一种带多步随机延迟量测高斯滤波器的一般框架解

张勇刚 [1] 黄玉龙 [1] 赵 琳 [1]

摘 要 提出了一种适用于线性和非线性系统的带多步随机延迟量测高斯滤波器的一般框架解. 为了完成状态的递归更新估计, 噪声向量和先前时刻状态向量被扩展到当前时刻状态向量中. 然后基于贝叶斯方法推导了扩展后状态向量的一般框架解. 对于非线性系统, 通过利用不同的数值计算方法计算贝叶斯解中的高斯加权积分可以推导获得不同的高斯近似滤波器. 最后本文利用三阶球径容积准则来实施提出的方法, 并通过量测被随机延迟多步的目标跟踪模型对所提出的方法进行了仿真, 仿真结果验证了提出方法的有效性和优点.

关键词 一般框架, 高斯滤波器, 多步随机延迟量测, 贝叶斯估计

引用格式 张勇刚, 黄玉龙, 赵琳. 一种带多步随机延迟量测高斯滤波器的一般框架解. 自动化学报, 2015, **41**(1): 122−135

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140293

A General Framework Solution to Gaussian Filter with Multiple-step Randomly-delayed Measurements

ZHANG Yong-Gang[1] HUANG Yu-Long[1] ZHAO Lin[1]

Abstract This paper provides a general framework solution to state estimation of Gaussian filter for both linear and nonlinear dynamic systems with multiple step randomly delayed measurements. Noise and previous state vectors are added into the current state vector to facilitate its recursive update estimation. A general framework of Bayesian solution to the augmented state estimation is then derived. For nonlinear systems, different Gaussian approximation filters can be developed by utilizing different numerical methods for computing Gaussian weighted integrals involved in the Bayesian solution. Finally, the third-degree spherical-radial cubature rule is used to implement the proposed method. Simulation is performed based on a target tracking model, in which measurements are randomly delayed for multiple steps. The simulation results illustrate the efficiency and advantages of the proposed method.

Key words General framework, Gaussian filter, multiple step randomly delayed measurements, Bayesian estimation

Citation Zhang Yong-Gang, Huang Yu-Long, Zhao Lin. A general framework solution to Gaussian filter with multiple-step randomly-delayed measurements. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 122−135

非线性滤波已经被广泛地使用在许多应用中. 通常可以利用贝叶斯估计理论来处理非线性滤波问题, 通过计算后验概率密度函数 (Probability density function, PDF), 贝叶斯估计理论为动态状态估计问题提供了一个最优解[1]. 但是贝叶斯估计中包含的多维积分一般无法解析求解, 为了获得次优的非线性滤波器, 必须使用近似的方法. 高斯近似是一种被广泛使用的有效方法, 因为在实际应用中利用该方法推导出的高斯近似滤波器具有良好的精度和计算效率[2]. 基于三阶球径容积准则的容积卡尔曼滤波器 (Cubature Kalman filter, CKF) 是一种典型的高斯近似滤波器, 它具有很多优点, 比如良好的数值稳定性、低的计算复杂度和令人满意的精度[1]. 为了提高 CKF 的精度, Jia 等提出了一类具有任意阶精度的高阶 CKF[3]; 基于稀疏网格理论, Jia 等提出了一种稀疏网格求积滤波器[4]; 基于随机积分准则, Dunik 等提出了一种随机积分滤波器[5]; 基于三阶嵌入式容积准则, Zhang 提出了一种嵌入式容积卡尔曼滤波器[6]; 基于球面单径准则, Wang 等提出了一类球面单径容积卡尔曼滤波器[7]; 基于极大似然准则和最大期望算法, 王璐等提出了一种自适应无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF)[8]; 基于高阶无迹准则, 张勇刚等提出了一种高阶无迹卡尔曼滤波器[9]. 为了解决 CKF 中存在的非本地采样问题, Chang 等提出了一种变换的 UKF[10]. 为了处理带有色噪声的非线性状态

收稿日期 2014-04-24 录用日期 2014-08-06
Manuscript received April 24, 2014; accepted August 6, 2014
国家自然科学基金 (61001154, 61201409, 61371173), 中国博士后科学基金 (2013M530147), 黑龙江省博士后基金 (LBH-Z13052), 哈尔滨工程大学中央高校基本科研业务费专项基金 (HEUCFX41307) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61001154, 61201409, 61371173), China Postdoctoral Science Foundation (2013M530147), Heilongjiang Postdoctoral Fund (LBH-Z13052), and Fundamental Research Funds for the Central Universities of Harbin Engineering University (HEUCFX41307)
本文责任编委 夏元清
Recommended by Associate Editor XIA Yuan-Qing
1. 哈尔滨工程大学自动化学院 哈尔滨 150001
1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001

估计问题, 王小旭等提出了一种带有色量测噪声的 UKF[11].

以上这些高斯近似滤波器都假设量测能实时到达数据处理中心. 但是, 在很多工程应用中, 比如目标跟踪, 由于通信信道带宽有限, 它们的量测可能会产生随机延迟[12−13]. 为了解决这个问题, Hermoso-Carazo 等提出了适用于带一步或两步随机延迟量测非线性系统的改进扩展卡尔曼滤波器 (Extended Kalman filter, EKF) 和改进 UKF[14−15]. 最近, Wang 等提出了一种适用于带一步随机延迟量测的非线性系统的高斯近似滤波器和平滑器[2, 16]. 在以上所有工作中, 量测的随机延迟仅假设为一个或两个采样时间, 然而实际应用中大于两个采样时间的量测随机延迟可能会发生, 比如在一个通信带宽有限的网络中[15].

为了解决带多步随机延迟量测高斯滤波问题, 本文在最小均方误差准则下, 通过对状态进行扩展, 并利用状态和延迟量测概率密度的高斯假设, 推导了一种适用于线性和非线性系统的带多步随机延迟量测高斯滤波器的一般框架解, 并证明了不带量测延迟的标准高斯滤波器[1] 和带一步随机延迟量测的高斯滤波器[2] 都是本文提出的高斯滤波器的特例. 在该一般框架解中, 存在高斯加权积分解析运算. 对于线性系统, 提出的高斯滤波器退化为带多步随机延迟量测的卡尔曼滤波器. 对于非线性系统, 通过使用不同的数值计算方法来计算这些高斯加权积分能够推导不同的高斯近似滤波器. 本文利用三阶球径容积准则来实施提出的方法, 并通过量测被随机延迟多步的目标跟踪模型对所提出的方法进行了仿真, 仿真结果验证了提出方法的有效性和优点.

1　问题阐述

考虑如下以状态空间模型形式给出的带多步随机延迟量测的离散时间非线性系统[15]

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{w}_{k-1} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k \tag{2}$$

$$\boldsymbol{y}_k = \sum_{d=0}^{\min(k-1,s)} r_k^d \boldsymbol{z}_{k-d}, \qquad k \geq 2 \tag{3}$$

其中, k 表示离散时间序列, $\boldsymbol{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $\boldsymbol{z}_k \in \mathbf{R}^m$ 是理想的量测向量, $\boldsymbol{y}_k$ 是实际的量测输出向量, $\boldsymbol{w}_k \in \mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{v}_k \in \mathbf{R}^m$ 是不相关的零均值高斯白噪声, 分别满足 $\mathrm{E}[\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_l^{\mathrm{T}}] = Q_k \delta_{kl}$ 和 $\mathrm{E}[\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_l^{\mathrm{T}}] = R_k \delta_{kl}$, 其中 δ_{kl} 是 Kronecker$-\delta$ 函数, 初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 是一个均值和协方差矩阵分别为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{0|0}$ 和 $P_{0|0}$ 的高斯随机向量, Bernoulli 随机变量 r_k^d 可以表示如下:

$$\begin{cases} r_k^d = \left(\prod\limits_{i=0}^{d} \alpha_k^i\right)(1 - \alpha_k^{d+1}) \\ r_k^s = \prod\limits_{i=1}^{s} \alpha_k^i \end{cases} \tag{4}$$

$d = 0, 1, \cdots, s-1$, $\alpha_k^0 = 1$ 和 α_k^i $(i = 1, 2, \cdots, s)$ 是以已知概率取 0 或 1 的 Bernoulli 随机变量, 其中 $p(\alpha_k^i = 1) = p_i$, p_i 是延迟参数. 此外, 本文假设 $\boldsymbol{x}_0$, $\{\boldsymbol{w}_k, k \geq 0\}$, $\{\boldsymbol{v}_k, k \geq 1\}$, $\{\alpha_k^i, k \geq s+1\}$ 是相互独立的. 因此, r_k^d $(d = 0, 1, \cdots, s-1)$ 的概率和期望可以表示如下

$$p_k^d = p(r_k^d = 1) = \mathrm{E}[r_k^d] = \left(\prod_{i=0}^{d} p_i\right)(1 - p_{d+1}) \tag{5}$$

其中, $p_0 = p(\alpha_k^0 = 1) = 1$,

$$p_k^s = p(r_k^s = 1) = \mathrm{E}[r_k^s] = \prod_{i=1}^{s} p_i \tag{6}$$

上式中 p_k^d $(d = 0, 1, \cdots, s)$ 表示在 k 时刻量测出现 d 步延迟的概率.

高斯滤波器是基于后验 PDF $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_k)$ $(k \geq 1)$ 为高斯这一假设设计的, 其中 $\boldsymbol{Y}_k = \{\boldsymbol{y}_i\}_{i=1}^k$ 表示延迟量测. 状态的滤波估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 及估计协方差矩阵 $P_{k,k|k}^{\boldsymbol{xx}}$ 为 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_k)$ $(k \geq 1)$ 的前二阶矩:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_k] \\ P_{k,k|k}^{\boldsymbol{xx}} = \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_k] \end{cases} \tag{7}$$

与文献 [2] 类似, 我们在介绍本文提出的方法前, 作出如下两个假设.

