提下收敛至 $\boldsymbol{X}^*$ 的充分条件.

定理 3. 设 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 为强连通图, $\mathcal{L}(t)$ 为其在 t 时刻的 Laplacian 矩阵, 一致性算法 (3) 在无噪声的条件下收敛至一致状态 $\boldsymbol{X}^*$, $\varepsilon(t)$ 为抑噪算子, 若抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 的低阶无穷小, 则在没有噪声干扰的情况下, 抑噪一致性算法 (14) 将收敛至一致状态 $\boldsymbol{X}^*$.

证明. 由文献 [12] 的结论可知, 对于任意确定的 t, $\|\boldsymbol{X}(t+1)-\boldsymbol{X}^*\|\leq\mu_{\varepsilon 2}(t)\|\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}^*\|$, 其中, $\mu_{\varepsilon 2}(t)$ 为连接矩阵 $(\mathcal{A}_\varepsilon(t)+\mathcal{A}_\varepsilon(t)^{\mathrm{T}})/2$ 的次大特征值, 设 $\lambda_2(t)$ 为 $(\mathcal{L}(t)+\mathcal{L}(t)^{\mathrm{T}})/2$ 的次小特征值, 显然, $\mu_{\varepsilon 2}(t)=1-\varepsilon(t)\lambda_2(t)$, 从而有:

$$\|\boldsymbol{X}(t+1)-\boldsymbol{X}^*\|\leq$$
$$\prod_{k=1}^{t}(1-\varepsilon(k)\lambda_2(k))\|\boldsymbol{X}(0)-\boldsymbol{X}^*\|\quad(18)$$

不妨设 λ_2^* 为 $(\mathcal{L}(t)+\mathcal{L}(t)^{\mathrm{T}})/2$ 的次小特征值的最小者, 根据已知条件, $\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 的低阶无穷小, 则 $\lim_{t\to\infty}(1-\varepsilon(t)\lambda_2^*)^t=0$, 再由 $\varepsilon(k)>0$, 从而对于 $\forall t$, 均有 $0\leq\prod_{k=1}^{t}(1-\varepsilon(k)\lambda_2(k))\leq(1-\varepsilon(t)\lambda_2^*)^t$, 由夹挤定理可得: $\lim_{t\to\infty}\prod_{k=1}^{t}(1-\varepsilon(k)\lambda_2(k))=0$, 即当 $t\to\infty$ 时:

$$0\leq\|\boldsymbol{X}(t+1)-\boldsymbol{X}^*\|\leq$$
$$\prod_{k=1}^{t}(1-\varepsilon(k)\lambda_2(k))\|\boldsymbol{X}(0)-\boldsymbol{X}^*\|=0$$

从而有 $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{X}(t+1)-\boldsymbol{X}^*\|=0$. □

系统引入抑噪算子后是否能够最终收敛到状态 X^*, 同样与抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 的收敛速度相关, 从式 (14) 可以看出, 若 $\varepsilon(t)$ 收敛得过快, $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ 也会随之迅速地收敛到单位矩阵 $\mathcal{I}_n$, 造成状态修订项过快收敛为零. 定理 3 从理论上证明了当 $\varepsilon(t)$ 的收敛速度比 t^{-1} 慢时, 即 $\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 的低阶无穷小时, 一致性算法 (14) 的收敛性不变, 将最终收敛到一致状态 $\boldsymbol{X}^*$.

综合定理 2 和定理 3, 易得到如下推论:

推论 1. 设 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 为强连通图, 一致性算法 (3) 在无噪声条件下收敛到一致状态 $\boldsymbol{X}^*$, 当系统存在噪声时, 引入抑噪算子 $\varepsilon(t)$, 抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 的低阶无穷小或 $t^{-0.5}$ 的高阶无穷小时, 抑噪一致性算法 (14) 收敛至 $\boldsymbol{X}^*$, 且噪声可控.

至此, 推论 1 已经明确地给出了确保线性一致性算法收敛至 $\boldsymbol{X}^*$ 且噪声可控的充分条件, 直观上可以由图 1 所示, 当 $t\to\infty$ 时, $\varepsilon(t)$ 位于图 1 所示曲线 t^{-1} 和 $t^{-0.5}$ 间的深色区域时, 一致性算法 (14) 收敛至 $\boldsymbol{X}^*$, 且噪声可控.

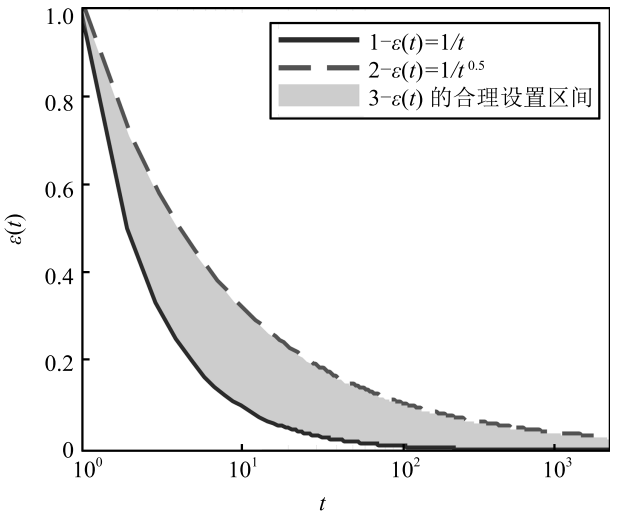


图 1　抑噪函数合理的取值区间

Fig. 1　Reasonable value interval of noise suppression function

不妨设 $\boldsymbol{X}^*=[x^*,\cdots,x^*]^{\mathrm{T}}$, 在以上定理 1、定理 2、定理 3 和推论 1 的基础上, 表 1 对不同情况下 Agent 的最终状态进行了归纳.

