分区四元数姿态控制

张洪华 [1]　关轶峰 [1]　胡锦昌 [1]　王泽国 [1]

摘　要　提出了一种基于分区控制策略的四元数姿态控制律. 其基本思想是基于姿态四元数误差分区设计目标角速度, 由此将问题降阶为一个角速度跟踪问题; 基于不同的角速度跟踪误差, 设计了切换类型的抗干扰姿态控制律. 该控制策略可以使得姿态快速收敛, 并且在合适的参数选择条件之下还能同时满足控制力矩的饱和约束. 通过综合相平面和 Lyapunov 函数的分析方法严格证明了闭环系统全局收敛的性质. 最后, 通过数值仿真验证了本文提出的控制方案的有效性.

关键词　分区四元数控制, 姿态控制, 饱和控制, 抗干扰控制

引用格式　张洪华, 关轶峰, 胡锦昌, 王泽国. 分区四元数姿态控制. 自动化学报, 2015, **41**(7): 1341−1349

DOI　10.16383/j.aas.2015.c140624

A Novel Attitude Control Strategy Based on Quaternion Partition

ZHANG Hong-Hua[1]　GUAN Yi-Feng[1]
HU Jin-Chang[1]　WANG Ze-Guo[1]

Abstract　A novel controller based on quaternion partition is proposed for controlling rigid-body attitude with constant disturbances. By partitioning the quaternion into different regions, different virtual angular velocities are determined, and the control problem is reduced to tracking these virtual angular velocities. Then, switching laws for angular velocity tracking are also designed depending on the angular velocity tracking errors. The closed-loop system enjoys the property of fast attitude convergence, and the requirement of actuator saturation can also be satisfied through appropriate choice of relevant parameters. By means of phase plane and Lyapunov stability analysis, it is proven that the closed loop is globally convergent. Finally, the effectiveness of proposed method is illustrated by numerical simulations.

Key words　Quaternion partition, attitude control, actuator saturation, disturbance rejection

Citation　Zhang Hong-Hua, Guan Yi-Feng, Hu Jin-Chang, Wang Ze-Guo. A novel attitude control strategy based on quaternion partition. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(7): 1341−1349

航天器姿态控制的两个基本问题是姿态机动和姿态跟踪, 前者的控制品质体现在快速性, 而后者的控制品质体现在消除干扰力矩获得高精度. 其中, 一些工程上的实际约束是必须考虑的, 包括: 控制力矩受限, 即不能逾越飞轮或喷气执行机构的最大控制力矩; 角速度限制, 以满足航天器平稳性需求、导航带宽需求以及角速率陀螺量程等要求; 控制模式一体化要求, 尽可能将机动和跟踪两种模式用一个统一公式表达, 这样可在尽可能少的控制计算机存储空间内实现软件代码. 嫦娥三号着陆器在动力下降过程中的姿态控制集中体现了上述需求. 在主减速阶段姿态控制要求平稳、高精度以利于保证导航精度和制导精度, 在姿态调整阶段则要求快速姿态机动以可靠捕获接近阶段的位置速度以及相应轨迹, 随后又要求高精度姿态控制. 这里的突出问题是: 推进剂不平衡排放导致大干扰力矩存在, 角速度大小也受到严格约束.

就理论上的研究而言, 目前许多学者已经应用各种现代控制理论到航天器姿态控制的研究当中, 如自适应控制[1]、滑模控制[2]、饱和控制[3]、退步法[4] 等, 但由于控制器的复杂性和工程约束等各方面的原因, 目前尚无实际应用的案例.

就目前而言, 多种已经飞行实现的姿态控制律主要包括相平面控制和 PID 控制. 考虑到航天器用于姿态控制的推力器一般只能采用开关控制, 因此充分利用其开关特性的相平面控制方法在一开始就得到了广泛应用, 如早期美国的 Apollo 飞船的姿态控制[5], 以及现在美国火星着陆器[6] 和日本隼鸟号[7] 的姿态控制. 相平面控制的优点是方法直观, 可以根据工程约束对相平面进行灵活的分区, 同时获得快速控制性能[8]. 然而, 对含干扰或挠性的系统则难以获得高精度控制, 且缺乏分析闭环系统稳定性的有效手段.

PID 控制方法则一定程度上克服了相平面控制的这些缺点. 它首先利用经典或现代控制理论来设计相关控制参数, 然后通过 PWM 调制推力器开关时间来近似控制量. 该方法通过积分项消除干扰的影响以获得较高控制精度, 也容易利用相关控制理论来保证闭环的稳定性, 因此在具有大干扰、含挠性和/或液体晃动等谐振模态的轨控情形下得到了广泛应用[9]. 航天器姿态的 PID 控制方法又可分为两类. 1) 基于欧拉角描述的局部线性化 PID 控制, 该方法适用于小角度误差的情形, 其典型成功代表是静止轨道卫星变轨阶段的姿态控制[10]. 然而应当指出尽管 PD 控制的运动形态已经描述得比较完整, 但存在积分项的 PID 控制下的二阶积分环节的运动特性却难以在相平面上进行刻划, 且很少在文献中见到. 这样当存在上述工程约束时, 一些基础问题需要从头考虑. 另外, PID 控制存在 Windup 现象[11], 这有可能导致角速度的超调问题, 这对工程应用是不利的. 2) 以四元数等非线性运动学描述的 PID 控制[12−15], 它适用于大范围姿态机动的情形, 其基本特征是从非线性角度与全局范围来推广和论证第一类方法. 它除了具有线性化 PID 控制的特点外, 还存在姿态四元数表示的不唯一性, 这会导致诸如展开和全局稳定等问题. 尽管这些问题已得到一定程度解决[16−17], 然而, 值得注意的是, 角速度受约束、带积分控制的过程品质等工程上存在的问题依然需要进一步研究[18].

以此为背景, 本文提出了分区四元数姿态控制方法. 其基本思想是: 1) 以绕欧拉轴的转角对四元数表示的姿态进行分区, 形成内区和外区; 2) 在外区采用绕欧拉轴的恒角速度控制获得特征转动, 使其能快速机动到内区; 3) 在内区采用线性速度 – 四元数目标轨迹的 PI 控制, 使得在内区有尽可能平稳的运动轨迹. 本文主要贡献在于: 通过采用四元数内外区分开设计的姿态控制器, 使着陆器可以同时满足快速性和平稳性要求, 并且从理论上分析了闭环系统收敛性. 我们注意到角速度受限的 PD 控制有一些结果, 见 Wie 的专著[19], 与其相比较本文创新之处在于: 本文考虑了干扰力矩的作用, 采用了积分控制项以消除其影响, 并且使得角速度满足约束的方法是通过规划目标角速度而不是限制角度来实现的; 此外控制轨迹的受控优化和完整刻划也是本文特色.

收稿日期 2014-09-01　录用日期 2015-02-16
Manuscript received September 1, 2014; accepted February 16, 2015
国家自然科学基金 (61403031) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61403031)
本文责任编委 崔平远
Recommended by Associate Editor CUI Ping-Yuan
1. 中国空间技术研究院北京控制工程研究所 北京 100190
1. Beijing Institute of Control Engineering, China Academy of Space Technology, Beijing 100190

1 问题描述

令 "o" 代表惯性坐标系, "s" 代表航天器本体坐标系, "d" 代表航天器目标坐标系. 除非特别说明, 本文涉及所有矢量均为在 "s" 系上表示, 矢量相对时间导数均为在 "s" 系上进行. 为说明问题方便起见, 本文设目标系与惯性系一致; 对于两者不同的情形, 可以通过引入姿态误差概念对本文结果进行自然推广.

设从 "o" 系旋转到 "s" 系的欧拉轴单位矢量为 $\boldsymbol{e} = [e_1, e_2, e_3]^{\mathrm{T}}$, 欧拉角为 θ, 则 "s" 系相对 "o" 系的姿态可用单位误差四元数表示:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} & q_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

其中, $\bar{\boldsymbol{q}} = [q_1, q_2, q_3]^{\mathrm{T}}$, $q_1 = e_1 \sin\frac{\theta}{2}$, $q_2 = e_2 \sin\frac{\theta}{2}$, $q_3 = e_3 \sin\frac{\theta}{2}$ 是四元数的矢量部分, $q_4 = \cos\frac{\theta}{2}$ 是四元数标量部分, 满足 $|q_4|^2 + \|\bar{\boldsymbol{q}}\|^2 = 1$.

为简化问题难度和便于表述主要研究思路, 首先需要做如下简化: 将着陆器处理为刚体, 忽略液体晃动与挠性的影响; 忽略姿态对轨道控制的耦合作用, 认为轨道控制对姿态控制系统的影响简化为常值的轨控干扰力矩; 姿态控制执行机构认为是输出连续控制量.