假设 1. 基于$\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 条件, 状态 $\boldsymbol{x}_k$ 的一步后验预测 PDF 是高斯的, 即

$$p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}) = \mathrm{N}(\boldsymbol{x}_k; \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}, P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{xx}}) \tag{8}$$

其中, 状态的一步预测 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 和相应的协方差矩阵 $P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{xx}}$ 分别为 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 的前二阶矩, 即

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}] \\ P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{xx}} = \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}] \end{cases} \tag{9}$$

假设 2. 基于 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 条件, 延迟量测 $\boldsymbol{y}_k$ 的一步后验预测 PDF 是高斯的, 即

$$p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}) = \mathrm{N}(\boldsymbol{y}_k; \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}, P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{yy}}) \tag{10}$$

其中, 延迟量测的一步预测 $\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$ 和相应的协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1}$ 分别为 $p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 的前二阶矩, 即

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}=\mathrm{E}[\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ P^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1}=\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\end{cases}\tag{11}$$

基于假设 1 和 2, 下面本文将推导一种适用于线性和非线性系统的带多步随机延迟量测高斯滤波器的一般框架解.

2 带多步随机延迟量测的高斯滤波器

为了进一步描述带多步随机延迟量测的量测模型, 将式 (2) 和 (4) 代入到式 (3) 得:

$$\boldsymbol{y}_k=\sum_{d=0}^{s}r_k^d[\boldsymbol{h}_{k-d}(\boldsymbol{x}_{k-d})+\boldsymbol{v}_{k-d}],\qquad k\geq 2\tag{12}$$

将式 (12) 代入到式 (11) 给出的 $\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$ 和 $P^{\boldsymbol{yy}}_{k|k-1}$ 的定义中, 我们可以发现 k 时刻 $\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$ 和 $P^{\boldsymbol{yy}}_{k|k-1}$ 的推导依赖于 $k-d$ 时刻基于 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 的状态 $\boldsymbol{x}_{k-d}$ 和量测噪声 $\boldsymbol{v}_{k-d}$ 的估计, 其中 $d=1,2,\cdots,s$. 因此, 与文献 [2] 中仅需近似 $p(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 不同, 在推导一个适用于式 (1)∼(4) 描述系统的高斯滤波器时, 我们必须获得对 $p(\boldsymbol{x}_{k-d}|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 和 $p(\boldsymbol{v}_{k-d}|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 的高斯近似. 通过分别计算 $p(\boldsymbol{x}_{k-d}|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 和 $p(\boldsymbol{v}_{k-d}|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 的前二阶矩可以获得 $\boldsymbol{x}_{k-d}$ 与 $\boldsymbol{v}_{k-d}$ 的估计.

根据以上的分析, 为了处理 s 步随机延迟, 必须对当前时刻的状态 $\boldsymbol{x}_k$ 进行扩展. 因此, 我们定义如下的扩展状态向量, 即

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_k^a=[\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\\ \bar{\boldsymbol{\xi}}_k=[\boldsymbol{x}_{k-s+1}^{a\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{x}_{k-s+2}^{a\mathrm{T}}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_{k-1}^{a\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\xi}_k=[\bar{\boldsymbol{\xi}}_k^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{x}_k^{a\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{13}$$

其中, 扩展状态向量 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_k$ 和 $\boldsymbol{\xi}_k$ 的维数分别为 $\bar{N}=(s-1)(m+n)$ 和 $L=s(m+n)$.

根据式 (13) 中的定义, 假如已经对 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_k)$, $p(\boldsymbol{v}_k|\boldsymbol{Y}_k)$, $p(\boldsymbol{x}_{k-d}|\boldsymbol{Y}_k)$ 和 $p(\boldsymbol{v}_{k-d}|\boldsymbol{Y}_k)$ $(d=1,2,\cdots,s-1)$ 的高斯近似进行更新, 那么扩展状态向量 $\boldsymbol{x}_k^a$, $\bar{\boldsymbol{\xi}}_k^a$ 和 $\boldsymbol{\xi}_k$ 的后验 PDF 也是高斯的, 即

$$\begin{cases}p(\boldsymbol{x}_k^a|\boldsymbol{Y}_k)=\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_k^a;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^a,P_{k,k|k}^{aa})\\ p(\bar{\boldsymbol{\xi}}_k|\boldsymbol{Y}_k)=\mathrm{N}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_k;\hat{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k},P_{k,k|k}^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}})\\ p(\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{Y}_k)=\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k;\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k},P_{k,k|k}^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}})\end{cases}\tag{14}$$

其中

$$\begin{cases}\hat{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k}=\mathrm{E}[\bar{\boldsymbol{\xi}}_k|\boldsymbol{Y}_k]\\ P_{k,k|k}^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}}=\mathrm{E}[\tilde{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k}\tilde{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_k]\end{cases}\tag{15}$$

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^a=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}\\ \hat{\boldsymbol{v}}_{k|k}\end{bmatrix}\\ P_{k,k|k}^{aa}=\begin{bmatrix}P_{k,k|k}^{\boldsymbol{xx}} & P_{k,k|k}^{\boldsymbol{xv}}\\ (P_{k,k|k}^{\boldsymbol{xv}})^{\mathrm{T}} & P_{k,k|k}^{\boldsymbol{vv}}\end{bmatrix}\\ P_{k,k|k}^{\boldsymbol{xv}}=\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k|k}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_k]\end{cases}\tag{16}$$

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k}=\begin{bmatrix}\hat{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^a\end{bmatrix}\\ P_{k,k|k}^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}=\begin{bmatrix}P_{k,k|k}^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}} & P_{k,k|k}^{\bar{\boldsymbol{\xi}}a}\\ (P_{k,k|k}^{\bar{\boldsymbol{\xi}}a})^{\mathrm{T}} & P_{k,k|k}^{aa}\end{bmatrix}\\ P_{k,k|k}^{\bar{\boldsymbol{\xi}}a}=\mathrm{E}[\tilde{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k}^{a\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_k]\end{cases}\tag{17}$$

本文提出的适用于式 (1)∼(4) 描述系统高斯滤波器一般框架解的推导将分为三步, 包括状态的一步预测、量测的一步预测、状态更新. 在推导高斯滤波器的一般框架解之前, 我们定义以下变量:

$$\begin{cases}P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}=\mathrm{E}[(\boldsymbol{\xi}_k-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\xi}_k-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}=\mathrm{E}[\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}],\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}=\mathrm{E}[\boldsymbol{z}_{k-d}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ P_{k,k|k-1}^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{x}}=\mathrm{E}[\tilde{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ P_{k-d_1,k|k-1}^{a\boldsymbol{x}}=\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k-d_1|k-1}^{a}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{y}}=\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ P_{k-d,k-d|k-1}^{\boldsymbol{zz}}=\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ P_{k,k-d|k-1}^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{z}}=\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\end{cases}\tag{18}$$

其中, $d_1=1,\cdots,s-1$ 和 $d=1,\cdots,s$.

2.1 状态一步预测

在本节中, 我们将基于假设 1 和 $k-1$ 时刻的扩展状态估计 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}$ 和协方差矩阵 $P_{k-1,k-1|k-1}^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}$, 推导 k 时刻扩展状态的一步预测估计 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}$ 和协方差矩阵 $P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}$.

根据 $\boldsymbol{v}_k$ 与 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 不相关可以得到:

$$p(\boldsymbol{v}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})=p(\boldsymbol{v}_k)=\mathrm{N}(\boldsymbol{v}_k;0,R_k)\tag{19}$$

基于假设 1, 式 (14) 和 (19) 中的高斯分布, 可以知道 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_k$, $\boldsymbol{x}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 在 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 条件下的联合后验 PDF 也是高斯的, 即

$$p(\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})=\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k;\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1},P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}})\tag{20}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}=\mathrm{E}[\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\tag{21}$$

$$P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}=\mathrm{E}[(\boldsymbol{\xi}_k-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\xi}_k-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\tag{22}$$

首先, 通过代入式 (13) 到式 (21), 并根据 $\boldsymbol{v}_k$ 与 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 不相关, 可以得到:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}=\begin{bmatrix}\hat{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\ \boldsymbol{0}_{m\times 1}\end{bmatrix} \tag{23}$$

通过代入式 (13) 到式 (22) 得到:

$$P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k-1}=\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}\\ \tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\ \boldsymbol{v}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1} & \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1} & \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}_k\end{bmatrix}|\boldsymbol{Y}_{k-1}\right\} \tag{24}$$

由 $\boldsymbol{v}_k$ 与 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 和 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 不相关可以得到:

$$P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k-1}=\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k-1} & P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}\boldsymbol{0}_{\bar{N}\times m}\\ \left(P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}\right)^{\mathrm{T}} & P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}\boldsymbol{0}_{n\times m}\\ \boldsymbol{0}_{m\times\bar{N}} & \boldsymbol{0}_{m\times n} \quad R_k\end{bmatrix} \tag{25}$$

根据式 (18) 中 $P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}$ 和 $P^{a\boldsymbol{x}}_{k-d,k|k-1}$ 的定义, 有:

$$\begin{aligned}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}=&\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}^a_{k-s+1|k-1}\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{x}}^a_{k-d|k-1}\\ \vdots\\ \tilde{\boldsymbol{x}}^a_{k-1|k-1}\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}\right\}=\\ &\begin{bmatrix}P^{a\boldsymbol{x}}_{k-s+1,k|k-1}\\ \vdots\\ P^{a\boldsymbol{x}}_{k-d,k|k-1}\\ \vdots\\ P^{a\boldsymbol{x}}_{k-1,k|k-1}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{26}$$

其中, $d=1,2,\cdots,s-1$.