从表 1 可以看出: 1) 当系统没有噪声时, 若 $\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 的低阶无穷小时, 算法 (14) 依然可以收敛至

表 1 不同 $\varepsilon(t)$ 与 Agent 的最终分布情况

Table 1 The final distribution of agent with different $\varepsilon(t)$

No.	$\varepsilon(t)$	任意 Agent i 的最终状态	
		无噪声	有噪声
Case 1	无	收敛至 $\boldsymbol{X}^*$	噪声不可控, 发散
Case 2	$\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 的等价或低阶无穷小	收敛至 $\boldsymbol{X}^*$	噪声不可控, 发散
Case 3	$\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 的高阶和 t^{-1} 的低阶无穷小	收敛至 $\boldsymbol{X}^*$	以 $\boldsymbol{X}^*$ 为中心, 呈正态分布, 噪声可控
Case 4	$\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 的等价或高阶无穷小	收敛至 $\boldsymbol{X}_i^{\wedge}$, 且若 $i \neq j$, $\boldsymbol{X}_i^{\wedge} \neq \boldsymbol{X}_j^{\wedge}$	以 $\boldsymbol{X}_i^{\wedge}$ 为中心, 呈正态分布, 噪声可控

$\boldsymbol{X}^*$; 反之, $\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 的等价或高阶无穷小, 则一致性算法最终收敛至某一向量 $\boldsymbol{X}^{\wedge} = [x_1^{\wedge}, \cdots, x_n^{\wedge}]$, 且对于不同的 i, j, $x_i^{\wedge} \neq x_j^{\wedge}$. 2) 当系统存在噪声时, 若 $\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 的低阶无穷小, 则算法噪声不可控, $t \to \infty$ 时 Agent 状态发散; 若 $\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 的高阶无穷小和 t^{-1} 的低阶无穷小, 当 $t \to \infty$ 时 Agent 的状态将以 x^* 为中心, 呈正态分布; 若 $\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 的等价或高阶无穷小, 则在抑噪函数 $\varepsilon(t)$ 的作用下, 系统噪声最终的方差是有界的, $t \to \infty$ 时 Agent i 的状态将以 $x_i^{\wedge}$ 呈正态分布.

4 相关实验和讨论

为更直观地说明问题, 以下使用具体示例来验证和解释上述理论结果. 设 $\mathcal{G}$ 为 16 个节点构成的无向图, 每个节点有 4 个邻居, 考察式 (19) 所述的分布式自平衡算法 (Distributed homeostasis algorithm, DHA).

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \alpha \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j(t) - x_i(t)) \quad (19)$$

其中, $0 < \alpha < |\mathcal{N}_i|/1$, 且 Agent 间的连接关系确定, 已知在没有噪声的条件下, 对于任意初始状态 $\boldsymbol{X}(0) = [x_1(0), \cdots, x_n(0)]^{\mathrm{T}}$, 算法最终将收敛至一致状态 $\boldsymbol{X}^* = [x^*, \cdots, x^*]^{\mathrm{T}}$, $x^* = (\sum_{i=1}^{n} x_i(0))/n$. 当 Agent 收到的信息含有噪声时, 式 (19) 变为

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \alpha \sum_{j \in \mathcal{N}i} (x_j(t) + r_j(t) - x_i(t)) \quad (20)$$

规定 $\mathcal{A}^0 = \boldsymbol{\mathcal{I}}$, $\overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m) = \mathcal{W}(t-m)\boldsymbol{R}(t-m)$, 则式 (20) 的矩阵形式为

$$\boldsymbol{X}(t+1) = \mathcal{A}^{t+1}\boldsymbol{X}(0) + \sum_{m=0}^{t} \mathcal{A}^m \overline{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t-m) \quad (21)$$

由于 Agent 间的连接关系确定, 因此式 (21) 中 $\mathcal{A}(t) \equiv \mathcal{A}$. 为方便描述, 称引入抑噪算子的 DHA 为抑噪自平衡算法 (Noise suppression distributed homeostasis algorithm, NS-DHA).

在本文实验中, 每个 Agent 的初始状态在闭区间 [0, 400] 上随机均匀产生, 相邻 Agent 传递的信号中含呈正态分布的噪声 r, 且 $r \sim \mathrm{N}(0, 10^2)$, 相同条件下重复实验 100 次取平均结果.

4.1 DHA 的噪声不可控性和 $\varepsilon(t)$ 的噪声抑制作用

不妨用 $\prec$ 表示不同 $\varepsilon(t)$ 间阶的大小关系, 取 $\varepsilon(t)$ 分别等于 $t^{-0.5}$, $t^{-0.8}$ 及 t^{-1}, 考察抑噪后的 DHA 执行过程中 Agent 噪声方差变化的平均值, 并与没有抑噪算子的 DHA 的执行结果进行比较, 相关实验结果如图 2 所示.

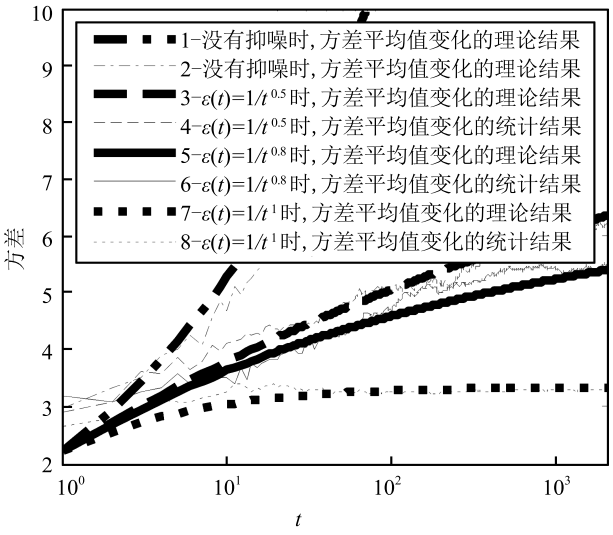


图 2 不同 $\varepsilon(t)$, NS-DHA 执行过程中 Agent 噪声方差变化平均值对比

Fig. 2 For different $\varepsilon(t)$, here is the contrast of the noise variance changes of agent during the execution of NS-DHA