记 "s" 系相对于 "o" 系的旋转角速度为 $\boldsymbol{\omega}$, 则航天器姿态运动学可以表示为[9]

$$\dot{\bar{\boldsymbol{q}}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} q_4 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \bar{\boldsymbol{q}} \tag{2}$$

$$\dot{q}_4 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{q}} \tag{3}$$

其中, "$\cdot$" 表示相对时间的导数, $\boldsymbol{\omega}\times$ 是叉乘矩阵, 即对于 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_1, \omega_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^3$, 有:

$$\boldsymbol{\omega}\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

设 "s" 系坐标原点位于卫星质心, I 是航天器本体相对于 "s" 系的惯量矩阵. 考虑纯刚体情形, 则受扰航天器姿态动力学方程可以表示为[9]

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d} \tag{5}$$

其中, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^3$ 是控制力矩向量, $\boldsymbol{d} \in \mathbf{R}^3$ 是扰动力矩向量. 考虑常值干扰的情形, 即 $\boldsymbol{d}$ 满足:

$$\dot{\boldsymbol{d}} = 0 \tag{6}$$

考虑到干扰力矩一般变化较缓慢, 并且当被抵消的速度足够快时许多时变干扰也可以被转化成慢变的形式, 因此设定干扰为常值在工程上具有可行性.

至此, 航天器姿态控制问题可以描述为: 依据数学模型 (2) 和 (3) 以及 (5) 和 (6), 构造控制规律 $\boldsymbol{\tau}$, 以消除干扰力矩影响并使得 "s" 系与 "d" 系趋于一致, 即当 $t \to \infty$ 时有:

$$\bar{\boldsymbol{q}}(t) \to 0,\ \boldsymbol{\omega}(t) \to 0 \tag{7}$$

2 控制律设计

考虑以四元数和角速度为维度的区域划分如图 1 所示. 阴影部分为 I 区 $\Omega_I = \{\boldsymbol{q} : \|\bar{\boldsymbol{q}}\| \le \bar{q}_T\}$, 其余为 II 区 $\Omega_{\mathrm{II}} = \{\boldsymbol{q} : \|\bar{\boldsymbol{q}}\| > \bar{q}_T\}$.

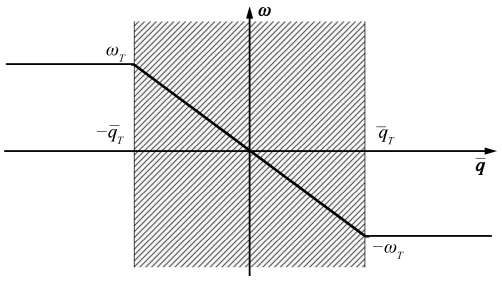


图 1 $\bar{\boldsymbol{q}}$-$\boldsymbol{\omega}$ 区域划分

Fig. 1 Domain partition of $\bar{\boldsymbol{q}}$-$\boldsymbol{\omega}$

根据式 (2) 和 (3) 以及图 1, 构造理想角速度如下:

$$\boldsymbol{\omega}_d = \begin{cases} -k\bar{\boldsymbol{q}}, & \text{若 } \boldsymbol{q} \in \Omega_{\mathrm{I}} \\ -\omega_T \dfrac{\bar{\boldsymbol{q}}}{\|\bar{\boldsymbol{q}}\|}, & \text{若 } \boldsymbol{q} \in \Omega_{\mathrm{II}} \end{cases} \tag{8}$$

这里, ω_T、$\bar{q}_T$ 为适当正数, $k = \omega_T/\bar{q}_T$. 式 (8) 意味着: 在 II 区, 理想角速度是沿欧拉轴以固定角速度 (如图 1 的两条横线) 进行特征转动直至进入 I 区; 在 I 区, 理想角速度是跟踪一条关于四元数的线性轨迹 (如图 1 的斜线), 直至进入零点附近任意小的区域.

引入 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d$, 于是有:

$$\dot{\boldsymbol{s}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_d = I^{-1}\left(-\boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d}\right) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_d \tag{9}$$

由此设计控制律为

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} + I\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + I\sigma_{M_1}\left(-k_1\boldsymbol{s} - k_2\boldsymbol{\alpha}\right), & \text{若 } \|\boldsymbol{s}\|_\infty \le \bar{s} \\ -\tau_{\max}\mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{s}\right), & \text{若 } \|\boldsymbol{s}\|_\infty > \bar{s} \end{cases} \tag{10}$$

$$\dot{\alpha}_i = \begin{cases} s_i, & \text{若 } |k_2\alpha_i| < M_2 \\ 0, & \text{若 } |k_2\alpha_i| = M_2 \text{ 且 } \alpha_i s_i > 0 \\ s_i, & \text{若 } |k_2\alpha_i| = M_2 \text{ 且 } \alpha_i s_i \le 0 \end{cases} \tag{11}$$

其中, $k_i > 0$, $i = 1, 2$ 是控制参数; $\mathrm{sgn}\left(\cdot\right) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 是矢量符号函数, 即对相应元素提取正负号; $\sigma_{\mathrm{M}_1}\left(\cdot\right) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 是矢量饱和函数, 即当相应分量的绝对值不超过 M_1 时取原来值, 大于 M_1 时取 M_1, 小于 $-M_1$ 时取 $-M_1$; $\boldsymbol{\alpha}(\cdot) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 表示积分算子在区间 $(-M_2/k_2, M_2/k_2)$ 内的投影, α_i (i=1, 2, 3) 表示其分量, 当 α_i 位于区间内时表示正常积分, 当到达区间边界时积分若会超出区间则不再积分并取边界值, 显然有 $|k_2\alpha_i| \le M_2$, 注意到一般取 $M_1 > M_2$; $\bar{s}$ 是适当的正数, $\|\boldsymbol{s}\|_\infty = \max\{|s_1|, |s_2|, |s_3|\}$; $\tau_{\max}$ 是单轴最大控制力矩.

式 (10) 和式 (11) 有着三方面的含义. 1) 对于无饱和限制情形, 控制规律事实上是关于 $\boldsymbol{s}$ 的 PI 控制形式, 此时闭环系统为 $\dot{\boldsymbol{s}} = -k_1\boldsymbol{s} - k_2\boldsymbol{\alpha} + I^{-1}\boldsymbol{d}$. 由于 $\boldsymbol{s}$ 的特殊形式, 它将闭环系统特征方程的最高阶次由 3 降为 2, 由此闭环系统运动形态变得更为容易刻划. 2) 控制规律考虑了角速度控制要求的限制, 一旦角速度超过某值以致于 $\|\boldsymbol{s}\|_\infty > \bar{s}$, 此时控制器将产生最大可能的控制力矩使之回到约束范围内. 3) 控制规律考虑了控制力矩的限幅, 包括积分项与总控制力矩的限幅, 尽管存在对陀螺力矩项 $\boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega}$ 和目标角加速度 $I\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ 的前馈, 但是可以证明在合适的参数选取之下这两项的大小是可以被控制的. 下面将证明, 在式 (10) 和式 (11) 控制下的闭环系统是全局收敛的. 首先将证明动力学方程的全局收敛性, 其次在动力学收敛的基础上, 证明运动学方程也是全局收敛的.

3　动力学收敛性证明

本部分将证明, 若 $\|\boldsymbol{s}(0)\|_\infty > \bar{s}$, 那么只要适当选择控制器的参数, 则闭环系统必将在有限时间内进入区域 $\|\boldsymbol{s}\|_\infty \le \bar{s}$; 另一方面, 若 $\|\boldsymbol{s}(0)\|_\infty \le \bar{s}$, 则状态将一直保持在该区域内并收敛到原点.

3.1　$\|\boldsymbol{s}(0)\|_\infty > \bar{s}$ 情形下的分析

其结论如引理 1 所示.

引理 1. 设姿态方程 (2) 和 (3) 以及 (5) 受控制规律 (8), (10) 和 (11) 的作用. 若下列条件成立:

1) $\tau_{\max} > \|\boldsymbol{d}\|_\infty$;

2) 控制参数 k 和 ω_T 适当小.

则对任意初始状态 $\|\boldsymbol{s}(0)\|_\infty > \bar{s}$, 有下列结论成立:

1) 角速度是全局有界的;

2) 存在 $t_1 < \infty$, 使有 $\|\boldsymbol{s}(t_1)\|_\infty \le \bar{s}$.