其次, 根据 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 的定义, 可以得到:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=&\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\\ &\mathrm{E}[\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{w}_{k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\end{aligned} \tag{27}$$

考虑到 $\boldsymbol{w}_{k-1}$ 与 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 不相关, 可以得到:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=&\int_{\mathbf{R}^L}\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_{k-1};\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1},\\ &P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{k-1}\end{aligned} \tag{28}$$

根据 $P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}$ 在式 (9) 中的定义, 可以得到:

$$\begin{aligned}P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}=&\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\\ &\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}]-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}=\\ &\mathrm{E}[\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})|\boldsymbol{Y}_{k-1}]-\\ &\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}+Q_{k-1}=\\ &\int_{\mathbf{R}^L}\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_{k-1};\\ &\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1},P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{k-1}-\\ &\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}+Q_{k-1}\end{aligned} \tag{29}$$

根据式 (18) 中 $P^{a\boldsymbol{x}}_{k-d,k|k-1}$ 的定义, 可以得到:

$$\begin{aligned}P^{a\boldsymbol{x}}_{k-d,k|k-1}=&\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}^a_{k-d|k-1}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\\ &\mathrm{E}[\boldsymbol{x}^a_{k-d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}]-\hat{\boldsymbol{x}}^a_{k-d|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}=\\ &\mathrm{E}[\boldsymbol{x}^a_{k-d}(\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{w}_{k-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]-\\ &\hat{\boldsymbol{x}}^a_{k-d|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}\end{aligned} \tag{30}$$

考虑到 $\boldsymbol{w}_{k-1}$ 与 $\boldsymbol{x}^a_{k-1}$ 不相关, 可以得到:

$$\begin{aligned}P^{a\boldsymbol{x}}_{k-d,k|k-1}=&\int_{\mathbf{R}^L}\boldsymbol{x}^a_{k-d}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_{k-1};\\ &\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1},P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{k-1}-\\ &\hat{\boldsymbol{x}}^a_{k-d|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}\end{aligned} \tag{31}$$

在上一时刻滤波中已经获得扩展状态的估计和协方差矩阵, 表示如下:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}^a_{k-s|k-1}\\ \hat{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}\end{bmatrix}\\ P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k-1,k-1|k-1}=\begin{bmatrix}P^{aa}_{k-s,k-s|k-1} & P^{a\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k-s,k|k-1}\\ \left(P^{a\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k-s,k|k-1}\right)^{\mathrm{T}} & P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k-1}\end{bmatrix}\end{cases} \tag{32}$$

因此, 式 (23) 中的 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}$ 和式 (25) 中的 $P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k-1}$ 可以依据式 (32) 从上一时刻的扩展状态估计 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}$ 和协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k-1,k-1|k-1}$ 中获得.

2.2　量测一步预测

在本节中, 我们将基于假设 1 和 2、$k-1$ 时刻的扩展状态估计 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}$ 和协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k-1,k-1|k-1}$、$k$ 时刻扩展状态的一步预测估计 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}$ 和协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k-1}$, 推导量测的一步预测估计 $\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$、协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1}$ 和互协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1}$.

考虑到 Bernoulli 随机变量的独立性假设, 可以得到 $p(r^d_k=1|\boldsymbol{Y}_{k-1})=p^d_k$ $(d=0,1,\cdots,s)$. 然后

在假设 2 下, 通过代入延迟量测到 $\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$ 的定义中, 可以得到:

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} = \sum_{d=0}^{\min(k-1,\mathrm{s})} p_k^d \hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1} \tag{33}$$

继而, 估计误差 $\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$ 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} = & \boldsymbol{y}_k - \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} = \\ & \sum_{d=0}^{\min(k-1,s)} r_k^d(\boldsymbol{z}_{k-d} - \hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}) + \\ & \sum_{d=0}^{\min(k-1,s)} r_k^d \hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1} - \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\end{aligned} \tag{34}$$

考虑到 r_k^d 独立于量测 $\boldsymbol{z}_{k-d}$, 并代入式 (4)∼(6) 和式 (34) 到 $P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{yy}}$ 和 $P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi y}}$ 的定义中, 可以得到:

$$\begin{aligned}P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{yy}} = & \sum_{d=0}^{\min(k-1,s)} p_k^d P_{k-d,k-d|k-1}^{\boldsymbol{zz}} + \\ & \sum_{d=0}^{\min(k-1,s)} p_k^d \hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}^{\mathrm{T}} - \\ & \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{35}$$

$$P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi y}} = \sum_{d=0}^{\min(k-1,\mathrm{s})} p_k^d P_{k,k-d|k-1}^{\boldsymbol{\xi z}} \tag{36}$$

通过代入 k 时刻的理想量测函数到 $\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}$, $P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{zz}}$ 和 $P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi z}}$ 的定义中, 可以得到:

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k)|\boldsymbol{Y}_{k-1}] \tag{37}$$

$$\begin{aligned}P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{zz}} = & \mathrm{E}[(\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k)(\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k)^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}] - \\ & \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}} = \mathrm{E}[\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k)|\boldsymbol{Y}_{k-1}] + \\ & \mathrm{E}[\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}] - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi z}} = & \mathrm{E}[\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}] - \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}} = \\ & \mathrm{E}[\boldsymbol{\xi}_k(\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k)^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}] - \\ & \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{39}$$

注意 $\boldsymbol{v}_k$ 是均值为零、方差为 R_k 的高斯白噪声, 同时它独立于 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$, 并且 $\boldsymbol{z}_k$ 是 $\boldsymbol{\xi}_k$ 的一个函数, 然后在假设 1 和 $p(\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 的高斯近似下, ($\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}$ 和 $P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi\xi}}$ 已在第 2.1 节中给出), 可以得到:

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} = \int_{\mathbf{R}^L} \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}, P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi\xi}})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_k \tag{40}$$

$$\begin{aligned}P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{zz}} = & \int_{\mathbf{R}^L} \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k) \times \\ & \mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}, P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi\xi}})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_k - \\ & \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}} + R_k\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi z}} = & \int_{\mathbf{R}^L} \boldsymbol{\xi}_k(\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k)^{\mathrm{T}} \times \\ & \mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}, P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi\xi}})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_k - \\ & \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{42}$$

同理, 代入 $k-d$ 时刻的 d ($d = 1, 2, \cdots, s-1$) 步延迟量测函数到式 (18): $\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}$, $P_{k-d,k-d|k-1}^{\boldsymbol{zz}}$ 和 $P_{k,k-d|k-1}^{\boldsymbol{\xi z}}$ 的定义中得到:

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{h}_{k-d}(\boldsymbol{x}_{k-d}) + \boldsymbol{v}_{k-d})|\boldsymbol{Y}_{k-1}] \tag{43}$$

$$\begin{aligned}P_{k-d,k-d|k-1}^{\boldsymbol{zz}} = & \\ & \mathrm{E}[(\boldsymbol{h}_{k-d}(\boldsymbol{x}_{k-d}) + \boldsymbol{v}_{k-d})(\boldsymbol{h}_{k-d}(\boldsymbol{x}_{k-d}) + \\ & \boldsymbol{v}_{k-d})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}] - \hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}P_{k,k-d|k-1}^{\boldsymbol{\xi z}} = & \mathrm{E}[\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{z}_{k-d}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}] - \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}^{\mathrm{T}} = \\ & \mathrm{E}[\boldsymbol{\xi}_k(\boldsymbol{h}_{k-d}(\boldsymbol{x}_{k-d}) + \boldsymbol{v}_{k-d})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}] - \\ & \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{45}$$

在假设 1 和 $p(\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 的高斯近似下, 根据 $\boldsymbol{z}_{k-d}$ ($d = 1, 2, \cdots, s-1$) 是 $\boldsymbol{\xi}_k$ 的函数, 可以得到:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1} = & \int_{\mathbf{R}^L} (\boldsymbol{h}_{k-d}(\boldsymbol{x}_{k-d}) + \boldsymbol{v}_{k-d}) \times \\ & \mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}, P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi\xi}})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_k\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}P_{k-d,k-d|k-1}^{\boldsymbol{zz}} = & \\ & \int_{\mathbf{R}^L} (\boldsymbol{h}_{k-d}(\boldsymbol{x}_{k-d}) + \boldsymbol{v}_{k-d})(\boldsymbol{h}_{k-d}(\boldsymbol{x}_{k-d}) + \\ & \boldsymbol{v}_{k-d})^{\mathrm{T}}\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}, P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi\xi}})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_k - \\ & \hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}P_{k,k-d|k-1}^{\boldsymbol{\xi z}} = & \int_{\mathbf{R}^L} \xi_k(\boldsymbol{h}_{k-d}(\boldsymbol{x}_{k-d}) + \boldsymbol{v}_{k-d})^{\mathrm{T}} \times \\ & \mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}, P_{k,k|k-1}^{\boldsymbol{\xi\xi}})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_k - \\ & \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k-d|k-1}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{48}$$

其中, $d=1,2,\cdots,s-1$. 通过代入 $k-s$ 时刻的 s 步延迟量测函数到到式 (18) $\hat{\boldsymbol{z}}_{k-s|k-1}$, $P^{\boldsymbol{zz}}_{k-s,k-s|k-1}$ 和 $P^{\boldsymbol{\xi z}}_{k,k-s|k-1}$ 的定义中得到:

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k-s|k-1}=\mathrm{E}[(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\boldsymbol{v}_{k-s})|\boldsymbol{Y}_{k-1}] \tag{49}$$

$$\begin{aligned}P^{\boldsymbol{zz}}_{k-s,k-s|k-1}=&\\ &\mathrm{E}[(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\boldsymbol{v}_{k-s})(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\\ &\boldsymbol{v}_{k-s})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]-\hat{\boldsymbol{z}}_{k-s|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-s|k-1}\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}P^{\boldsymbol{\xi z}}_{k,k-s|k-1}=\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix}\tilde{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}\\ \tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\ \boldsymbol{v}_k\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-s|k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}\right\}=&\\ \begin{bmatrix}\mathrm{E}[\bar{\boldsymbol{\xi}}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]-\hat{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-s|k-1}\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-s|k-1}\\ 0_{m\times m}\end{bmatrix}=&\\ \begin{bmatrix}\mathrm{E}[\bar{\boldsymbol{\xi}}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ 0_{m\times m}\end{bmatrix}-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-s|k-1}&\end{aligned} \tag{51}$$