图 2 包括 8 条曲线, 曲线 1 和曲线 2 为在没有抑噪的情况下, DHA 噪声方差平均值变化的理论结果和统计结果, 曲线 3 ∼ 8 为抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 分别等

于 $t^{-0.5}$, $t^{-0.8}$ 及 t^{-1} 时, NS-DHA 噪声方差平均值变化的理论结果和统计结果. 通过实验结果可以看出:

1) 从曲线 1 和曲线 2 不难看出, 如果没有抑噪算子的作用, 噪声方差在 DHA 的作用下不断被放大, 从而验证了定理 1 的结论, 即线性一致性算法的噪声不可控性;

2) 由曲线 3 和曲线 4 可得出, 当 $\varepsilon(t) = t^{-0.5}$ 时, 曲线 3 和曲线 4 与 $\lg t$ 呈线性关系 (图 2 的横坐标为对数坐标), 因此曲线 3 和曲线 4 是不收敛的, 也就是说当 $\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 等价或低阶无穷小时, NS-DHA 的噪声是不可控的;

3) 由曲线 5～8 可知, 当抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 等于 $t^{-0.8}$ 和 t^{-1} 时, NS-DHA 噪声的方差是收敛的, 显然 $t^{-1} \succ t^{-0.8}$, 比较曲线 5～8 不难看出, $\varepsilon(t)$ 的阶越高, 噪声方差曲线收敛速度越快, 最终方差的值也越小. 这说明了定理 2 的正确性, 即当 $\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 的高阶无穷小时, 一致性算法 (14) 的噪声是可控的.

4.2　抑噪自平衡算法 Agent 的最终状态

4.2.1　系统无噪声时的情形

已知在不考虑噪声和抑噪算子的情况下, DHA 将最终收敛至 $\boldsymbol{X}^*$, 取 $\varepsilon(t)$ 分别等于 $t^{-0.2}$, $t^{-0.5}$, $t^{-0.8}$, t^{-1}, t^{-2}, 考察在没有噪声时, 抑噪自平衡算法是否依然能够收敛至 $\boldsymbol{X}^*$, 相关实验结果如图 3 所示.

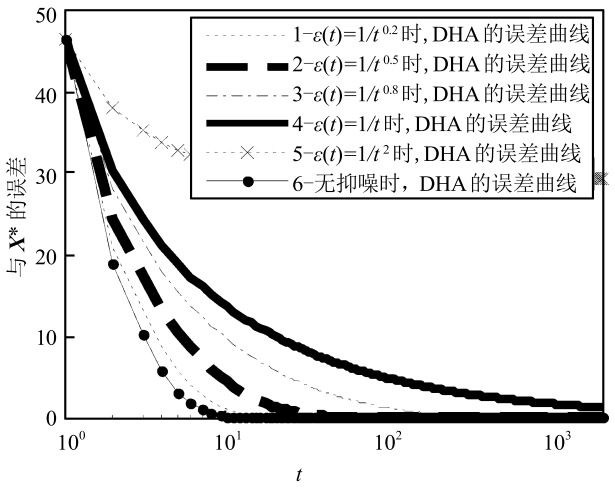


图 3　不同 $\varepsilon(t)$, NS-DHA 执行过程中 Agent 状态向量与 $\boldsymbol{X}^*$ 距离

Fig. 3　For different $\varepsilon(t)$, distance between state vector of agent and $\boldsymbol{X}^*$ during the execution of NS-DHA

图 3 中横坐标为时间 t, 纵坐标为算法与 $\boldsymbol{X}^*$ 的误差, 图中曲线 1～5 为在没有噪声的情况下, NS-DHA 执行过程中采用不同抑噪算子时, Agent 状态与 $\boldsymbol{X}^*$ 的误差曲线. 为比较方便, 曲线 6 为没有抑噪算子时 DHA 的误差曲线. 由相关实验结果可以得出:

1) 由曲线 1～3 可以看出, 当抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 等于 $t^{-0.2}$, $t^{-0.5}$, $t^{-0.8}$ 时, NS-DHA 可以收敛至一致状态 $\boldsymbol{X}^*$, 由于这三个抑噪算子均为 t^{-1} 的低阶无穷小, 从而印证了定理 3 结论的正确性.

以上抑噪算子之间满足 $t^{-0.2} \prec t^{-0.5} \prec t^{-0.8} \prec t^{-1}$, 考察每个抑噪算子对应的曲线及曲线 6, 可以得出: 与 DHA 相比, 引入抑噪算子后, NS-DHA 的收敛速度变慢, 且 $\varepsilon(t)$ 越接近 t^{-1}, 收敛的速度越慢.

2) 曲线 4 和曲线 5 分别为抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 等于 t^{-1} 和 t^{-2} 时 DHA 的误差曲线, 这两个算子是 t^{-1} 的等价或高阶无穷小, 此时 NS-DHA 并没有最终收敛到 X^*, 这是因为当 $\varepsilon(t)$ 收敛过快时, $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ 会随之迅速地收敛到单位矩阵 $\mathcal{I}_n$, 使 NS-DHA 不能最终收敛到目标状态 $\boldsymbol{X}^*$.

对比曲线 4 和曲线 5 可以看出, 当 $\varepsilon(t)$ 等于 t^{-2} 时, NS-DHA 最终 Agent 状态与 $\boldsymbol{X}^*$ 的误差大于 $\varepsilon(t)$, 等于 t^{-1} 时的情形. 由此可知, 当抑噪算子的阶大于 t^{-1} 时, 阶越高, $\varepsilon(t)$ 最终状态与 $\boldsymbol{X}^*$ 的误差越大.