证明. 当 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty > \bar{s}$ 时, 有 $\boldsymbol{\tau} = -\tau_{\max}\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})$, 代入姿态动力学方程可得:

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega}\times I\boldsymbol{\omega} - \tau_{\max}\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{d} \tag{12}$$

a) 结论 1) 的证明

设 $\gamma > 0$ 且满足:

$$\gamma > \frac{2(\tau_{\max} + \|\boldsymbol{d}\|_\infty)}{\tau_{\max} - \|\boldsymbol{d}\|_\infty} \tag{13}$$

假设 $\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2 > \sqrt{3}\gamma\omega_T$, 则必存在某一分量 n, 使得 $|\omega_n| \ge \gamma\omega_T$, $n \in \{1,2,3\}$. 构造函数 $V_\omega = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} I\boldsymbol{\omega}/2$, 考虑使得 $\dot{V}_\omega$ 最大的情形, 即假设其他两轴的角速度绝对值均小于 ω_T. 注意到 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}\times I\boldsymbol{\omega}) = 0$, 从而有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\omega =& \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\left[-\tau_{\max}\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{d}\right] = \\
&\sum_{i=1}^{3}\left[-\tau_{\max}\omega_i\mathrm{sgn}(\omega_i - \omega_{d,i}) + \omega_i d_i\right] \le \\
&-\tau_{\max}|\omega_n| - \tau_{\max}\sum_{i=1,i\ne n}^{3}\omega_i\mathrm{sgn}(\omega_i - \omega_{d,i}) + \\
&|\omega_n|\|\boldsymbol{d}\|_\infty + \sum_{i=1,i\ne n}^{3}(\omega_i d_i) \le \\
&-(\tau_{\max} - \|\boldsymbol{d}\|_\infty)\gamma\omega_T + 2\omega_T(\tau_{\max} + \|\boldsymbol{d}\|_\infty) = \\
&-(\tau_{\max} - \|\boldsymbol{d}\|_\infty)\left[\gamma - \frac{2(\tau_{\max} + \|\boldsymbol{d}\|_\infty)}{\tau_{\max} - \|\boldsymbol{d}\|_\infty}\right]\omega_T
\end{aligned} \tag{14}$$

其中应用了 $\|\boldsymbol{\omega}_d\|_\infty \le \omega_T$ 的关系式. 考虑到式 (13), 可知有 $\dot{V}_\omega < 0$, 从而角速度会在有限时间内进入到区域 $\Omega := \left\{\boldsymbol{\omega}\,\middle|\,\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2 \le \sqrt{3}\gamma\omega_T\right\}$ 的球形区域里, 而一旦进入到该区域, 角速度将满足如下关系式:

$$\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2 \le \frac{\lambda_{\max}(I)}{\lambda_{\min}(I)}\sqrt{3}\gamma\omega_T$$

另外, 在减小到区域 Ω 的过程中, 角速度将会保持在如下区域:

$$\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2 \le \frac{\lambda_{\max}(I)}{\lambda_{\min}(I)}\|\boldsymbol{\omega}(0)\|_2$$

而当 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty \le \bar{s}$ 时, 有:

$$\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_\infty \le \|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty + \|\boldsymbol{\omega}_d\|_\infty \le \bar{s} + \omega_T$$

可见, 角速度会满足如下有界性要求:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_2 \le \max\Bigg\{&\frac{\lambda_{\max}(I)}{\lambda_{\min}(I)}\|\boldsymbol{\omega}(0)\|_2, \\
&\frac{\lambda_{\max}(I)}{\lambda_{\min}(I)}\sqrt{3}\gamma\omega_T, \sqrt{3}(\bar{s} + \omega_T)\Bigg\}, \forall t > 0
\end{aligned}$$

其中 γ 满足式 (13).

b) 结论 2) 的证明

采用反证法. 假设对 $\forall t > 0$, 恒有 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty > \bar{s}$. 上述已证明角速度的全局有界性, 由于 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d$ 且 $\|\boldsymbol{\omega}_d\|_\infty \le \omega_T$, 因此 $\boldsymbol{s}$ 也是全局有界的. 注意到 $\boldsymbol{\omega}_d = R(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\omega}_d$, 从而有:

$$\begin{aligned}
I\dot{\boldsymbol{s}} =& I\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega} - R(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\omega}_d)}{\mathrm{d}t} = \\
&-\boldsymbol{\omega}\times I\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d} - IR(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + I\boldsymbol{\omega}\times R(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\omega}_d = \\
&-\boldsymbol{s}\times I\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\times I\boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}_d\times I\boldsymbol{s} - \boldsymbol{\omega}_d\times I\boldsymbol{\omega}_d + \boldsymbol{\tau} + \\
&\boldsymbol{d} - IR(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - I\boldsymbol{\omega}_d\times\boldsymbol{s} = \\
&-\boldsymbol{s}\times I\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\times I\boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_d\times I + I\boldsymbol{\omega}_d)\boldsymbol{s} + \\
&\boldsymbol{d} + \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}_d\times I\boldsymbol{\omega}_d - IR(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d
\end{aligned} \tag{15}$$

构造函数 $V_s = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} I\boldsymbol{s}/2$, 则有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_s =& \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\left[-\boldsymbol{s}\times I\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}\times I\boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_d\times I + I\boldsymbol{\omega}_d)\boldsymbol{s} + \right. \\
&\left.\boldsymbol{d} + \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}_d\times I\boldsymbol{\omega}_d - IR(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\right] = \\
&\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\left[-\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})\tau_{\max} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{\omega}_d\times I\boldsymbol{\omega}_d - IR(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\right]
\end{aligned} \tag{16}$$

其中应用了 $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}_d\times I + I\boldsymbol{\omega}_d)\boldsymbol{s} = 0$ 的关系式.

注意到

$$\|\boldsymbol{\omega}_d\times I\boldsymbol{\omega}_d\|_\infty \le \|I\|_\infty\|\boldsymbol{\omega}_d\|_\infty^2 \le \|I\|_\infty\omega_T^2 \tag{17}$$

且在 I 区有

$$\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| = \left\|-k\dot{\bar{\boldsymbol{q}}}\right\| = \frac{k}{2}\left\|(q_4E_3 + \bar{\boldsymbol{q}}\times)\boldsymbol{\omega}\right\| \le \frac{k}{2}\|\boldsymbol{\omega}\| < \infty \tag{18}$$

同时在 II 区有:

$$\begin{aligned}
\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| =& \left\|\omega_T\left(\frac{\dot{\bar{\boldsymbol{q}}}}{\|\bar{\boldsymbol{q}}\|} - \bar{\boldsymbol{q}}\frac{\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\dot{\bar{\boldsymbol{q}}}}{\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^3}\right)\right\| = \\
&\frac{\omega_T}{\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^3}\left\|\left(\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^2 E_3 - \bar{\boldsymbol{q}}\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\right)\dot{\bar{\boldsymbol{q}}}\right\| = \\
&\frac{\omega_T}{\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^3}\left\|-\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{q}}\times\bar{\boldsymbol{q}}\times(q_4E_3 + \bar{\boldsymbol{q}}\times)\boldsymbol{\omega}\right\| \le \\
&\frac{\omega_T}{2\|\bar{\boldsymbol{q}}\|}\|\boldsymbol{\omega}\| = \frac{\omega_T}{2\bar{\boldsymbol{q}}_T}\|\boldsymbol{\omega}\| = \frac{k}{2}\|\boldsymbol{\omega}\| < \infty
\end{aligned} \tag{19}$$

其中应用了 $\|q_4E_3 + \bar{\boldsymbol{q}}\times\| = 1$ 和 $\|\bar{\boldsymbol{q}}\times\| = \|\bar{\boldsymbol{q}}\|$ 的关系式, E_3 表示维数为 3 的单位矩阵. 由式 (18) 和 (19) 可得:

$$\|IR(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\|_\infty \le \|I\|_\infty\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\|_\infty \le \|I\|_\infty\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\|_2 \le \frac{k}{2}\|I\|_\infty\|\boldsymbol{\omega}\|_2 \tag{20}$$

由式 (17) 和式 (20) 可知, 只要 k 和 ω_T 足够小, 就能保证:

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{d} - IR(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \boldsymbol{\omega}_d\times I\boldsymbol{\omega}_d\|_\infty \le \\
&\|\boldsymbol{d}\|_\infty + \frac{k}{2}\|I\|_\infty\|\boldsymbol{\omega}\|_2 + \|I\|_\infty\omega_T^2 < \\
&\tau_{\max} - \tau'_{\max}
\end{aligned} \tag{21}$$

其中, $\tau'_{\max}$ 是适当的小数. 于是由式 (16) 可得:

$$\dot{V}_s \leq -\tau'_{\max}\|\boldsymbol{s}\|_1 \leq -\tau'_{\max}\|\boldsymbol{s}\|_2 \tag{22}$$

进而根据 Lyapunov 稳定性定理容易推出当 $t \to \infty$ 时, $\boldsymbol{s} \to 0$.

上述结果与假设 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty > \bar{s}, \forall t > 0$ 是矛盾的, 于是结论 2) 得证. □

3.2 $\|\boldsymbol{s}(0)\|_\infty \leq \bar{s}$ 情形下的分析

本节证明区域 $\|\boldsymbol{s}(0)\|_\infty \leq \bar{s}$ 是不变区域, 其结论如引理 2 所示.

引理 2. 设姿态运动方程 (5) 和 (6) 受控制规律 (8) 与 (10) 和 (11) 作用. 若下列条件成立:

1) $M_1 > M_2 > \left\|I^{-1}\boldsymbol{d}\right\|_\infty$;

2) $\bar{s} = \frac{M_1+M_2}{k_1}$;

3) $\tau_{\max} \geq \|I\|_\infty\left(\frac{2M_1}{k_1}+\omega_T\right)^2+\frac{\sqrt{3}k}{2}\|I\|_\infty\left(\frac{2M_1}{k_1}+\omega_T\right)+\|I\|_\infty M_1$.