和

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\bar{\boldsymbol{\xi}}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\\ &\quad\mathrm{E}[\bar{\boldsymbol{\xi}}_k(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\boldsymbol{v}_{k-s})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\\ &\quad\mathrm{E}[(\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{w}_{k-1})\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\end{aligned} \tag{53}$$

根据 $\boldsymbol{w}_{k-1}$ 与 $\boldsymbol{z}_{k-s}$ 是不相关的, 可以得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=&\mathrm{E}[\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\\ &\mathrm{E}[\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\\ &\boldsymbol{v}_{k-s})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\end{aligned} \tag{54}$$

在 $p(\boldsymbol{\xi}_{k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1})$ 的高斯近似下, 根据 $\boldsymbol{z}_{k-s}$ 是 $\boldsymbol{\xi}_{k-1}$ 的函数, 可以得到:

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{z}}_{k-s|k-1}=\\ &\quad\int_{\mathbf{R}^L}(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\boldsymbol{v}_{k-s})\times\\ &\quad\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_{k-1};\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1},P^{\boldsymbol{\xi\xi}}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{k-1}\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}&P^{\boldsymbol{zz}}_{k-s,k-s|k-1}=\\ &\quad\int_{\mathbf{R}^L}(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\boldsymbol{v}_{k-s})(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\\ &\quad\boldsymbol{v}_{k-s})^{\mathrm{T}}\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_{k-1};\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1},\ P^{\boldsymbol{\xi\xi}}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{k-1}-\\ &\quad\hat{\boldsymbol{z}}_{k-s|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-s|k-1}\end{aligned} \tag{56}$$

$$P^{\boldsymbol{\xi z}}_{k,k-s|k-1}=\begin{bmatrix}\mathrm{E}[\bar{\boldsymbol{\xi}}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]\\ 0_{m\times m}\end{bmatrix}-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-s|k-1} \tag{57}$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\bar{\boldsymbol{\xi}}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\\ &\quad\int_{\mathbf{R}^L}\bar{\boldsymbol{\xi}}_k(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\boldsymbol{v}_{k-s})^{\mathrm{T}}\times\\ &\quad\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_{k-1};\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1},P^{\boldsymbol{\xi\xi}}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{k-1}\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-s}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\\ &\quad\int_{\mathbf{R}^L}\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})(\boldsymbol{h}_{k-s}(\boldsymbol{x}_{k-s})+\boldsymbol{v}_{k-s})^{\mathrm{T}}\times\\ &\quad\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_{k-1};\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1},P^{\boldsymbol{\xi\xi}}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{k-1}\end{aligned} \tag{59}$$

2.3　状态更新

在本节中, 我们将基于假设 1 和 2, $k-1$ 时刻的扩展状态估计 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}$ 和协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{\xi\xi}}_{k-1,k-1|k-1}$、$k$ 时刻扩展状态的一步预测估计 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}$ 和协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{\xi\xi}}_{k,k|k-1}$、$k$ 时刻量测的一步预测估计 $\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}$、协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1}$ 和互协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{\xi y}}_{k,k|k-1}$, 推导状态的滤波估计 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k}$ 和协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{\xi\xi}}_{k,k|k}$.

基于式 (10) 和 (20) 中的高斯分布, 可以知道 $\boldsymbol{\xi}_k$ 和 $\boldsymbol{y}_k$ 在 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 条件下的联合后验 PDF 也是高斯的, 即

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{\xi}_k,\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})=\mathrm{N}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_k\\ \boldsymbol{y}_k\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1}\\ \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\end{bmatrix},\right.&\\ \left.\begin{bmatrix}P^{\boldsymbol{\xi\xi}}_{k,k|k-1} & P^{\boldsymbol{\xi y}}_{k,k|k-1}\\ (P^{\boldsymbol{\xi y}}_{k,k|k-1})^{\mathrm{T}} & P^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1}\end{bmatrix}\right)&\end{aligned} \tag{60}$$

根据贝叶斯准则, 可以得到:

$$p(\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{Y}_k)=\frac{p(\boldsymbol{\xi}_k,\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})}{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1})} \tag{61}$$

令

$$\Sigma = \begin{bmatrix} P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k-1} & P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1} \\ (P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1})^{\mathrm{T}} & P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1} \end{bmatrix} \tag{62}$$

重排式 (60) 有:

$$p(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1} & \tilde{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}\end{bmatrix} \times \Sigma^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\end{bmatrix}\right) \tag{63}$$

首先根据式 (62), Σ 能够重写为

$$\Sigma = \begin{bmatrix} I_L & K^{\boldsymbol{\xi}}_k \\ 0_{m\times L} & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k} & 0_{L\times m} \\ 0_{m\times L} & P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_L & 0_{L\times m} \\ (K^{\boldsymbol{\xi}}_k)^{\mathrm{T}} & I_m \end{bmatrix} \tag{64}$$

和

$$|\Sigma| = \left|P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k}\right|\left|P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1}\right| \tag{65}$$

其中, $K^{\boldsymbol{\xi}}_k$ 和 $P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k}$ 可以表示为

$$K^{\boldsymbol{\xi}}_k = P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1}(P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1})^{-1} \tag{66}$$

$$P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k} = P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k-1} - K^{\boldsymbol{\xi}}_k P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1}(K^{\boldsymbol{\xi}}_k)^{\mathrm{T}} \tag{67}$$

从而, 可以得到 Σ^{-1} 为

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} I_L & 0_{L\times m} \\ -(K^{\boldsymbol{\xi}}_k)^{\mathrm{T}} & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k})^{-1} & 0_{L\times m} \\ 0_{m\times L} & (P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1})^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_L & -K^{\boldsymbol{\xi}}_k \\ 0_{m\times L} & I_m \end{bmatrix} \tag{68}$$

进一步, 通过代入式 (65) 和 (68) 到式 (63), 可以得到:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}) = {} & \frac{1}{\sqrt{\left|2\pi P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k}\right|\left|2\pi P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1}\right|}} \times \\ & \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} - K^{\boldsymbol{\xi}}_k\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}(P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k})^{-1}\times \right. \\ & (\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} - K^{\boldsymbol{\xi}}_k\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}) - \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} \times \\ & \left.(P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1})^{-1}\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}\right\} = \\ & \mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k}, P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k})p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{Y}_{k-1}) \end{aligned} \tag{69}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k}$ 可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1} + K^{\boldsymbol{\xi}}_k(\boldsymbol{y}_k - \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}) \tag{70}$$

通过代入式 (69) 到式 (61), 可以得到:

$$p(\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{Y}_k) = \mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k}, P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k}) \tag{71}$$

综上所述, 式 (23), (25), (26), (33), (35), (36), (57), (66), (67), (70) 中的解析计算和式 (28), (29), (31), (40) ∼ (42), (46) ∼ (48), (55), (56), (58), (59) 中的高斯加权积分构成了带多步随机延迟量测高斯滤波器的一般框架解. 待估计的状态向量 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 和协方差矩阵 $P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k}$ 可以分别从 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k}$ 和 $P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k}$ 中得到.

2.4 讨论

在接下来的定理 1 和 2 中, 我们将证明不带随机延迟量测的标准高斯滤波器[1] 和带一步随机延迟量测的高斯滤波器[2] 都是本文提出的高斯滤波器的特例.

定理 1. 当延迟步数 $s = 0$ 和延迟参数 $p_1 = 0$ 时, 本文提出的高斯滤波器将退化为标准的高斯滤波器.

证明. 如果 $p_1 = 0$, 那么

$$\begin{cases} \alpha^1_k = 0, & \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{z}_k \\ r^0_k = 1, & p^0_k = 1 \end{cases} \tag{72}$$

通过代入式 (72) 到式 (33), (35), (36), 可以得到:

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} = \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} \tag{73}$$

$$P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1} = P^{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1} \tag{74}$$

$$P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1} = P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1} \tag{75}$$

因为非线性系统函数 $\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})$ 不包含向量 $\boldsymbol{x}^a_{k-d}$ $(d = 2, 3, \cdots, s)$ 和 $\boldsymbol{v}_{k-1}$, 所以在式 (28), (29) 和式 (31) 的积分计算中, 联合分布 $\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1|k-1}, P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k-1,k-1|k-1})$ 可以边缘化为 $\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}, P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k-1,k-1|k-1})$, 从而可以得到:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \int_{\mathbf{R}^n} \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}, P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1} \tag{76}$$

$$P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1} = \int_{\mathbf{R}^n} \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_{k-1}; \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}, P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1} + Q_{k-1} \tag{77}$$

注意当 $s = 0$ 时, 式 (46) ∼ (48) 不存在, 并且式 (55) ∼ (59) 等于式 (40) ∼ (42), 因此仅需要计算式 (40) ∼ (42) 中的积分. 因为非线性量测函数 $\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)$ 不包含向量 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$, 所有在式 (40) 和 (41) 的积分

计算中, 联合分布 $\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k;\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1},P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k-1})$ 可以边缘化为 $\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1})$, 从而可以得到:

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}=\int_{\mathbf{R}^n}\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k \tag{78}$$

$$\begin{aligned}P^{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}=&\int_{\mathbf{R}^n}\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k)\times\\&\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k-\\&\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}+R_k\end{aligned} \tag{79}$$

根据 $P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}$ 在式 (18) 中的定义, 可以得到:

$$P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}=\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}z}_{k,k|k-1}\\P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}\\R_k\end{bmatrix} \tag{80}$$