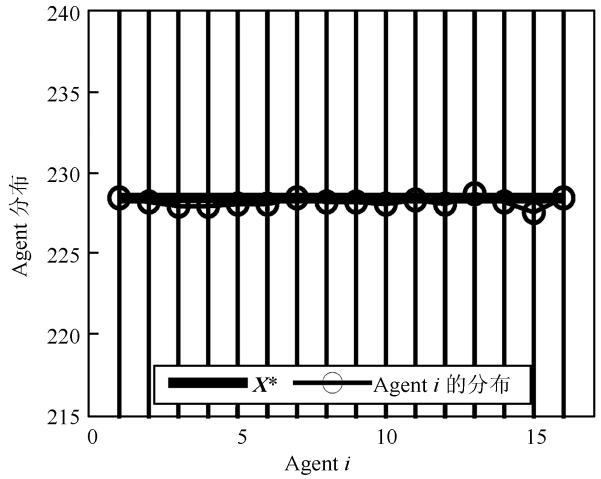
4.2.2　系统含有噪声时的情形

选取抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 分别等于 $t^{-0.2}$, $t^{-0.8}$, $t^{-1.5}$ 和 $t^{-1}\lg t$, 这四个抑噪算子具有一定的代表性, 其中, $t^{-0.2}$ 为 $t^{-0.5}$ 的低阶无穷小, $t^{-1.5}$ 为 t^{-1} 的高阶无穷小, $t^{-0.8}$ 和 $t^{-1}\lg t$ 为 $t^{-0.5}$ 的高阶无穷小和 t^{-1} 的低阶无穷小. 与其他指数型的抑噪算子相比, $t^{-1}\lg t$ 的阶更接近 t^{-1}. 每次实验的初始状态相同, 由随机产生, 相邻 Agent 传递的状态信息中含有正态分布的噪声 $r \sim \mathrm{N}(0, 10^2)$. 重复实验 100 次, 考察 Agent 的最终分布情况, 相关实验结果如图 4 (a)～4 (d) 所示.

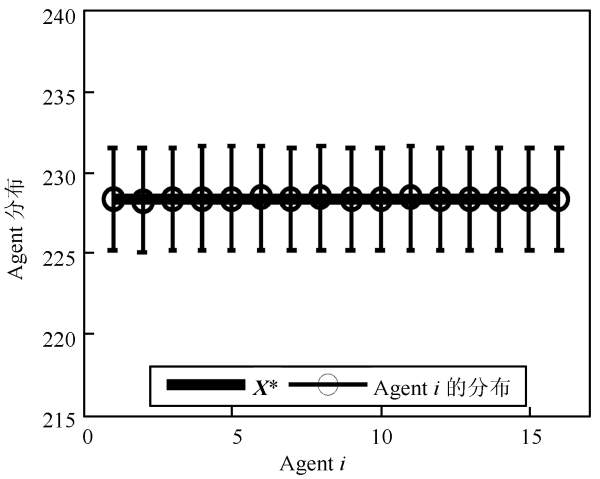
图 4 中的横坐标为 Agent 的编号, 纵坐标为 Agent 的状态值, 其中较粗的直线为一致状态 $\boldsymbol{X}^*$, 较细的曲线为 $t = 2\,000$ 时, 每个 Agent 分布中心点和方差. 相关实验结果说明:

1) 抑噪算子 $\varepsilon(t) = t^{-0.2}$ 时, 显然 $t^{-0.2} \prec t^{-1}$, 理论上, 当 t 为充分大时, Agent 状态应以 $\boldsymbol{X}^*$ 为中心呈正态分布, 但从图 4 (a) 的结果可以看出, 分布中心似乎与 $\boldsymbol{X}^*$ 间存在一定误差, 这是因为实验中的 Agent 分布是一个统计量, 当 Agent 分布范围较大时, 统计结果与实验的次数相关, 增加实验次数即可缩小上述误差.

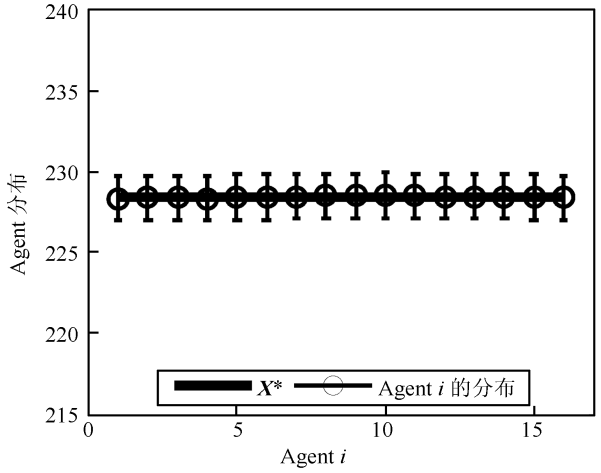
同样地, $t^{-0.2} \prec t^{-0.5}$, NS-DHA 噪声不可控, 从图 4 (a) 结果可以看出, $t = 2\,000$ 时, Agent 大体上以 $\boldsymbol{X}^*$ 为中心呈正态分布, 且方差会随着 t 的增大而趋于无穷.



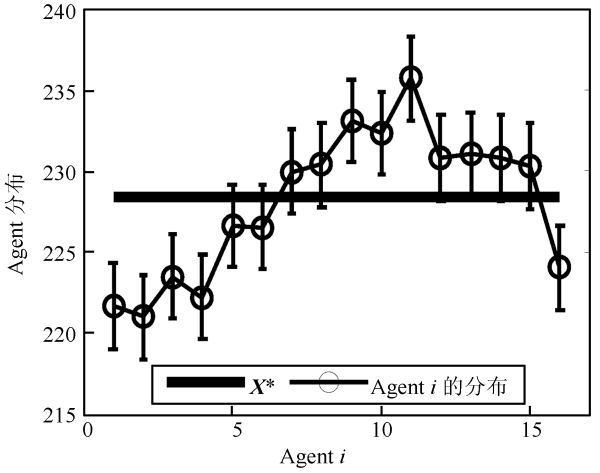
(a) $\varepsilon(t) = t^{-0.2}$时, Agent 分布中心及方差
(a) The center and variance of agent distribution when $\varepsilon(t) = t^{-0.2}$