则当初始状态满足 $\|\boldsymbol{s}(0)\|_\infty \leq \bar{s}$ 时, 有:

$$\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty \leq \bar{s}, \forall t > 0$$

证明. 首先证明在条件 1) ∼ 3) 成立时, 实际控制力矩不超过最大控制力矩 $\tau_{\max}$. 为此, 注意到 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty \leq \bar{s}$ 时的控制律为

$$\tau_i = (\boldsymbol{\omega}\times I\boldsymbol{\omega})_i + (I\dot{\boldsymbol{\omega}}_d)_i + I\sigma_{M_1}\left[(-k_1 s_i - k_2\alpha_i)\right], \quad i = 1,2,3 \tag{23}$$

根据 $\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{\omega}_d$ 和 σ_{M_1} 的定义, 并结合式 (18) 和 (19) 有:

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{s}\|_\infty + \|\boldsymbol{\omega}_d\|_\infty \leq \bar{s}+\omega_T = \frac{M_1+M_2}{k_1}+\omega_T < \frac{2M_1}{k_1}+\omega_T \tag{24}$$

$$\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\|_\infty \leq \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\|_2 \leq \frac{k}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|_2 \leq \frac{\sqrt{3}k}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty \leq \frac{\sqrt{3}k}{2}\left(\frac{2M_1}{k_1}+\omega_T\right) \tag{25}$$

于是由式 (23) 可得

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_\infty \leq \|I\|_\infty\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty^2 + \|I\|_\infty\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\|_\infty + \|I\|_\infty M_1 < \|I\|_\infty\left(\frac{2M_1}{k_1}+\omega_T\right)^2 + \frac{\sqrt{3}k}{2}\|I\|_\infty\left(\frac{2M_1}{k_1}+\omega_T\right)+\|I\|_\infty M_1 \tag{26}$$

考虑到条件 3), 可知实际控制力矩是不超过最大控制力矩 $\tau_{\max}$ 的.

其次证明, 在控制律式 (23) 作用下, 区域 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty \leq \bar{s}$ 是不变区域. 将式 (23) 代入式 (9), 列出第 i 轴的闭环系统如下:

$$\dot{s}_i = \sigma_{M_1}(-k_1 s_i - k_2\alpha_i) + \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i \equiv \bar{\tau}_i + \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i \tag{27}$$

$$\dot{\alpha}_i = \begin{cases} s_i, & \text{若 } |k_2\alpha_i| < M_2 \\ 0, & \text{若 } |k_2\alpha_i| = M_2 \text{ 且 } \alpha_i s_i > 0 \\ s_i, & \text{若 } |k_2\alpha_i| = M_2 \text{ 且 } \alpha_i s_i \leq 0 \end{cases} \tag{28}$$

其中, $\bar{\tau}_i := \sigma_{M_1}(-k_1 s_i - k_2\alpha_i)$, $i = 1,2,3$. 由此, 在条件 1) 和 2) 之下, 可以画出系统 (27) 和 (28) 的 $\alpha_i - s_i$ 相平面, 如图 2 所示. 如下 4 条直线:

$$l_1: -k_1 s_i - k_2\alpha_i - M_1 = 0 \tag{29}$$

$$l_2: -k_1 s_i - k_2\alpha_i + M_1 = 0 \tag{30}$$

$$l_3: k_2\alpha_i - M_2 = 0 \tag{31}$$

$$l_4: k_2\alpha_i + M_2 = 0 \tag{32}$$

将相平面分为三个区: 4 条直线 l_1、l_2、l_3、l_4 围成的封闭区域称为 A 区, A 区以上的区域为 B 区, A 区以下的区域为 C 区.

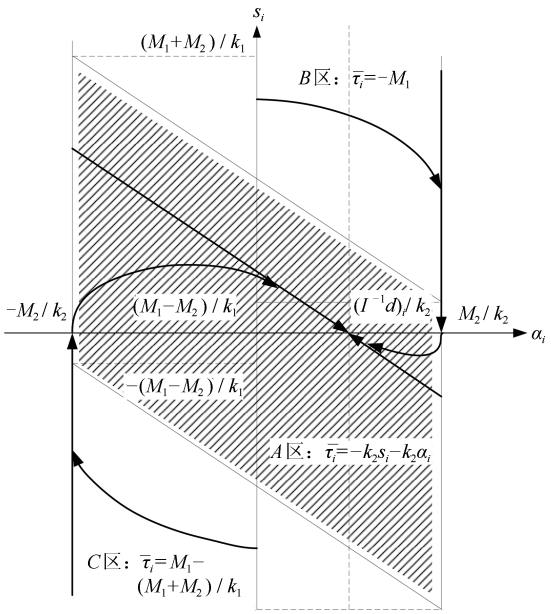


图 2 α_i-s_i 相平面

Fig. 2 Phase portrait of α_i-s_i

图 2 的粗线部分给出了几条典型相轨迹, 特别注意到由于 α_i 的特殊形式, 在 B 区和 C 区的边界上相轨迹要么沿垂直方向趋向 $\bar{s} = 0$ 再进入 A 区, 要么直接进入 A 区. 下面分区进行详细分析.

在 B 区, 系统运行轨迹满足方程: $\dot{s}_i = -M + \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i$. 由条件 1), 推知 s_i 严格递减, 因此若 $s_i(0) \leq \bar{s}$ 则恒有 $s_i(t) \leq \bar{s}$. 此外在此区域相轨迹为抛物线形式, B 区的轨迹或者向右运动到 $\alpha_i = M_2/k_2$ 的边界线, 或者直接进入 A 区域.

在 C 区, 系统运行轨迹满足方程: $\dot{s}_i = M + \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i$. 由条件 1), 推知 s_i 严格递增, 因此若 $s_i(0) \geq -\bar{s}$ 则恒有 $s_i(t) \geq -\bar{s}$. 此外在此区域相轨迹为抛物线形式, C 区的轨迹或者向左运动到 $\alpha_i = -\mathrm{M}_2/k_2$ 的边界线, 或者直接进入 A 区域.

在 A 区域, 系统运行轨迹满足方程: $\dot{s}_i = -k_1 s_i - k_2\alpha_i + \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i$, $\dot{\alpha}_i = s_i$. 注意到相点 $(\alpha_i, s_i) = \left(\left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i/k_2, 0\right)$ 为 A 区的唯一平衡点, 图 2 中画出了二阶临界阻尼情形下的相轨迹, 对于此种情形, 系统不会逃出 A 区域并收敛到该平衡点, 其行为与标准的二阶积分系统相同; 对于过阻尼情形, 情形是类似的; 对于欠阻尼情形, 状态可能会进入 B 区或者 C 区, 而由前面的分析可知, 即使 A 区的相轨迹进入 B 或者 C 区, 仍有 $|s_i(t)| \leq \bar{s}$.

综上分析, 若 $|s_i(0)| \le \bar{s}$, 则恒有 $|s_i(t)| \le \bar{s}$, $\forall t > 0$. □

3.3 动力学方程收敛性的主要结论

在引理 1 和引理 2 的基础上, 可以导出动力学方程收敛性的主要结果.

定理 1. 设姿态方程 (2)～(6) 受控制规律 (8), (10) 和 (11) 作用. 若下列条件成立:

1) $\tau_{\max} > \|\boldsymbol{d}\|_\infty$;
2) 控制参数 k 和 ω_T 适当小;
3) $M_1 > M_2 > \left\|I^{-1}\boldsymbol{d}\right\|_\infty$;
4) $\bar{s} = \frac{M_1+M_2}{k_1}$;
5) 选取控制参数使得

$$\tau_{\max} \ge \|I\|_\infty \left(\frac{2M_1}{k_1} + \omega_T\right)^2 + \frac{\sqrt{3}k}{2}\|I\|_\infty \left(\frac{2M_1}{k_1} + \omega_T\right) + \|I\|_\infty M_1$$

则对于任意初始状态, 系统运动轨迹满足

$$\boldsymbol{s}(t) \to 0, k_2\boldsymbol{\alpha}(t) \to I^{-1}\boldsymbol{d}, t \to \infty$$

证明. 由引理 1 可知, 在假设 1) 和 2) 的条件之下, 对于任意初始状态 $\boldsymbol{s}(t)$ 均会在有限时间内进入到 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty \le \bar{s}$ 的区域内, 并且在条件 2) 之下, 控制力矩不会发生饱和. 由引理 2 可知, 在 3)～5) 的条件之下, 对于任意 $\|\boldsymbol{s}(0)\|_\infty \le \bar{s}$ 的初始状态将保持在 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty \le \bar{s}$, $\forall t > 0$ 的区域内, 且不会发生饱和. 因此, 对于任意的初始状态, $\boldsymbol{s}(t)$ 将在有限时间内进入并保持在区域 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty \le \bar{s}$ 内. 因此, 在考虑 $\boldsymbol{s}(t)$ 的收敛性时, 可仅在区域 $\|\boldsymbol{s}(t)\|_\infty \le \bar{s}$ 内考虑问题. 为证明 $\boldsymbol{s}(t) \to 0$, 构造函数:

$$V_i = \frac{1}{2}s_i^2 + \frac{1}{2}k_2\left[\alpha_i - \frac{1}{k_2}(I^{-1}\boldsymbol{d})_i\right]^2 \tag{33}$$

其中, $i = 1, 2, 3$.