代入式 (73) ∼ (75) 和 (80) 到式 (66) 和 (70) 得到:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k}\\\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}\\\hat{\boldsymbol{v}}_{k|k}\end{bmatrix}=&\begin{bmatrix}\hat{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}\\\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\\hat{\boldsymbol{v}}_{k|k-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}\\P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}\\R_k\end{bmatrix}\times\\&(P^{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1})^{-1}(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})\end{aligned} \tag{81}$$

其中

$$\begin{aligned}P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}=&\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\\&\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}=\\&\int_{\mathbf{R}^n}\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k)\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_k;\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k-\\&\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k|k-1}\end{aligned} \tag{82}$$

从式 (81) 中可知

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}+K^{\boldsymbol{x}}_k(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}) \tag{83}$$

其中

$$K^{\boldsymbol{x}}_k=P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}(P^{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1})^{-1} \tag{84}$$

代入式 (74) ∼ (75) 和 (80) 到式 (67) 得到:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k}&P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}x}_{k,k|k}&P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}v}_{k,k|k}\\P^{\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k}&P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k}&P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{v}}_{k,k|k}\\P^{\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k}&P^{\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}}_{k,k|k}&P^{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}_{k,k|k}\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k-1}&P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}x}_{k,k|k-1}&P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}v}_{k,k|k-1}\\P^{\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k-1}&P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}&P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{v}}_{k,k|k-1}\\P^{\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k-1}&P^{\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}&P^{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}_{k,k|k-1}\end{bmatrix}-\\&\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}z}_{k,k|k-1}\\P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}\\R_k\end{bmatrix}(P^{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1})^{-1}\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}z}_{k,k|k-1}\\P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}\\R_k\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{85}$$

此外, 从式 (85) 可以得到:

$$P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k}=P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}-K^{\boldsymbol{x}}_kP^{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}K^{\boldsymbol{x}\mathrm{T}}_k \tag{86}$$

式 (83)、(84) 和 (86) 中的解析计算和式 (76) ∼ (79) 和式 (82) 中的高斯加权积分共同构成了标准的高斯滤波器. 因此, 标准的高斯滤波器是本文提出的高斯滤波器在延迟步数 $s=0$ 和延迟参数 $p_1=0$ 情况下的一种特例. □

定理 2. 当延迟步数 $s=1$ 和延迟参数 $p_2=0$ 时, 本文提出的高斯滤波器将退化为带一步随机延迟量测的高斯滤波器.

证明. 当 $p_2=0$ 时, 可以得到:

$$\begin{cases}\alpha^2_k=0, & \boldsymbol{y}_k=(1-\alpha^1_k)\boldsymbol{z}_k+\alpha^1_k\boldsymbol{z}_{k-1}\\r^0_k=1-\alpha^1_kp^0_k=1-p_1\\r^1_k=\alpha^1_k, & p^1_k=p_1\end{cases} \tag{87}$$

通过代入式 (87) 到式 (33), (35), (36) 得到:

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}=(1-p_1)\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}+p_1\hat{\boldsymbol{z}}_{k-1|k-1} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}P^{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1}=&(1-p_1)P^{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}+p_1P^{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}_{k-1,k-1|k-1}+\\&(1-p_1)p_1(\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k-1|k-1})\times\\&(\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k-1|k-1})^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{89}$$

$$P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{y}}_{k,k|k-1}=(1-p_1)P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}+p_1P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{z}}_{k,k-1|k-1} \tag{90}$$

与定理 1 中 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$, $P^{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}$, $\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}$ 和 $P^{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}$ 的推导类似, 在定理 2 中, 也可以得到式 (76) ∼ (79). 因为非线性量测函数 $(\boldsymbol{h}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{v}_{k-1})$ 不包含向量 $\boldsymbol{x}^a_{k-d}$ $(d=2,3,\cdots,s-1)$ 和 $\boldsymbol{x}^a_k$, 所以在式 (46) 和 (47) 的积分计算中, 联合分布 $\mathrm{N}(\boldsymbol{\xi}_k;\hat{\boldsymbol{\xi}}_{k|k-1},P^{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}_{k,k|k-1})$ 可以边缘化为 $\mathrm{N}(\boldsymbol{x}^a_{k-1};\hat{\boldsymbol{x}}^a_{k|k-1},P^{aa}_{k-1,k-1|k-1})$, 从而可以得到

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{z}}_{k-1|k-1}=&\int_{\mathbf{R}^{m+n}}(\boldsymbol{h}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{v}_{k-1})\mathrm{N}(\boldsymbol{x}^a_{k-1};\\&\hat{\boldsymbol{x}}^a_{k-1|k-1},P^{aa}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}^a_{k-1}\end{aligned} \tag{91}$$

$$P^{\boldsymbol{zz}}_{k-1,k-1|k-1}=\int_{\mathbf{R}^{m+n}}(\boldsymbol{h}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{v}_{k-1})\times (\boldsymbol{h}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{v}_{k-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{N}(\boldsymbol{x}^a_{k-1};\hat{\boldsymbol{x}}^a_{k-1|k-1},P^{aa}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}^a_{k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k-1|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-1|k-1} \tag{92}$$

与定理 1 中 $P^{\boldsymbol{\xi z}}_{k,k|k-1}$ 的推导类似, 在定理 2 中, 我们也可以得到式 (80). 然后, 根据 $P^{\boldsymbol{\xi z}}_{k,k-1|k-1}$ 在式 (18) 中的定义, 可以得到:

$$P^{\boldsymbol{\xi z}}_{k,k-1|k-1}=\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{z}}_{k,k-1|k-1}\\ P^{\boldsymbol{xz}}_{k,k-1|k-1}\\ \mathbf{0}_m\end{bmatrix} \tag{93}$$

通过代入式 (80) 和 (93) 到式 (90), $P^{\boldsymbol{\xi y}}_{k,k|k-1}$ 可以表示为

$$P^{\boldsymbol{\xi y}}_{k,k|k-1}=\begin{bmatrix}(1-p_1)P^{a\boldsymbol{z}}_{k-1,k|k-1}+p_1P^{a\boldsymbol{z}}_{k-1,k-1|k-1}\\ (1-p_1)P^{x\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}+p_1P^{\boldsymbol{xz}}_{k,k-1|k-1}\\ (1-p_1)R_k\end{bmatrix} \tag{94}$$

其中, $P^{\boldsymbol{xz}}_{k,k|k-1}$ 在式 (82) 中给出, 且

$$P^{\boldsymbol{xz}}_{k,k-1|k-1}=\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\tilde{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-1|k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]=\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}_{k-1}|\boldsymbol{Y}_{k-1}]-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-1|k-1}=\int_{\mathbf{R}^{m+n}}\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})(\boldsymbol{h}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{v}_{k-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{N}(\boldsymbol{x}^a_{k-1};\hat{\boldsymbol{x}}^a_{k-1|k-1},P^{aa}_{k-1,k-1|k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}^a_{k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}_{k-1|k-1} \tag{95}$$

代入式 (94) 到式 (66) 和 (70) 得到:

$$\begin{bmatrix}\hat{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}\\ \hat{\boldsymbol{v}}_{k|k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-p_1)P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}+p_1P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{z}}_{k,k-1|k-1}\\ (1-p_1)P^{\boldsymbol{xz}}_{k,k|k-1}+p_1P^{\boldsymbol{xz}}_{k,k-1|k-1}\\ (1-p_1)R_k\end{bmatrix}\times(P^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1})^{-1}(\boldsymbol{y}_k-\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1})+\begin{bmatrix}\hat{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k|k-1}\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\ \mathbf{0}_{m\times 1}\end{bmatrix} \tag{96}$$

从式 (96) 可以得到:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}+K^{\boldsymbol{x}}_k(\boldsymbol{y}_k-\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}) \tag{97}$$

其中

$$K^{\boldsymbol{x}}_k=((1-p_1)P^{\boldsymbol{xz}}_{k,k|k-1}+p_1P^{\boldsymbol{xz}}_{k,k-1|k-1})(P^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1})^{-1} \tag{98}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{k|k}=K^{\boldsymbol{v}}_k(\boldsymbol{y}_k-\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}) \tag{99}$$

其中

$$K^{\boldsymbol{v}}_k=(1-p_1)R_k(P^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1})^{-1} \tag{100}$$

代入式 (94), (98) 和 (100) 到式 (67) 得到:

$$\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k}&P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{x}}_{k,k|k}&P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}}_{k,k|k}\\ P^{\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k}&P^{\boldsymbol{xx}}_{k,k|k}&P^{\boldsymbol{xv}}_{k,k|k}\\ P^{\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k}&P^{\boldsymbol{vx}}_{k,k|k}&P^{\boldsymbol{vv}}_{k,k|k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k-1}&P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{x}}_{k,k|k-1}&P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}}_{k,k|k-1}\\ P^{\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k-1}&P^{\boldsymbol{xx}}_{k,k|k-1}&P^{\boldsymbol{xv}}_{k,k|k-1}\\ P^{\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{k,k|k-1}&P^{\boldsymbol{vx}}_{k,k|k-1}&P^{\boldsymbol{vv}}_{k,k|k-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\Delta_k\\ K^{\boldsymbol{x}}_k\\ K^{\boldsymbol{v}}_k\end{bmatrix}P^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1}\begin{bmatrix}\Delta_k\\ K^{\boldsymbol{x}}_k\\ K^{\boldsymbol{v}}_k\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{101}$$

其中

$$\Delta_k=((1-p_1)P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{z}}_{k,k|k-1}+p_1P^{\bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{z}}_{k,k-1|k-1})(P^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1})^{-1} \tag{102}$$