(b) $\varepsilon(t) = t^{-0.8}$时, Agent 分布中心及方差
(b) The center and variance of agent distribution when $\varepsilon(t) = t^{-0.8}$



(c) $\varepsilon(t) = t^{-1}\log_{10}t$ 时, Agent 分布中心及方差
(c) The center and variance of agent distribution when $\varepsilon(t) = t^{-1}\log t$



(d) $\varepsilon(t) = t^{-1.5}$时, Agent 分布中心及方差
(d) The center and variance of agent distribution when $\varepsilon(t) = t^{-1.5}$

图 4 系统存在噪声时, 不同 $\varepsilon(t)$, Agent 分布的中心及方差

Fig. 4 The center and variance of agent distribution $\varepsilon(t)$ when system is with noise

2) 图 4 (b) 和图 4 (c) 分别为 $\varepsilon(t)$ 等于 $t^{-0.8}$ 和 $t^{-1}\lg t$ 时 Agent 状态分布曲线, 从图中结果可以看出, 此时 Agent 状态以 $\boldsymbol{X}^*$ 为中心呈正态分布, 且方差随着 t 增大而趋于稳定, 由于 $t^{-0.5} \prec t^{-0.8} \prec t^{-1}\lg(t) \prec t^{-1}$, 这也印证了推论 1 结论的正确性.

比较图 4 (c) 和图 4 (b) 可以看出, 在相同的条件下, $\varepsilon(t) = t^{-1}\lg t$ 时, Agent 最终分布方差要小于 $\varepsilon(t) = t^{-0.8}$ 时的情形. 由定理 2 结论可知, 若 $\varepsilon(t)$ 的阶越高, 噪声的抑制效果越好, 结合推论 1 可以得出, 当 $t^{-0.5} \prec \varepsilon(t) \prec t^{-1}$ 时, NS-DHA 使 Agent 最终状态以 $\boldsymbol{X}^*$ 为中心呈正态分布, 且 $\varepsilon(t)$ 越接近 t^{-1} , Agent 分布方差越小.

3) 图 4 (d) 为 $\varepsilon(t) = t^{-1.5}$ 时 Agent 状态分布曲线, 从实验结果可以看出, Agent i 以 $x_i^{\wedge}$ 为中心呈正态分布, 其方差随着 t 增大而趋于稳定, 这是因为首先 $\varepsilon(t) = t^{-1.5}$ 为 $t^{-0.5}$ 的高阶无穷小, 其噪声是可控的, 因此 Agent 最终分布方差是稳定的; 同样地, $\varepsilon(t) \succ t^{-1}$, 考察式 (16) 右半部分的前项, 此时, $\lim_{t\to\infty}\prod_{k=0}^{t}\mathcal{A}(k)\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}^{\wedge}$, 这里 $\boldsymbol{X}^{\wedge} = [x_1^{\wedge}, \cdots, x_n^{\wedge}]^{\mathrm{T}}$, 若 $i \neq j$, 有 $x_i^{\wedge} \neq x_j^{\wedge}$, 因此对于任意 Agent i, 其最终状态将以 $x_i^{\wedge}$ 为中心呈正态分布.

4.3 Agent 分布方差与执行效率

当一致性系统存在噪声时, 我们总是希望 Agent 能以 x^* 为中心, 且分布范围尽可能小. 与此同时, 状态趋于 x^* 的速度尽可能快. 令 $D(t) = \sqrt{\boldsymbol{H}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^*}$ 为所有 Agent 分布中心向量 $\boldsymbol{H}(t)$ 与 $\boldsymbol{X}^*$ 距离, $AVGSTD(t) = (\sum_{i=1}^{n} z_i(t))/n$ 为所有 Agent 分布方差的平均值, 其中, $\boldsymbol{H}(t) = [h_1(t),$

$\cdots$, $h_n(t)]^{\mathrm{T}}$, $h_i(t) = (\sum_{j=1}^{s} x_i^j(t))/s$, $z_i(t) = \mathrm{std}_{j=1,\cdots,s}(x_i^j(t))$, $\mathrm{std}_{j=1,\cdots,s}(\cdot)$ 为方差函数, s 为统计的次数, 在本实验中 $s = 100$. 取 $\varepsilon(t)$ 分别等于 $t^{-0.6}$, $t^{-0.8}$ 和 $t^{-1}\mathrm{lg}t$, 这三个抑噪算子的阶均在 $t^{-0.5}$ 和 t^{-1} 之间, 且 $t^{-0.5} \prec t^{-0.6} \prec t^{-0.8} \prec t^{-1}\mathrm{lg}(t) \prec t^{-1}$. 重复执行 NS-DHA, 并考察执行过程中 Agent 分布的变化情况, 相关实验结果如图 5 和表 2 所示.

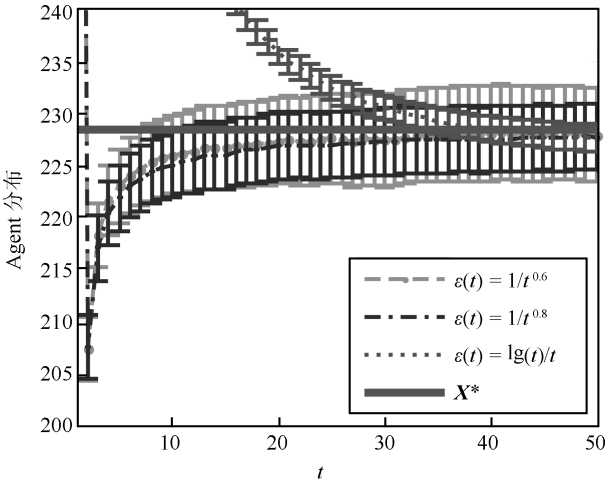


图 5　$\varepsilon(t)$ 分别等于 $t^{-0.6}$, $t^{-0.8}$, $t^{-1}\mathrm{lg}t$ 时, Agent 分布中心及方差的变化过程

Fig. 5　The distribution center and variance change process of agent, when $\varepsilon(t)$ equals to $t^{-0.6}$, $t^{-0.8}$, and $t^{-1}\mathrm{lg}t$, respectively

图 5 展示了 Agent 分布的变化过程, 理论上当 $t^{-0.5} \prec \varepsilon(t) \prec t^{-1}$ 时, $\varepsilon(t)$ 的阶越高, 即越接近 t^{-1}, Agent 最终分布的方差越小; 另一方面, $\varepsilon(t)$ 的阶越低, 即越接近 $t^{-0.5}$, Agent 趋于 x^* 的速度越快. 不难看出, 图 5 中的实验结果与理论结果是一致的, 当 $\varepsilon(t) = t^{-0.6}$ 时, Agent 趋于 x^* 的速度最快, 而当 $\varepsilon(t) = t^{-1}\mathrm{lg}(t)$ 时, Agent 趋于 x^* 的速度最慢.