结合图 2, 下面对 V_i 的导数进行分区讨论.

1) 相点属于 B 区

由引理 2 的分析, 此时有

$$\dot{s}_i = -M_1 + (I^{-1}\boldsymbol{d})_i$$

如果相点属于 B 区域的右边界线 l_3, 此时 $\alpha_i = 0$, 对 V_i 求导有

$$\dot{V}_i = -s_i[M_1 - (I^{-1}\boldsymbol{d})_i] \tag{34}$$

而如果相点不属于右边界线 l_3, 此时有

$$\dot{V}_i = s_i\left[-M_1 + \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i\right] + k_2\left[\alpha_i - \frac{1}{k_2}(I^{-1}\boldsymbol{d})_i\right]s_i = -s_i(M_1 - k_2\alpha_i) \tag{35}$$

根据条件 3), 必存在充分小的正数 δ 满足下式

$$M_1 > \max\left\{M_2, \left\|I^{-1}\boldsymbol{d}\right\|_\infty\right\} + \delta$$

同时注意到 $s_i > 0$ 和 $|k_2\alpha_i| \le M_2$, 那么由式 (34) 和 (35) 可得:

$$\dot{V}_i \le -\delta s_i = -\delta|s_i| \tag{36}$$

2) 相点属于 C 区

其分析是完全类似的, 在此不再赘述.

3) 相点属于 A 区

此时系统方程形式为

$$\dot{s}_i = -k_1 s_i - k_2\alpha_i + \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i$$

对 V_i 进行求导, 可得:

$$\dot{V}_i = s_i\left[-k_1 s_i - k_2\alpha_i + \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i\right] + k_2\left[\alpha_i - \frac{1}{k_2}(I^{-1}\boldsymbol{d})_i\right]\dot{\alpha}_i \le -k_1 s_i^2 \tag{37}$$

其中应用了如下关系式:

$$k_2\left[\alpha_i - \frac{1}{k_2}(I^{-1}\boldsymbol{d})_i\right](\dot{\alpha}_i - s_i) \le 0$$

其中, s_i 属于 A 区域 (包括其左右边界线 l_3 和 l_4).

由 1)～3) 部分的讨论结果式 (36) 和 (37), 可知有

$$\dot{V}_i \le -k_1 s_i^2, \quad \text{若 } (\alpha_i, s_i) \in A \tag{38}$$

$$\dot{V}_i \le -\delta|s_i|, \quad \text{若 } (\alpha_i, s_i) \in B \text{ 或 } C \tag{39}$$

注意到 s_i 是全局有界的, 设 s_i 在时间 $(0, \infty)$ 内的最大值为 s_M, 因此有

$$|s_i|_\infty \le s_M \Rightarrow |s_i|^2 \le s_M|s_i| \Rightarrow -|s_i|^2 \ge -s_M|s_i| \Rightarrow -\frac{\delta}{s_M}|s_i|^2 \ge -\delta|s_i| \tag{40}$$

令 $\delta' = \delta/s_M$, 则由式 (39) 和 (40) 有

$$\dot{V}_i \le -\delta'|s_i|^2, \text{ 若 } (\alpha_i, s_i) \in B \text{ 或 } C \tag{41}$$

若再令 $k' = \min\{\delta', k_1\}$, 那么由式 (38) 和 (41) 有

$$\dot{V}_i \le -k'|s_i|^2, \text{ 若 } (\alpha_i, s_i) \in A, B \text{ 或 } C \tag{42}$$

对不等式 (42) 两边在时间区间 $(0, t)$ 内进行积分, 并代入式 (33) 可得:

$$\frac{1}{2}s_i^2 + \frac{1}{2}k_2\left[\alpha_i - \frac{1}{k_2}(I^{-1}\boldsymbol{d})_i\right]^2 + \int_0^t k'|s_i|^2\mathrm{d}\tau \le V_i(0)$$

从而可知 s_i 是平方可积和有上界的, 即有

$$s_i \in L_2 \bigcap L_\infty \tag{43}$$

又由 $\dot{s}_i$ 的方程式 (27) 可知, $\dot{s}_i$ 是有界的, 因此由 Barbalat 引理可知 $s_i \to 0$.

由于 $s_i \to 0$ 时, 因此状态 (α_i, s_i) 最终会在有限时间 T 内进入并保持在 A 区域. 从而为证明 $k_2\alpha_i \to \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i$, 我们只需要考察 A 区域即可. 注意到在 A 区域有

$$\dot{s}_i = -k_1 s_i - k_2\alpha_i + \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i \tag{44}$$

对上式左边在时间区间 $[T, t]$ 内积分, 有 $\int_T^t \dot{s}_i\mathrm{d}t = s_i(t) - s_i(T) \to -s_i(T)$, $t \to \infty$, 可见 $\dot{s}_i$ 是 L_1 可积的. 另外, 从式 (44) 右边易推出 $\dot{s}_i$ 相对于时间 t 是一致连续的. 再次应用 Barbalat 引理, 可以证明 $\dot{s}_i \to 0$. 因此, 由式 (44) 直接可得 $k_2\alpha_i \to \left(I^{-1}\boldsymbol{d}\right)_i$, 即积分项也是收敛的. 由于以上证明对 $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ 均是成立的, 因此可知

$$\boldsymbol{s}(t) \to 0, k_2\boldsymbol{\alpha}(t) \to I^{-1}\boldsymbol{d}, t \to \infty$$

□

注 1. 由具体表达式可知, 条件 1) 表明控制力矩至少要比干扰大才能抑制干扰的影响, 从实际物理意义来说这是一个必要条件; 条件 2) 要求参数 k, ω_T 适当小, 这不仅是减少控制力矩的要求, 而且可以减小参考角速度, 以使实际角速度满足工程约束; 条件 3) 表明积分项的饱和限幅 M_2 至少要比干扰大才能在稳态时完全抵消干扰影响, 而 $M_1 > M_2$ 则表明饱和函数 σ_{M_1} 至少要有一定的线性工作区间, 这些都是不难理解的; 条件 4) 则是对角速度跟踪误差设限的要求; 条件 5) 则从理论上给出了控制力矩下限的一个比较保守的估计, 实际仿真时可适当放松该要求.

4 运动学的收敛性证明

在引理 1 和引理 2 的基础上, 可以导出运动学方程收敛性的主要结果.

定理 2. 考虑姿态运动学方程 (2) 和 (3). 若姿态动力学方程 (5) 采用满足条件 1)～5) 的控制规律式 (8) 和式 (10), 则对任意初始状态, 系统运动学具有收敛性, 亦即:

$$\bar{\boldsymbol{q}}(t) \to 0,\ \boldsymbol{\omega}(t) \to 0,\ t \to \infty$$

证明. 由定理 1 中的式 (43) 可知, $\boldsymbol{s} \in L_2$. 设 $V_q = 1 - q_4$, 将其沿姿态运动学方程式 (3) 求导可得:

$$\dot{V}_q = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_d^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} \tag{45}$$

注意到在区域 I 内 $\boldsymbol{\omega}_d = -k\bar{\boldsymbol{q}}$, 因此有

$$\dot{V}_q = -\frac{1}{2}k\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^2 + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} \tag{46}$$

而在区域 II 内 $\boldsymbol{\omega}_d = -\omega_T\bar{\boldsymbol{q}}/\|\bar{\boldsymbol{q}}\|$, 此时有

$$\dot{V}_q = -\frac{1}{2}\omega_T\|\bar{\boldsymbol{q}}\| + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} \le -\frac{1}{2}\omega_T\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^2 + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} \tag{47}$$

设 $\beta = \min\{k, \omega_T\}/2$, 由式 (46) 和 (47) 可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_q \le\ & -\beta\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^2 + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} \le \\ & -\beta\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^2 + \frac{1}{4}\chi\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^2 + \frac{1}{4\chi}\|\boldsymbol{s}\|^2 = \\ & -\left(\beta - \frac{1}{4}\chi\right)\|\bar{\boldsymbol{q}}\|^2 + \frac{1}{4\chi}\|\boldsymbol{s}\|^2\end{aligned} \tag{48}$$

其中 χ 为足够小的正数使得 $\beta - \chi/4 > 0$. 由式 (48) 可知:

$$\left(\beta - \frac{1}{4}\chi\right)\int_0^t \|\bar{\boldsymbol{q}}\|^2 \mathrm{d}t + V_q(t) \le V_q(0) + \frac{1}{4\chi}\int_0^t \|\boldsymbol{s}\|^2 \mathrm{d}t \tag{49}$$