此外, 从式 (101) 可以得到:

$$P^{\boldsymbol{xx}}_{k,k|k}=P^{\boldsymbol{xx}}_{k,k|k-1}-K^{\boldsymbol{x}}_kP^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1}K^{\boldsymbol{x}\mathrm{T}}_k \tag{103}$$

$$P^{\boldsymbol{vv}}_{k,k|k}=R_k-K^{\boldsymbol{v}}_kP^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1}K^{\boldsymbol{v}\mathrm{T}}_k \tag{104}$$

$$P^{\boldsymbol{xv}}_{k,k|k}=-K^{\boldsymbol{x}}_kP^{\boldsymbol{yy}}_{k,k|k-1}K^{\boldsymbol{v}\mathrm{T}}_k \tag{105}$$

式 (88) ∼ (90), (97) ∼ (100), (103) ∼ (105) 中的解析计算和式 (76) ∼ (79), (82), (91) ∼ (92), (95) 中的高斯加权积分共同构成了带一步随机延迟量测的高斯滤波器. 因此, 带一步随机延迟量测的高斯滤波器也是本文提出的高斯滤波器在延迟步数 $s=1$ 和延迟参数 $p_2=0$ 情况下的一种特例. □

此外, 在本文提出的高斯滤波器的推导中, 假如系统 (1) 中的函数 $\boldsymbol{f}_{k-1}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{h}_k(\cdot)$ 都是线性的, 那么本文提出的高斯滤波器可以自动地退化为带多步随机延迟量测的线性卡尔曼滤波器. 通过使用不同的数值近似方法来计算式 (28), (29), (31), (40) ∼ (42), (46) ∼ (48), (55), (56), (58), (59) 中的高斯加权积分, 可以获得不同的高斯近似滤波算法, 比如利用三阶球径容积准则, 可以得到一种带多步随机延迟量测的 CKF.

接下来, 本文将利用三阶球径容积准则来实施提出的带多步随机延迟量测高斯滤波器, 并通过目标跟踪仿真来验证提出方法的有效性和优点.

3 仿真

本节将通过一个目标跟踪仿真来验证本文提出的带多步随机延迟量测高斯滤波器的优越性. 目标跟踪已经被广泛地用作一个标准问题来验证滤波器的性能, 它的系统方程可以表示如下[1]:

$$\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\sin\Omega T_0}{\Omega} & 0 & \dfrac{\cos\Omega T_0-1}{\Omega} & 0\\ 0 & \cos\Omega T_0 & 0 & -\sin\Omega T_0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-\cos\Omega T_0}{\Omega} & 1 & \dfrac{\sin\Omega T_0}{\Omega} & 0\\ 0 & \sin\Omega T_0 & 0 & \cos\Omega T_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{k-1}+\boldsymbol{w}_{k-1} \tag{106}$$

其中, 状态向量 $\boldsymbol{x}=[\varsigma\ \dot{\varsigma}\ \eta\ \dot{\eta}\ \Omega]^{\mathrm{T}}$; ς 和 η 分别表示 x 和 y 方向的位置, $\dot{\varsigma}$ 和 $\dot{\eta}$ 分别表示 x 和 y 方向的速度; Ω 表示未知恒定的转弯速率; 量测间隔 (或系统离散时间) $T_0=1\,\mathrm{s}$; 系统噪声 $\boldsymbol{w}_k\sim\mathrm{N}(\boldsymbol{0},Q)$, 非奇异系统噪声协方差矩阵 $Q=\mu\cdot\mathrm{diag}\{q_1M\ \ q_1M\ \ q_2T_0\}$, 其中 μ 是一个控制系统不确定度的参数, $q_1=0.1\,\mathrm{m^2s^{-3}}$, 和

$$M=\begin{bmatrix}\dfrac{T_0^3}{3} & \dfrac{T_0^2}{2}\\ \dfrac{T_0^2}{2} & T_0\end{bmatrix} \tag{107}$$

量测方程如下:

$$\boldsymbol{z}_k=\begin{bmatrix}r_k\\ \theta_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\varsigma_k^2+\eta_k^2}\\ \tan^{-1}\left(\dfrac{\eta_k}{\varsigma_k}\right)\end{bmatrix}+\boldsymbol{v}_k \tag{108}$$

其中, $\boldsymbol{z}_k$ 是 k 时刻的理想量测输出, r_k 是 k 时刻理想的幅值量测, θ_k 是 k 时刻理想的方位量测, 量测噪声 $\boldsymbol{v}_k\sim\mathrm{N}(\boldsymbol{0},R)$, $R=\mathrm{diag}\ \{\sigma_r^2\quad\sigma_\theta^2\}$, $\sigma_r=10\,\mathrm{m}$ 和 $\sigma_\theta=\sqrt{10}\,\mathrm{m\cdot rad}$. 为了对跟踪的目标进行状态估计, 理想量测输出 $\boldsymbol{z}_k$ 将通过通信网络被送到数据处理中心. 由于通信信道带宽有限, 数据处理中心里的实际量测可能是理想量测的多步延迟[12−13], 实际的延迟量测 $\boldsymbol{y}_k$ 与理想量测 $\boldsymbol{z}_k$ 的关系表示在式 (3) 和 (4) 中, 其中延迟步数 s 和延迟参数 p_i 将在如下不同的仿真中给予不同的值. 真实的初始状态为

$$\boldsymbol{x}_0=\left[1\,000\,\mathrm{m}\ 300\,\mathrm{ms^{-1}}\ 1\,000\,\mathrm{m}\ 0\,\mathrm{ms^{-1}}\ \ -3^{\circ}\mathrm{s^{-1}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{109}$$

和相应的协方差矩阵为

$$P_{0|0}=\mu\cdot\mathrm{diag}\{100\,\mathrm{m^2}\ 10\,\mathrm{m^2s^{-2}}\ 100\,\mathrm{m^2}\ 10\,\mathrm{m^2s^{-2}}\ 100\,\mathrm{m\cdot rad^2s^{-2}}\} \tag{110}$$

在每一次运行中, 初始状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{0|0}$ 被随机地从 $\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_0,P_{0|0})$ 中选取, 并且所有滤波器具有相同的初始条件, 仿真时间为 $T=100\,\mathrm{s}$. 为了公平比较, 我们做了 250 次独立 Monte Carlo 运行. 为了比较这些滤波器的性能, 我们使用位置、速度和转弯速率的每个时刻方根均方误差 (Root-mean square error, RMSE), 每次 Monte Carlo 运行的方根均方误差 $\overline{\mathrm{RMSE}}$ 和它们的平均 RMSE (Averaged RMSE, ARMSE) 作为性能指标. 定义第 k 时刻位置的 RMSE 为

$$\mathrm{RMSE}_{\mathrm{pos}}(k)=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\left(\varsigma_k^n-\hat{\varsigma}_k^n\right)^2+\left(\eta_k^n-\hat{\eta}_k^n\right)\right)^2} \tag{111}$$

定义第 n 次 Monte Carlo 运行位置的 $\overline{\mathrm{RMSE}}$ 为

$$\overline{\mathrm{RMSE}}_{\mathrm{pos}}(n)=\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\left(\left(\varsigma_k^n-\hat{\varsigma}_k^n\right)^2+\left(\eta_k^n-\hat{\eta}_k^n\right)\right)^2} \tag{112}$$

定义位置的 ARMSE 为

$$\mathrm{ARMSE}_{\mathrm{pos}}=\sqrt{\frac{1}{NT}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{T}\left(\left(\varsigma_k^n-\hat{\varsigma}_k^n\right)^2+\left(\eta_k^n-\hat{\eta}_k^n\right)\right)^2} \tag{113}$$

其中, (ς_k^n,η_k^n) 和 $(\hat{\varsigma}_k^n,\hat{\eta}_k^n)$ 表示在第 n 次 Monte Carlo 运行时第 k 时刻真实的位置和估计的位置. 与位置的 RMSE、$\overline{\mathrm{RMSE}}$ 和 ARMSE 类似, 我们也可以写出速度和转弯速度的 RMSE、$\overline{\mathrm{RMSE}}$ 和 ARMSE 公式. 为了实施提出的高斯滤波器, 本仿真中采用三阶球径容积准则来数值计算一般框架解中的高斯加权积分. 为了评估提出滤波器的性能, 我们将考虑如下三种仿真:

仿真 1. 在仿真 1 中, 我们选择带三步随机延迟量测的非线性系统作为一个实施例子来验证所提出方法的有效性. 在此仿真中, 仿真参数选择如下, 系统不确定度控制参数 $\mu=1$, 量测无延迟概率为 $p_k^0=0.1$, 一步延迟概率为 $p_k^1=0.09$, 两步延迟概率为 $p_k^2=0.081$, 三步延迟概率为 $p_k^3=0.729$. 利用式 (5) 和 (6), 可以计算得到延迟步数 $s=3$, 延迟参数 $p_1=p_2=p_3=0.9$. 图 1∼3 展示了仿真的 RMSE 结果, 表 1∼3 展示了仿真 $\overline{\mathrm{RMSE}}$ 的均值和方差.

如图 1∼3 和表 1∼3 所示, 当标准 CKF、带一步随机延迟量测的 CKF、带两步随机延迟量测的 CKF 和带三步随机延迟量测的 CKF 用于处理带三步随机延迟量测的非线性系统的状态估计时, 本文

提出的带三步随机延迟量测的 CKF 具有好的滤波性能, 其他的滤波器都出现了滤波发散.