通过表 2 可以得出, 当 $s, t \to \infty$ 时, Case 1 ∼ 3 的 $D(t)$ 值趋于 0, 且 Case 1 的收敛速度最快, Case 2 次之, 而 Case 3 收敛速度最慢. 比较表 2 中的 Case 1 ∼ 3 可以看出, $D(t)$ 的变化符合上述规律. $t = 100$ 时, Case 1 和 Case 2 的 $D(t)$ 值趋于稳定, 而 Case 3 的 $D(t)$ 值依然较大, 这表明 $\varepsilon(t)$ 等于 $t^{-0.6}$, $t^{-0.8}$ 时, $D(t)$ 的收敛速度明显快于 $\varepsilon(t)$ 等于 $t^{-1}\mathrm{lg}(t)$ 时的情形.

从表 2 中还可以发现, $t = 500$ 时, Case 3 的 $D(t)$ 值最小, 而 Case 1 的 $D(t)$ 值最大, 这是由于 $D(t)$ 是一个统计量, 由于 Case 1 中 Agent 分布的方差较大, 统计次数 s 会影响 $D(t)$ 结果, 统计次数 s 和时间 t 越大, 这三种情况的 $D(t)$ 值差距就越小. 表 2 中的数据能更加详尽和具体地说明上述事实.

考察表 2 的 $AVGSTD(t)$ 值可以发现, $\varepsilon(t)$ 等于 $t^{-0.6}$ 时, Agent 最终的平均方差最大; 而 $\varepsilon(t)$ 等于 $t^{-1}\mathrm{lg}(t)$ 时, Agent 最终的平均方差最小. 综上所述可以得出, 若抑噪算法使 Agent 最终分布方差较小, 一定程度上会牺牲算法收敛至 x^* 的效率.

在近期的一些研究中[26−28], 通常将函数 $(t+1)^{-1}$ 作用于 Laplacian 矩阵 $\mathcal{L}$, 这相当于令本文中抑噪算子 $\varepsilon(t) = (t+1)^{-1}$, 此时, 理论上当 $t \to \infty$ 时, Agent 将以非一致向量 $\boldsymbol{X}^{\wedge}$ 为中心呈正态分布. 以下通过实验和对比具体阐述这种抑噪策略所存在的问题.

设 Agent i 的状态 $x_i \in [b_l, b_h]$, 其所携噪声方差为 σ_i^2, $i = 1, \cdots, n$, 定义信噪比 $P = (\max \sigma_i^2)/(\min |b_h - b_l|)$, 即 P 为 Agent 所携噪声的最大方差与包含所有 Agent 可能状态的最小区间之比. 假设系统的终止时间为 T, 称 $Err = (\sum_{j=1}^{s} \sqrt{(\boldsymbol{X}^j - \boldsymbol{X}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}^j - \boldsymbol{X}^*)})/s$ 为系统的平均误差, $E_M = \sqrt{(\boldsymbol{X}^{Mean} - \boldsymbol{X}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}^{Mean} - \boldsymbol{X}^*)}$ 为系统的均值误差, 其中, $\boldsymbol{X}^j = [x_1^j(T), \cdots, x_n^j(T)]$, $\boldsymbol{X}^{Mean} = [x_1^{Mean}, \cdots, x_n^{Mean}]^{\mathrm{T}}$, $x_i^{Mean} = (\sum_{j=1}^{s} x_i^j(T))/s$, s 为统计的次数. 当 $\boldsymbol{X}^{\wedge} \neq \boldsymbol{X}^*$ 时, 除 Agent 所携噪声外, 均值误差是影响系统平均误差的另一个主要因素, 取抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 分别等于 $t^{-0.6}$, $t^{-0.8}$, $t^{-1}\mathrm{lg}t$, $(t+1)^{-1}$, 令 $s = 100$, $T = 1\,000$, 不同情况下的系统平均误差和均值误差如表 3 所示.

通过表 3 中的数据和对比可以得出:

表 2　$\varepsilon(t)$ 分别等于 $t^{-0.6}$, $t^{-0.8}$, $t^{-1}\mathrm{lg}(t)$ 时, 不同时间 t, Agent 分布中心及方差的变化数据表

Table 2　The distribution center and variance change process of agent at different time, when $\varepsilon(t)$ equals to $t^{-0.6}$, $t^{-0.8}$, and $t^{-1}\mathrm{lg}(t)$, respectively

		$D(t)$					$AVGSTD(t)$				
No.	$\varepsilon(t)$	$t=1$	$t=10$	$t=50$	$t=100$	$t=500$	$t=1$	$t=10$	$t=50$	$t=100$	$t=500$
Case 1	$t^{-0.6}$	39.839	4.5519	1.3415	1.3664	1.4091	3.1472	3.6853	4.1346	4.2785	4.20377
Case 2	$t^{-0.8}$	39.498	8.9353	2.0151	1.0787	1.0842	3.1455	3.1966	3.2508	3.2698	3.29000
Case 3	$t^{-1}\mathrm{lg}(t)$	531.29	135.74	21.374	8.4147	0.9255	0.9637	1.4449	1.5819	1.6199	1.63073