由于 $\boldsymbol{s} \in L_2$, 又由定义知 $V_q(t)$ 是有界的, 因此由式 (49) 可知 $\bar{\boldsymbol{q}} \in L_2$. 又由于 $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}$ 均是有界的, 因此 $\dot{\bar{\boldsymbol{q}}}$ 也是有界的, 由 Barbalat 引理可知 $\bar{\boldsymbol{q}} \to 0$. 当 $\bar{\boldsymbol{q}} \to 0$ 时, 可知 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 必然在有限时间内进入并保持在 $\|\bar{\boldsymbol{q}}\| \le \bar{q}_T$ 的区域内, 此时有 $\boldsymbol{\omega}_d = -k\bar{\boldsymbol{q}}$. 由于有 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d = \boldsymbol{\omega} + k\bar{\boldsymbol{q}} \to 0$, 因此必然有 $\boldsymbol{\omega} \to 0$. □

注 2. 定理 2 只是证明了四元数矢量部分 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 的收敛性, 尚未证明 $q_4 \to 1$ 还是 $q_4 \to -1$. 下面对其进行分析. 由于 $\boldsymbol{s} \to 0$, 因此, 对于任意小的 $\mu > 0$, 都存在有限时间 $T_1(\mu) > 0$, 使得 $\forall t > T_1(\mu)$, 均有 $\frac{1}{4\chi}\|\boldsymbol{s}\|^2 \le \mu$, $\forall t \ge T_1(\mu)$. 于是对 $\forall t \ge T_1(\mu)$, 式 (48) 可继续化简为

$$\begin{aligned}\dot{V}_q \le & -\left(\beta - \frac{1}{4}\chi\right)(1 - q_4^2) + \frac{1}{4\chi}\|\boldsymbol{s}\|^2 \le \\ & -\left(\beta - \frac{1}{4}\chi\right)(1 - q_4)(1 + q_4) + \mu\end{aligned} \tag{50}$$

假设 q_4 趋于 -1 附近充分小的区域, 则有 $(1 - q_4)(1 + q_4) \ge 1 + q_4$. 因此, 如果有 $1 + q_4 > \frac{\mu}{\beta - \chi/4}$ 那么由式 (50) 不难证明 $\dot{V}_q < 0$, 从而导致 V_q 进一步减小, 即 $1 + q_4$ 进一步增大, 并且 q_4 将不可逆转的趋向于 1, 即有下式成立:

$$q_4(t) \to 1,\ \forall 1 + q_4 > \frac{\mu}{\beta - \chi/4},\ \forall t > T_1(\mu)$$

由于随着时间的增加, μ 是收敛到零的, 因此能够保持在 $q_4 = -1$ 附近的区域也在逐渐缩小, 最终该区域将逐渐缩小到零.

从以上分析可知 $(q_4, \boldsymbol{\omega}) = (-1, 0)$ 的平衡点是不稳定的, 即可以认为平衡点 $(q_4, \boldsymbol{\omega}) = (1, 0)$ 是近乎全局渐近稳定的.

注意到 $q_4 = 1$ ($\theta = 0$) 和 $q_4 = -1$ ($\theta = 2\pi$) 事实上表示同一个物理姿态, 但是以上控制律却有可能将 $q_4 = -1$ 附近的姿态往 $q_4 = 1$ 的非最小路径方向控制, 这就造成了所谓的 "姿态展开" 现象. 为了避免该问题, 注意到绕 $\boldsymbol{e}$ 旋转最大角度 π 与绕 $-\boldsymbol{e}$ 旋转最大角度 π 组合可以表达所有姿态, 我们做如下约束:

$$\theta \in (0, \pi] \text{ 或 } q_4 \ge 0$$

即当按照运动学方程算出 $q_4 < 0$ 时就用 $-\boldsymbol{q}$ 替换 $\boldsymbol{q}$, 这样做可以保证姿态控制方向的最小路径特性, 其代价是四元数描述的目标角速度 $\boldsymbol{\omega}_d$ 及其导数 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ 在 $q_4 = 0$ 处失去了连续性. 尽管在 $q_4 = 0$ 处 $\boldsymbol{\omega}_d$ 及 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ 不连续, 但穿越 $q_4 = 0$ 前、后总是连续的, 因此仍然适用于工程应用.

5 数值仿真验证

为验证以上提出算法的有效性, 本节对其进行数值仿真验证. 根据某型号, 设定参数 $I = \mathrm{diag}\{4\,012,\ 2\,807,\ 2\,334\}$ kg·m^2, 干扰力矩 $\boldsymbol{d} = [150, 150, 150]^{\mathrm{T}}$ N·m. 由此设计限幅参数 $M_1 = 0.07475$ rad/s、$M_2 = 0.06725$ rad/s, 最大控制力矩 $\tau_{\max} = 300$ N·m, 控制参数 $k_1 = 1.76635$、$k_2 = 0.78$, $\alpha_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$, $\omega_T = 3^\circ$/s, $\bar{s} = 0.08466$ rad/s, $\bar{q}_T = 0.0349$, $k = \omega_T/\bar{q}_T = 1.5$ rad/s. 控制参数的选取原则如下: 根据姿态控制切换的要求设计 $\bar{q}_T$, 并根据不同的快速性要求设定 ω_T, 由此可由公式 $k = \omega_T/\bar{q}_T$ 确定 k 的值; $\bar{s}$ 应根据角速度跟踪误差的切换要求进行设定; k_1 和 k_2 是角速度跟踪律的 PI 系数, 较大的值能够在一定程度上加快收敛的速度, 但是也会增加力矩振荡的剧烈程度, 实际的选取要综合考虑收敛的快速性与平稳性的要求; M_1 和 M_2 的选择应该满足定理 1 的条件 3); M_1 和 M_2 还应与 $\bar{s}$、k_1 满足定理 1 中的条件条件 4); $\tau_{\max}$ 一般可比定理 1 的条件 5) 计算出的下限适当小些, 因为条件 5) 给出的力矩下限一般比较保守.

仿真验证了 4 种情形, 分别是: 1) 从静止到静止的姿态机动; 2) 具有初始姿态角和姿态角速度误差的姿态消旋和维持; 3) 仅最大力矩约束, 无姿态控制律中饱和约束时的情形; 4) 无姿态分区控制时的情形. 其中情形 1) 和 2) 是针对实际控制任务提取出的要求. 着陆器动力下降全过程包括: 着陆准备、主减速、姿态快速调整、接近段、悬停避障和缓慢下降

段. 其中着陆器目标姿态首先要求从任意初始姿态进入稳定点火姿态, 然后在整个下降过程大约旋转 90°, 使推力方向从水平方向转向垂直方向. 情形 1) 原理上对应于姿态快速调整的要求; 情形 2) 原理上对应于着陆准备阶段从任意初始姿态进入稳定点火姿态阶段的要求, 另外该情形还考察了不同的参数 k 对仿真结果的影响. 情形 3) 和 4) 用于和情形 2) 进行对比.

在下面的仿真中, 情形 1) 和 2) 控制器相同, 初值不同.

仿真结果如图 3～7 所示. 图中 $\theta = 2\arcsin(\|\bar{\boldsymbol{q}}\|)$ 代表飞行器转角, 以 ° 为单位, $\omega_n = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{q}}/\|\bar{\boldsymbol{q}}\|$ 代表飞行器转动角速度, 以 °/s 为单位.

情形 1) 从静止到静止, 绕 x 轴旋转 90°, 机动控制.

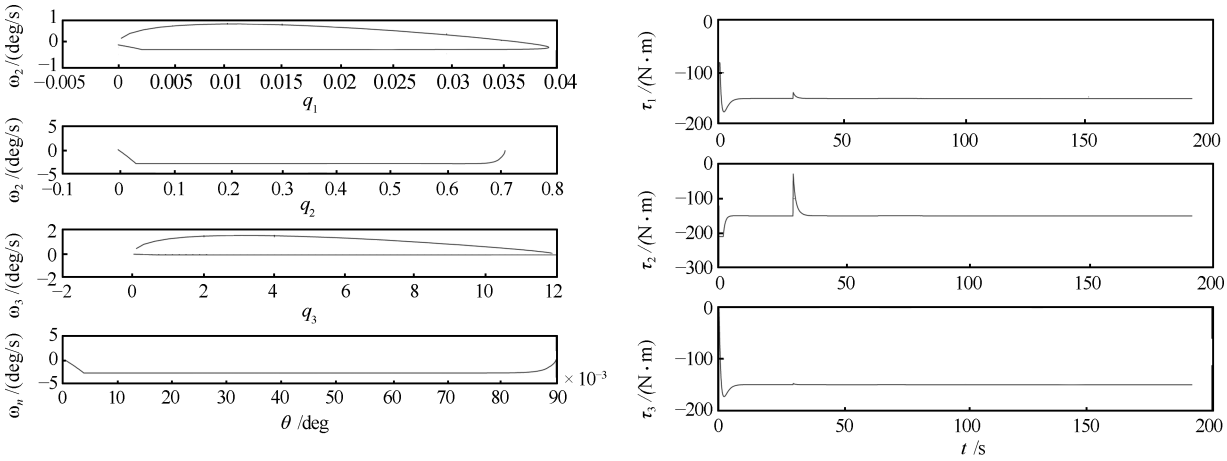
初值满足 $\boldsymbol{\omega}(0) = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$ °/s, $\boldsymbol{q}(0) = [\bar{\boldsymbol{q}}(0), q_4(0)]^{\mathrm{T}} = [0, 0.707, 0, 0.707]^{\mathrm{T}}$. 从图 3 中可以看出, 对于大姿态机动的情形, 系统首先以最大力矩控制将角速度加速到 3°/s 的大小, 以便以容许的最大角速度快速机动到目标姿态附近, 然后在目标姿态附近以线性形式减少角速度, 以获得姿态控制的平稳品质. 以上结果与按姿态误差对目标角速度进行分区的思想是相同的.