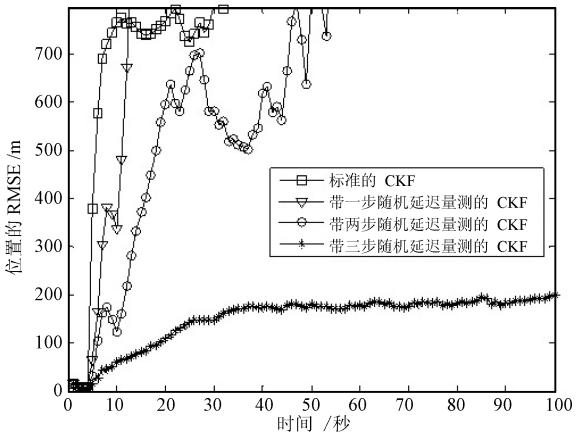


图 1 不同滤波方法的位置 RMSE

Fig. 1 RMSEs of the position of different filtering methods

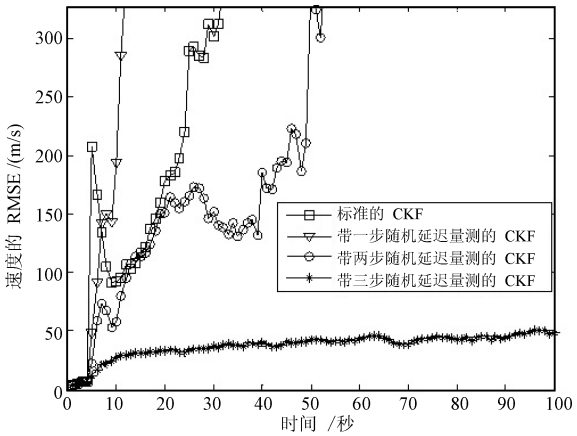


图 2 不同滤波方法的速度 RMSE

Fig. 2 RMSEs of the velocity of different filtering methods

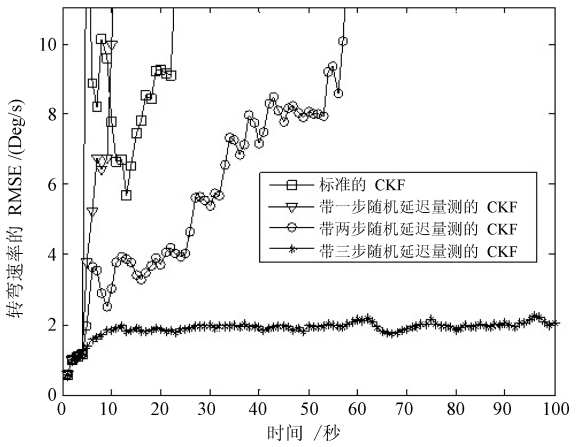


图 3 不同滤波方法的转弯速率 RMSE

Fig. 3 RMSEs of the turn rate of different filtering methods

表 1 位置 $\overline{\text{RMSE}}$ 的均值和方差

Table 1 The mean and variance of position $\overline{\text{RMSE}}$

滤波器	均值 (m)	方差 (m^2)
标准的 CKF	1.19×10^8	2.3×10^{18}
一步延迟 CKF	5.88×10^{14}	4.82×10^{31}
两步延迟 CKF	5.99×10^2	4.52×10^6
三步延迟 CKF	1.57×10^2	6.89×10^2

表 2 速度 $\overline{\text{RMSE}}$ 的均值和方差

Table 2 The mean and variance of velocity $\overline{\text{RMSE}}$

滤波器	均值 (m/s)	方差 (m^2/s^2)
标准的 CKF	4.91×10^9	5.61×10^{21}
一步延迟 CKF	4.71×10^{15}	3.70×10^{33}
两步延迟 CKF	2.66×10^2	3.11×10^6
三步延迟 CKF	3.82×10^1	7.56×10^1

表 3 转弯速率 $\overline{\text{RMSE}}$ 的均值和方差

Table 3 The mean and variance of turn rate $\overline{\text{RMSE}}$

滤波器	均值 (Deg/s)	方差 (Deg^2/s^2)
标准的 CKF	90.46	4.03×10^4
一步延迟 CKF	89.53	4.78×10^3
两步延迟 CKF	4.53	99.44
三步延迟 CKF	1.87	0.103

为了进一步说明标准 CKF、带一步随机延迟量测的 CKF 及带两步随机延迟量测的 CKF 滤波方法发散的原因, 我们给出了理想的量测输出与本仿真中的三步随机延迟量测输出仿真结果. 如图 4 和 5 所示, 对于目标跟踪应用, 它的量测变化剧烈. 在本仿真中量测存在三步随机延迟, 标准 CKF、带一步随机延迟量测的 CKF 或带两步随机延迟量测的 CKF 考虑的量测模型均与本仿真中的量测输出不符, 三步随机延迟导致理想的量测输出与本仿真中的随机延迟量测输出存在较大的差异, 严重地降低了状态估计精度, 导致了滤波发散.

仿真 2. 在仿真 2 中, 我们将比较本文提出的方法和现有的带两步随机延迟量测的 EKF 和 UKF[15]. 在这种情况下, 我们将选取带两步随机延迟量测的非线性系统作为一个实施例子. 在此仿真中, 仿真参数选择如下, 系统不确定度控制参数 $\mu = 0.01, 0.02, \cdots, 1$, 量测无延迟概率为 $p_k^0 = 0.5$, 一步延迟概率为 $p_k^1 = 0.25$, 两步延迟概率为 $p_k^2 = 0.25$. 利用式 (5) 和 (6), 可以计算得到延迟步数 $s = 2$, 延迟参数 $p_1 = p_2 = 0.5$. 图 6∼8 展示了仿真的 ARMSE 结果.

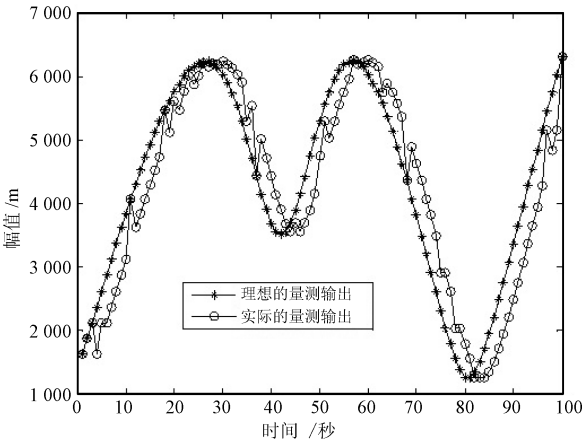


图 4　理想的幅值量测与实际的幅值量测输出

Fig. 4　Ideal range measurement and practical range measurement output

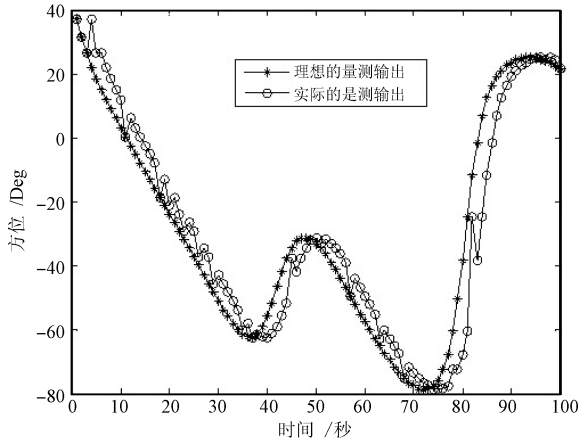


图 5　理想的方位量测与实际的方位量测输出

Fig. 5　Ideal bearing measurement and practical bearing measurement output

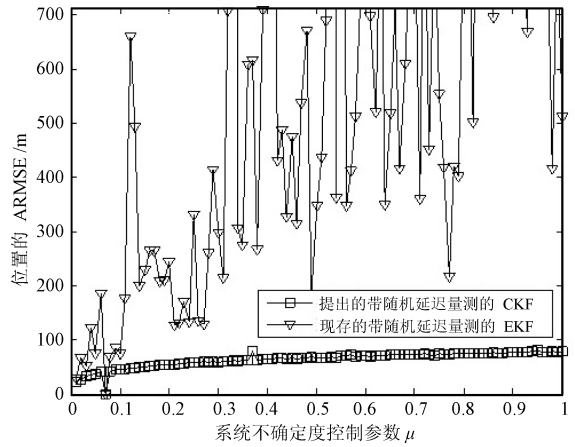


图 6　不同滤波方法的位置 ARMSE

Fig. 6　ARMSEs of the position of different filtering methods

在仿真中, 我们发现当 $\kappa = 3 - L$ 时, 现有的带随机延迟量测的 UKF 经常停止运行, 并且它的 ARMSEs 结果变得不可用, 因而没有在图 6～8 中给出. 此外, 从图 6～8 中可以看到现有的带随机延迟量测的 EKF 的 ARMSEs 随着初始估计误差和系统噪声增大而发散, 但是提出的 CKF 具有满意的性能. 因此, 提出的 CKF 对于不同的初始估计误差和噪声具有好的鲁棒性, 而现有的带随机延迟量测的 EKF 在非线性系统包含大的初始估计误差、大的系统噪声或强非线性情况下可能会失败.