表 3 $s = 100$, $T = 1\,000$, $\varepsilon(t)$ 分别等于 $t^{-0.6}$, $t^{-0.8}$, $t^{-1}\lg(t)$ 和 $(t+1)^{-1}$ 时, 系统平均误差与均值误差对比

Table 3 The contrast of system average error and mean error when$\varepsilon(t)$ equals to $t^{-0.6}$, $t^{-0.8}$, $t^{-1}\lg(t)$, and $(t+1)^{-1}$, respectively ($s = 100$, $T = 1\,000$)

		$P = 0.25$		$P = 0.025$		$P = 0.0025$	
No.	$\varepsilon(t)$	Err	E_M	Err	E_M	Err	E_M
Case 1	$t^{-0.6}$	129.43	1.58	137.61	2.84	142.80	5.15
Case 2	$t^{-0.8}$	74.24	1.65	80.45	3.33	88.75	14.57
Case 3	$t^{-1}\lg(t)$	54.37	2.57	55.10	19.14	99.62	78.23
Case 4	$(t+1)^{-1}$	58.20	12.36	104.53	75.56	545.01	539.40

1) 比较 Case 1 ∼ 3 与 Case 4 可以看出, Case 1 ∼ 3 的均值误差明显小于 Case 4 的均值误差, 这是因为在理论上当 s, $t \to \infty$ 时, Case 1 ∼ 3 的均值误差 $E_M \to 0$ (Agent 状态分布中心趋于 x^*), 而 Case 4 却不能保证这一点.

2) 由之前的理论分析和实验我们已经知道, 算法噪声可控时, 抑噪算子的阶越高, 最终 Agent 分布的方差越小, 而对于不同的抑噪算子, 最终系统噪声的方差是收敛和确定的, 因此, 由噪声引起的随机误差仅与不同的抑噪算子相关, 而与信噪比 P 无关; 另一方面, 当 Agent 状态分布中心 $\boldsymbol{X}^{\wedge} \neq \boldsymbol{X}^*$ 时, Agent 状态分布范围越大, $\boldsymbol{X}^{\wedge}$ 与 $\boldsymbol{X}^*$ 间的距离就越大, 其对应的均值误差也就越大, 从而我们可以得出: 均值误差对系统平均误差的影响随信噪比 P 的减小而增大. 表 3 中的数据也印证了这一事实, 比较 Case 1、Case 2 与 Case 4 可以看出, 当 $P = 0.25$ 时, 尽管 Case 1 和 Case 2 的均值误差小于 Case 4 的均值误差, 但 Case 1 和 Case 2 的系统平均误差却大于 Case 4 的系统均值误差. 而当 $P = 0.0025$ 时, Case 4 的均值误差和系统平均误差都是最大的.

3) 由于 $t^{-1}\lg t$ 与 $(t+1)^{-1}$ 的阶充分接近, 两者对噪声的抑制作用基本相同, 同时 $t^{-1}\lg t \prec (t+1)^{-1}$, 理论上, 当 $s, t \to \infty$ 时, Case 3 的均值误差趋于 0, 因此, 对于 P 的三个不同取值, Case 3 的均值误差和系统平均误差均小于 Case 4, 且随着 P 的减小, 两者间的精度差异逐渐扩大, 当 $P = 0.0025$ 时, Case 3 的精度要远好于 Case 4 的精度.

综上所述, 在实际应用中, 应选择阶位于 $t^{-0.5}$ 和 t^{-1} 之间的函数作为抑噪算子, 并根据实际情况在精度和效率间进行权衡[1].

5 结论

本文在已有研究的基础上, 对线性一致性算法的噪声问题进行了讨论, 针对线性一致性算法的噪声不可控性, 提出采用抑噪算子 $\varepsilon(t)$ 控制噪声的策略, 并得出以下结论:

1) 当 $\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 等价或低阶无穷小时, 抑噪算法噪声不可控, $t \to \infty$ 时 Agent 状态发散, 且 $\varepsilon(t)$ 的阶越低, 其发散的速度越快.

2) 当 $\varepsilon(t)$ 为 $t^{-0.5}$ 的高阶无穷小及 t^{-1} 的低阶无穷小, 当 $t \to \infty$ 时 Agent 的状态将以 x^* 为中心, 某一确定值为方差呈正态分布, 且 $\varepsilon(t)$ 越接近 t^{-1}, Agent 分布的方差越小, $\varepsilon(t)$ 越接近 $t^{-0.5}$, Agent 分布中心收敛至 x^* 的速度越快.

3) 当 $\varepsilon(t)$ 为 t^{-1} 等价或高阶无穷小时, 则在抑噪函数 $\varepsilon(t)$ 的作用下, $t \to \infty$ 时系统噪声方差是有界的, 但 Agent i 状态分布的中心不能收敛至 x^*.

最后, 以 DHA 为例, 对上述理论结果进行了验证、分析和说明.

多智能体一致性问题在诸多领域有着广泛的实际背景, 就某一具体问题而言, 通常与图 $\mathcal{G}$ 的某一具体结构相对应, 实际问题的多样性决定了 $\mathcal{G}$ 结构的多样性. 本文从理论上为这一类问题的噪声控制提供了依据, 并提出了基于抑噪算子的噪声控制策略. 关于算法的复杂度和收敛速度, 广义上与图 $\mathcal{G}$ 的 Laplacian 矩阵 $\mathcal{L}$ 的次小特征值有关, 在以往的研究中已经给出了较为完备的结果, 引入噪声后, 一些问题与本文密切相关, 如 Agent 最终分布方差界限、收敛速度估计、噪声敏感性分析等, 这些问题相对复杂, 用较短的篇幅很难表述清楚, 我们已在另一论文中以某些实际应用为背景, 对上述问题进行了专门的讨论.