情形 2) 初值有 20 °/s 角速度, 消旋、机动、维持控制.

初值满足 $\boldsymbol{\omega}(0) = [0,20,0]^{\mathrm{T}}$ °/s, $\boldsymbol{q}(0) = [0, 0.707, 0, 0.707]^{\mathrm{T}}$. 从图 4 可以看出, 在初始时, 系统以最大控制力矩控制到 3 °/s 目标角速度附近, 之后的过程与情形 1) 是类似的. 下面比较不同控制参数 k 对于系统的影响. 改变参数 $k = 15$ rad/s, $\bar{q}_T$ 不变, 对应的 $\omega_T = 30$ °/s. 仿真结果如图 5 所示. 从图 5 可见虽然系统最终趋于稳定, 但四元数和控制力矩变化十分剧烈, 这表明较大的 k 是不太利于实际控制的.

情形 3) 与无饱和控制的比较.

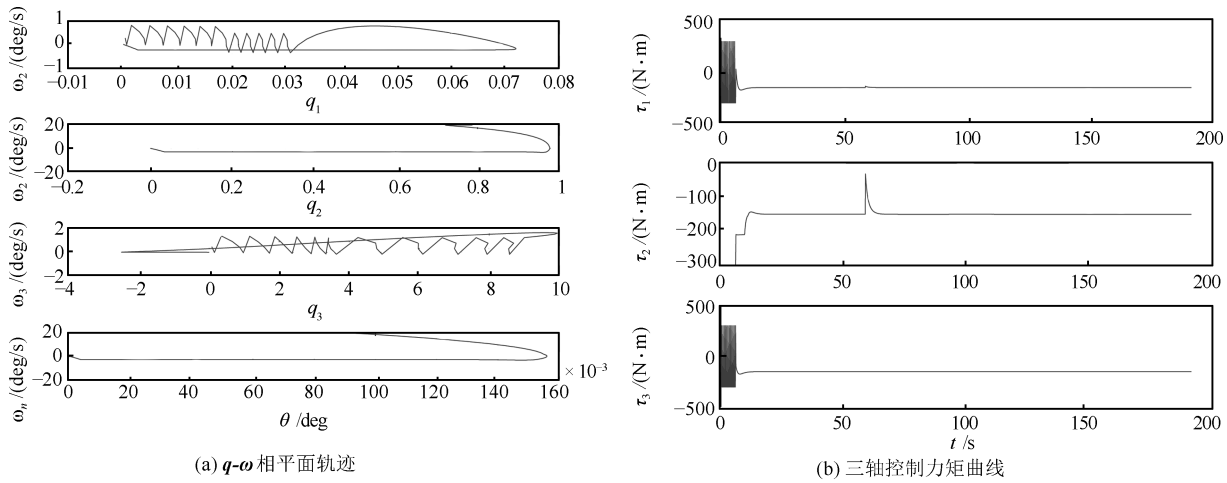
初值与情形 2) 相同, 控制器中取消 M_1 的限幅. 从图 6 (a) 中并没有发现与情形 2) 有明显区别. 但是, 从图 6 (b) 可以看出, 对于俯仰轴, 由于没有对控制律内的项进行饱和约束, 控制力矩在控制律发生切换时出现了一个短暂的峰值, 这对控制的平滑性是不利的.



(a) $\boldsymbol{q}$-$\boldsymbol{\omega}$ 相平面轨迹
(a) Phase portrait of $\boldsymbol{q}$-$\boldsymbol{\omega}$

(b) 三轴控制力矩曲线
(b) Triaxial control torque curves

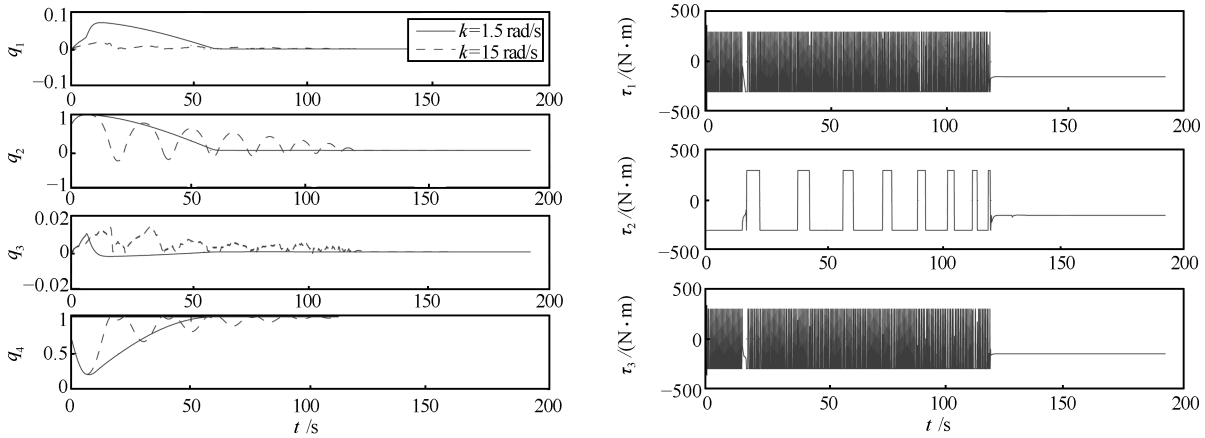
图 3　情形 1 仿真结果
Fig. 3　Simulation results of Case 1



(a) $\boldsymbol{q}$-$\boldsymbol{\omega}$ 相平面轨迹
(a) Phase portrait of $\boldsymbol{q}$-$\boldsymbol{\omega}$

(b) 三轴控制力矩曲线
(b) Triaxial control torque curves

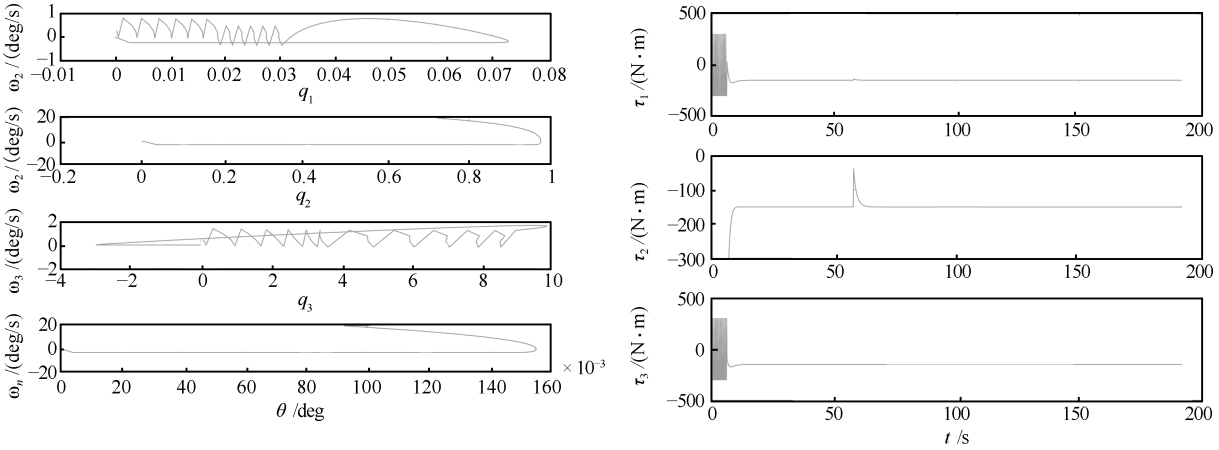
图 4　情形 2 参数 $k = 1.5$ rad/s 仿真结果
Fig. 4　Simulation results of Case 2 with $k = 1.5$ rad/s