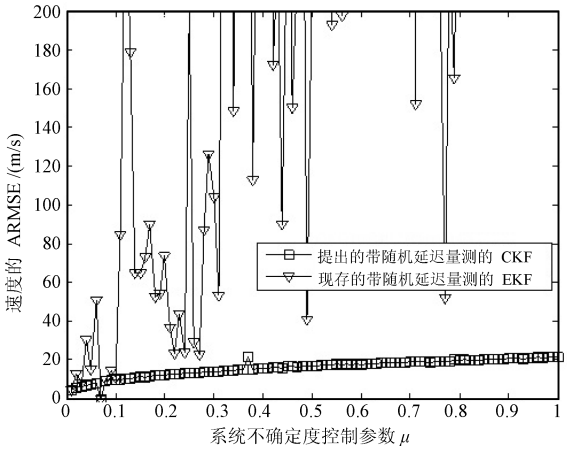


图 7　不同滤波方法的速度 ARMSE

Fig. 7　ARMSEs of the velocity of different filtering methods

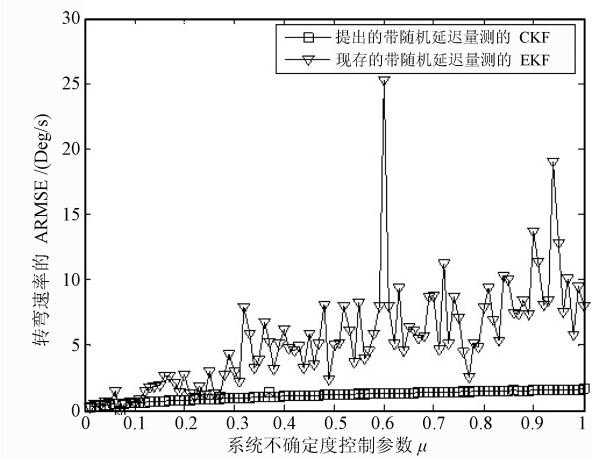


图 8　不同滤波方法的转弯速率 ARMSE

Fig. 8　ARMSEs of the turn rate of different filtering methods

仿真 3. 在仿真 3 中, 我们研究延迟参数对提出方法的影响. 以本文提出的带两步随机延迟量测的 CKF 作为一个实施例子, 即延迟步数 $s = 2$, 为了验证提出方法的性能, 选择延迟参数为 $p_1 = 0.1, 0.2, \cdots, 1$, $p_2 = 0.1, 0.2, \cdots, 1$, 系统不确定度控制参数 $\mu = 1$. 图 9～11 展示了仿真的 ARMSE

结果.

从图 9～11 中可以看到, 提出方法的 ARMSE 随着延迟参数 p_1 和 p_2 的增大而增大, 并且 p_2 比 p_1 对提出方法的影响更大. 从而可以推断量测的时间延迟会降低非线性系统状态估计的性能. 在不同的延迟参数条件下本文提出的方法都能够较好地完成状态估计.

4 结论

本文提出了一种适用于线性和非线性系统的带多步随机延迟量测高斯滤波器的一般框架解, 且证明了标准的高斯滤波器和带一步随机延迟量测的高斯滤波器都是本文提出的方法的特例. 对于非线性系统, 利用不同的数值近似方法, 可以获得不同的带多步随机延迟量测高斯近似滤波器. 仿真结果表明, 本文提出的方法适用于带多步延迟量测系统的状态估计, 且对于带一步和两步延迟量测的系统, 本文提出的方法优于现有的 EKF 和 UKF 算法.

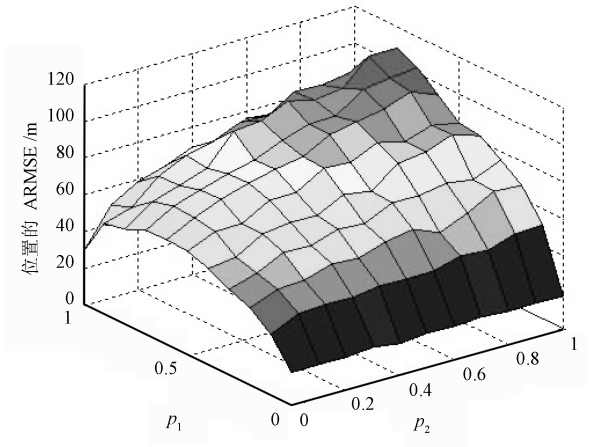


图 9 不同延迟参数的位置 ARMSE

Fig. 9 ARMSEs of the position of different latency parameters

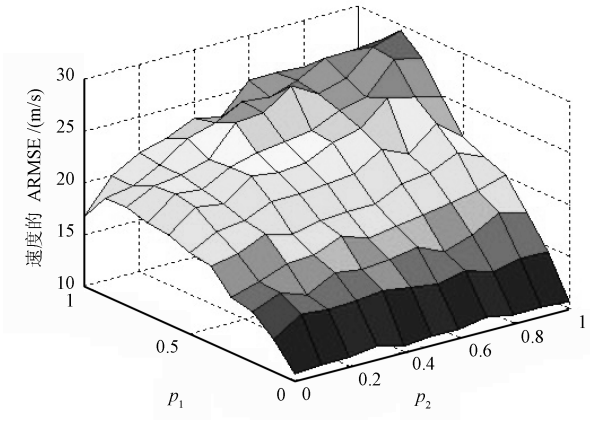


图 10 不同延迟参数的速度 ARMSE

Fig. 10 ARMSEs of the velocity of different latency parameters

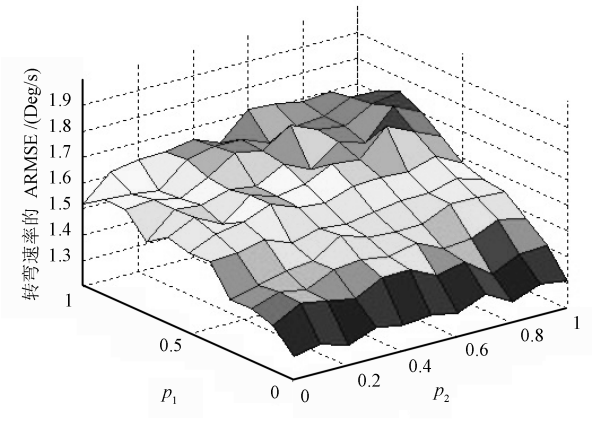


图 11 不同延迟参数的转弯速率 ARMSE

Fig. 11 ARMSEs of the turn rate of different latency parameters

References

1 Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1254−1269

2 Wang X X, Liang Y, Pan Q, Zhao C H. Gaussian filter for nonlinear systems with one-step randomly delayed measurements. *Automatica*, 2013, **49**(4): 976−986

3 Jia B, Xin M, Cheng Y. High-degree cubature Kalman filter. *Automatica*, 2013, **49**(2): 510−518

4 Jia B, Xin M, Cheng Y. Sparse-grid quadrature nonlinear filtering. *Automatica*, 2012, **48**(2): 327−341

5 Dunik J, Straka O, Simandl M. Stochastic integration filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(6): 1561−1566

6 Zhang X C. A novel cubature Kalman filter for nonlinear state estimation. In: Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control. Florence, Italy: IEEE, 2013. 7797−7802

7 Wang S Y, Feng J C, Tse C K. Spherical simplex-radial cubature Kalman filter. *IEEE Signal Processing Letter*, 2014, **21**(1): 43−46

8 Wang Lu, Li Guang-Chun, Qiao Xiang-Wei, Wang Zhao-Long, Ma Tao. An adaptive UKF algorithm based on maximum likelihood principle and expectation maximization algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1200−1210 (王璐, 李光春, 乔相伟, 王兆龙, 马涛. 基于极大似然准则和最大期望算法的自适应 UKF 算法. 自动化学报, 2012, **38**(7): 1200−1210)

9 Zhang Yong-Gang, Huang Yu-Long, Wu Zhe-Min, Li Ning. A high order unscented Kalman filtering method. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(5): 838−848

(张勇刚, 黄玉龙, 武哲民, 李宁. 一种高阶无迹卡尔曼滤波方法. 自动化学报, 2014, **40**(5): 838−848)

10 Chang L B, Hu B Q, Li A, Qin F J. Transformed unscented Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013 **58**(1): 252−257

11 Wang Xiao-Xu, Liang Yan, Pan Quan, Zhao Chun-Hui, Li Han-Zhou. Unscented Kalman filter for nonlinear systems with colored measurement noise. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(6): 986−998
(王小旭, 梁彦, 潘泉, 赵春晖, 李汉舟. 带有色量测噪声的非线性系统 Unscented 卡尔曼滤波器. 自动化学报, 2012, **38**(6): 986−998)

12 Yang F W, Wang Z D, Feng G, Liu X H. Robust filtering with randomly varying sensor delay: the finite-horizon case. *IEEE Transactions on Circuits and Systems — I*, 2009, **56**(3): 664−672

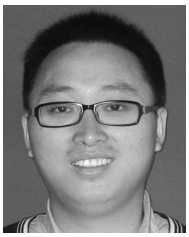
13 Chen S J, Li Y Y, Qi G Q, Sheng A D. Adaptive Kalman estimation in target tracking mixed with random one-step delays, stochastic-bias measurements, and missing measurements. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013, **2013**: Article ID 716915

14 Hermoso-Carazo A, linares-Pérez J. Extended and unscented filtering algorithms using one-step randomly delayed observations. *Applied Mathematics Computation*, 2007, **190**(2): 1375−1393

15 Hermoso-Carazo A, linares-Pérez J. Unscented filtering algorithm using two-step randomly delayed obserations in nonlinear systems. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, **33**(9): 3705−3717

16 Wang X X, Pan Q, Liang Y, Yang F. Gaussian smoothers for nonlinear systems with one-step randomly delayed measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(7): 1828−1835

张勇刚 哈尔滨工程大学自动化学院研究员. 2007 年获得英国 Cardiff 大学博士学位. 主要研究方向为光纤陀螺, 惯性导航, 滤波算法和组合导航.
E-mail: zhangyg@hrbeu.edu.cn
(**ZHANG Yong-Gang** Professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. He received his Ph. D. degree from Cardiff University, UK in 2007. His research interest covers fiber-optic gyroscope, inertial navigation, filtering algorithms, and integrated navigation.)



黄玉龙 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为惯性导航, 滤波算法和组合导航. 本文通信作者.
E-mail: heuedu@163.com
(**HUANG Yu-Long** Ph. D. candidate at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers inertial navigation, filtering algorithm, and integrated navigation. Corresponding author of this paper.)

赵 琳 哈尔滨工程大学自动化学院教授. 主要研究方向为惯性导航, 卫星导航, 组合导航.
E-mail: zhaolin@hrbeu.edu.cn
(**ZHAO Lin** Professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers inertial navigation, satellite navigation, and integrated navigation.)