[1] 本文中所涉及的实验源程序可从以下地址下载: http://download.csdn.net/detail/dfdz09/7932679

References

1 Reynolds C W. Flocks, herds and schools: a distributed behavioral model. In: Proceedings of the 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York, USA: ACM, 1987. 25−34

2 Vicsek T, Czirok A, Ben-Jacob E, Cohen I, Shochet O. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 1995, **75**(6): 1226−1229

3 Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988−1001

4 Benediktsson J A, Swain P H. Consensus theoretic classification methods. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 1992, **22**(4): 688−704

5 Moreau L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(2): 169−182

6 Li Z K, Duan Z S, Chen G R, Huang L. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2010, **57**(1): 213−224

7 Li Z, Duan Z, Chen G. Dynamic consensus of linear multiagent systems. *IET Control Theory and Applications*, 2011, **5**(1): 19−28

8 Li Z K, Liu X D, Ren W, Xie L H. Distributed tracking control for linear multiagent systems with a leader of bounded unknown input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(2): 518−523

9 Wen G H, Duan Z S, Li Z K, Chen G R. Consensus and its L_2-gain performance of multi-agent systems with intermittent information transmissions. *International Journal of Control*, 2012, **85**(4): 384−396

10 Wen G H, Duan Z S, Li Z K, Chen G R. Flocking of multiagent dynamical systems with intermittent nonlinear velocity measurements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(16): 1790−1805

11 Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 215−233

12 Olfati-Saber R. Evolutionary dynamics of behavior in social networks. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA: IEEE, 2007. 4051−4056

13 Olfati-Saber R, Jalalkamali P. Coupled distributed estimation and control for mobile sensor networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(10): 2609−2614

14 Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 401−420

15 Yu C H, Nagpal R. A self-adaptive framework for modular robots in a dynamic environment: theory and applications. *The International Journal of Robotics Research*, 2011, **30**(8): 1015−1036

16 Yu C H. Biologically-Inspired Control for Self-Adaptive Multiagent Systems [Ph. D. dissertation], Harvard University, USA, 2010.

17 Yu C H, Nagpal R. Biologically-inspired control for multi-agent self-adaptive tasks. In: Proceedings of the 24th AAAI Conference on Artificial Intelligence. Atlanta: AAAI, 2010. 1702−1709

18 Tran T M D, Kibangou A Y. Distributed design of finite-time average consensus protocols. In: Proceedings of the 2013 IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems. Rhine Moselle Hall, Koblenz, Germany: IFAC, 2013. 227−233

19 Wen G G, Penga Z X, Rahmania A, Yu Y G. Distributed leader-following consensus for second-order multi-agent systems with nonlinear inherent dynamics. *International Journal of Systems Science*, 2014, **45**(9): 1892−1901

20 Wen G G, Yu Y G, Peng Z X, Rahmani A. Distributed consensus tracking for second-order nonlinear multiagent systems with a specified reference state. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, **2014**: Article ID 320687, doi: 10.1155/2014/320687

21 Lu X Q, Lu R Q, Chen S H, Lu J H. Finite-time distributed tracking control for multi-agent systems with a virtual leader. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, **60**(2) 352−362

22 Busoniu L, Morarescu I C. Consensus for agents with general dynamics using optimistic optimization. In: Proceedings of the 52nd IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC-13). Florence, Italy: IEEE, 2013. 6735−6740

23 Long Y S, Liu S, Xie L H. Distributed consensus of discrete-time multi-agent systems with multiplicative noises. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, doi: 10.1002/rnc.3253

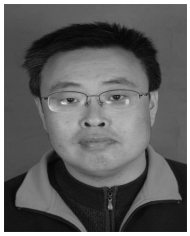
24 Garin F, Schenato L. Distributed estimation and control applications using linear consensus algorithms. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi = 10.1.1.382.9187, August 10, 2014

25 Min Hai-Bo, Liu Yuan, Wang Shi-Cheng, Sun Fu-Chun. An overview on coordination control problem of multi-agent system. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(10): 1557−1570 (闵海波, 刘源, 王仕成, 孙富春. 多个体协调控制问题综述. 自动化学报, 2012, **38**(10): 1557−1570)

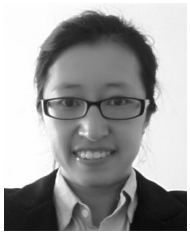
26 Sun Y G. Mean square consensus for uncertain multiagent systems with noises and delays. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, **2012**: Article ID 621060, doi: 10.1155/2012/621060

27 Huang M Y, Manton J H. Stochastic approximation for consensus seeking: mean square and almost sure convergence. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans LA: IEEE, 2007. 306−311

28 Huang M Y, Manton J H. Stochastic consensus seeking with noisy and directed inter-agent communication: fixed and randomly varying topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(1): 235−241



窦全胜 博士, 山东工商学院计算机与技术学院教授. 主要研究方向为智能科学理论与方法, 数据挖掘, 多主体技术和群体智能. 本文通信作者.
E-mail: li_dou@163.com
(**DOU Quan-Sheng** Ph. D., professor at the School of Computer Science and Technology, Shandong Institute of Business and Technology. His research interest covers intelligent scientific theory and method, data mining, multi-agent technology, and swarm intelligence. Corresponding author of this paper.)



丛 玲 山东师范大学信息科学与工程学院硕士研究生. 主要研究方向为群体智能. E-mail: clfighting@sina.com
(**CONG Ling** Master student at the School of Information Science and Engineering, Shandong Normal University. Her main research interest is swarm intelligence.)

姜 平 山东工商学院计算机与技术学院讲师. 主要研究方向为人工智能, 生物信息计算.
E-mail: jiangping19792005@163.com
(**JIANG Ping** Lecturer at the School of Computer Science and Technology, Shandong Institute of Business and Technology. His research interest covers artificial intelligence and biological information calculation.)

史忠植 中国科学院计算技术研究所研究员. 主要研究方向为智能科学理论与方法, 知识工程, 神经计算, 数据挖掘, 机器学习. E-mail: shizz@ics.ict.ac.cn
(**SHI Zhong-Zhi** Professor at the Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers intelligent scientific theory and method, knowledge engineering, neural computing, data mining, and machine learning.)