(a) $\boldsymbol{q}$ 曲线比较结果
(a) Comparison of $\boldsymbol{q}$ profles

(b) k = 15 rad/s 三轴控制力矩曲线
(b) Triaxial control torque curves with k = 15 rad/s

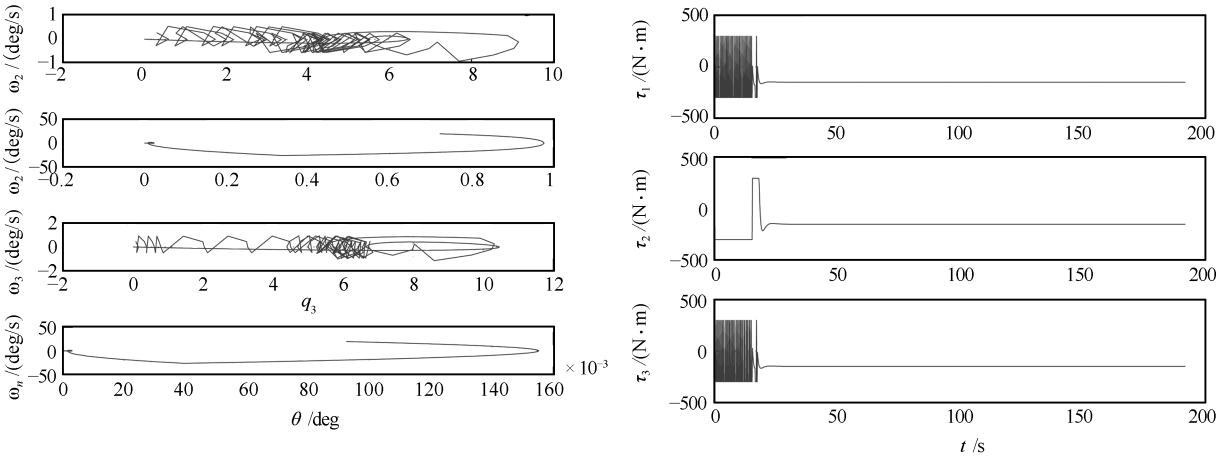
图 5 情形 2 参数 $k = 15$ rad/s 仿真结果
Fig. 5 Simulation results of Case 2 with $k = 15$ rad/s



(a) $\boldsymbol{q}$-$\boldsymbol{\omega}$ 相平面轨迹
(a) Phase portrait of $\boldsymbol{q}$-$\boldsymbol{\omega}$

(b) 三轴控制力矩曲线
(b) Triaxial control torque curves

图 6 情形 3 仿真结果
Fig. 6 Simulation results of Case 3



(a) $\boldsymbol{q}$-$\boldsymbol{\omega}$ 相平面轨迹
(a) Phase portrait of $\boldsymbol{q}$-$\boldsymbol{\omega}$

(b) 三轴控制力矩曲线
(b) Triaxial control torque curves

图 7 情形 4 仿真结果
Fig. 7 Simulation results of Case 4

情形 4) 与无分区控制的比较.

初值与情形 2) 相同, 但参考角速度式 (8) 中对角速度不加限制, 即 $\omega_d = -k\bar{\boldsymbol{q}}$. 从图 7 可以看出, 由于没有对目标角速度进行分区规划, 航天器的实际角速度在控制过程中最大达到了 $-40\,^\circ$/s, 已经远超陀螺的量程. 可见, 对目标角速度进行分区规划对刻画过程品质是十分必要的.

从以上仿真结果来看, 对于大角度姿态机动和大角速度下的消旋与姿态控制等情形, 本文设计的基于分区的控制策略均达到了比较理想的效果.

6 结论

针对航天器姿态控制中常见的抗干扰问题, 本文设计了一种基于四元数分区的姿态控制律. 首先根据姿态误差分区设计目标角速度: 当姿态误差四元数较大时, 设计常值的目标角速度, 这样可以限制实际的机动角速度并保证姿态的快速机动能力; 当误差四元数较小时, 设计与四元数成线性比例的目标角速度, 这样可以刻画姿态运动轨迹, 保证运动的平稳性. 其次, 根据角速度跟踪误差分区设计姿态跟踪的控制律: 若跟踪误差较大, 采用最大控制力矩进行控制, 以加快角速度跟踪能力; 若跟踪误差较小, 则采用具有饱和约束的姿态控制律进行控制. 本文从理论上严格证明了闭环系统的收敛性质, 并且在适当的参数选择之下, 设计的控制律还满足力矩的饱和要求. 仿真表明, 设计的控制律具有良好的快速姿态机动能力及过程品质. 本文的不足之处是存在四元数的 "展开现象", 尽管文中给出了相应的工程解决方法, 但是还需要进一步开展理论上的严格分析.

References

1 Sanyal A, Fosbury A, Chaturvedi N, Bernstein D S. Inertia-free spacecraft attitude tracking with disturbance rejection and almost global stabilization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, **32**(4): 1167−1178

2 Bošković J D, Li S M, Mehra R K. Robust adaptive variable structure control of spacecraft under control input saturation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, **24**(1): 14−22

3 Bošković J D, Li S M, Mehra R K. Robust tracking control design for spacecraft under control input saturation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, **27**(4): 627−633

4 Kim K -S, Kim Y. Robust backstepping control for slew maneuver using nonlinear tracking function. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2003, **11**(6): 822−829

5 Widnall W S. Lunar module digital autopilot. *Journal of Spacecraft and Rockets* , 1971, **8**(1): 56−62

6 Calhoun P C, Queen E M. Entry vehicle control system design for the Mars science laboratory. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2006, **43**(2): 324−329

7 Kubota T, Otsuki M, Hashimoto T, Bando N, Yano H, Uo M, Shirakawa K, Kawaguchi J. Touchdown dynamics for sampling in Hayabusa mission. In: Proceedings of the 2006 AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Keystone, Colorado: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.

8 Johnson M C. A parameterized approach to the design of lunar lander attitude controllers. In: Proceedings of the 2006 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Keystone, Colorado. Keystone, Colorado: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.

9 Tu Shan-Cheng. *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*. Beijing: Astronautics Press, 2002.
(屠善澄. 卫星姿态动力学与控制. 北京: 宇航出版社, 2002.)

10 Zou Guang-Rui, Lv Zhen-Duo, Li Tie-Shou. The Design of Attitude and Orbit Control System for DFH 3. *The 5th Control Technology Conference of Chinese Automation Society for Space and Locomotion Object*, 1992.
(邹广瑞, 吕振铎, 李铁寿. 东方红 3 号卫星姿态和轨道控制系统设计. 中国自动化学会全国第五次空间及运动物体控制技术学术会议论文集, 1992.)

11 Kapoor N, Teel A R, Daoutidis P. An anti-windup design for linear systems with input saturation. *Automatica*, 1998, **34**(5): 559−574

12 Wen J T Y, Kreutz-Delgado K. The attitude control problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(10): 1148−1162

13 Subbarao K. Nonlinear PID-like controllers for rigid-body attitude stabilization. *Journal of the Astronautical Sciences*, 2004, **52**(1−2): 61−74

14 Zhan Yi, Zhang Hong-Hua. A globally stable attitude tracking law with integrals. *Control Engineering*, 2006, (1): 9−16, 24
(战毅, 张洪华. 全局稳定的含积分项的姿态跟踪控制律. 控制工程, 2006, (1): 9-16, 24)

15 Subbarao K, Akella M R. Differentiator-free nonlinear proportional-integral controllers for rigid-body attitude stabilization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, **27**(6): 1092−1096

16 Su J Y, Cai K Y. Globally stabilizing proportional-integral-derivative control laws for rigid-body attitude tracking. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, **34**(4): 1260−1264

17 Schlanbusch R, Loria A, Nicklasson P J. On the stability and stabilization of quaternion equilibria of rigid bodies. *Automatica*, 2012, **48**(12): 3135−3141

18 Bang H, Tahk M J, Choi H D. Large angle attitude control of spacecraft with actuator saturation. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**(9): 989−997

19 Wie B. *Space Vehicle Dynamics and Control* (Second Edition). Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2008. 403−444

张洪华 北京控制工程研究所研究员. 1991 年获得北京航空航天大学博士学位. 主要研究方向为挠性航天器控制, 着陆器制导、导航与控制.
E-mail: zhanghh502@163.com
(**ZHANG Hong-Hua** Research fellow at Beijing Institute of Control Engineering. He received his Ph. D. degree from Beijing University of Aeronautics and Astronautics in 1991. His research interest covers control of flexible spacecraft, guidance, navigation and control of lander.)

关轶峰 北京控制工程研究所研究员. 2005 年获得北京控制工程研究所博士学位. 主要研究方向为挠性航天器姿态控制.
E-mail: guanyifeng@163.com
(**GUAN Yi-Feng** Research fellow at Beijing Institute of Control Engineering. He received his Ph. D. degree from Beijing Institute of Control Engineering in 2005. His research interest covers spacecraft attitude control.)

胡锦昌 北京控制工程研究所工程师. 2013 年获得北京控制工程研究所博士学位. 主要研究方向为航天器控制与制导. 本文通信作者.
E-mail: hujinchang@tsinghua.org.cn
(**HU Jin-Chang** Engineer at Beijing Institute of Control Engineering. He received his Ph. D. degree from Beijing Institute of Control Engineering in 2013. His research interest covers spacecraft control and guidance. Corresponding author of this paper.)

王泽国 北京控制工程研究所博士研究生. 主要研究方向为航天器控制与制导. E-mail: wangzerg999@gmail.com
(**WANG Ze-Guo** Ph. D. candidate at Beijing Institute of Control Engineering. His research interest covers spacecraft control and guidance.)