三参数区间灰数信息下风险型多准则决策方法

李存斌 [1] 赵 坤 [1] 祁之强 [1]

摘 要 针对概率和准则值均为三参数区间灰数的多准则决策问题, 本文提出了一种基于前景理论的决策方法. 该方法首先定义了三参数区间灰数的距离和精确记分函数, 并通过讨论其性质给出了比较大小的方法; 其次, 通过给出三参数区间灰数前景价值和概率权重函数的定义, 以多参考点为思路, 构建前景决策矩阵, 并通过提出参考点集结算子, 集结出综合前景决策矩阵. 进而, 由优化模型求得的最优准则权系数加权得出方案的综合前景值及排序; 最后, 通过算例对比说明了该方法的合理性和可靠性.

关键词 风险型决策, 前景理论, 三参数区间灰数, 参考点

引用格式 李存斌, 赵坤, 祁之强. 三参数区间灰数信息下风险型多准则决策方法. 自动化学报, 2015, **41**(7): 1306−1314

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140157

A Risky Multi-criteria Decision-making Method with Three-parameter Interval Grey Number

LI Cun-Bin[1] ZHAO Kun[1] QI Zhi-Qiang[1]

Abstract In view of the multi-criteria decision-making problem that probabilities and the criteria values of alternatives are both three-parameter interval grey number, a risky decision-making approach based on prospect theory is proposed. In this method, firstly, the distance and the exact function of three-parameter interval grey number are defined, and on the basis of the analysis and discussion of its properties, a three-parameter interval grey number comparison method is defined. Secondly, we give the definition of the prospect value function and the probabilities weighting function of three-parameter interval grey number. Then, the prospect value of each alternative is calculated based on multi-reference point, and the integrated prospect decision matrix is constructed by giving the reference point aggregating operator. Moreover, the integrated prospect value of each alternative is aggregated by the integrated prospect decision matrix and the optimal criteria weights given by the optimization model. After that we can order these alternatives by comparing their integrated prospect values. Finally, an example is presented to examine the effectiveness of our method.

Key words Risky decision-making, prospect theory, three-parameter interval number, reference point

Citation Li Cun-Bin, Zhao Kun, Qi Zhi-Qiang. A risky multi-criteria decision-making method with three-parameter interval grey number. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(7): 1306−1314

目前, 多准则决策问题已成为决策科学、系统工程、管理运筹等学科的热点, 且该理论和方法已在社会学、石油、军事和工程技术等领域广泛应用. 然而, 由于实际决策环境的复杂性、事物本身的模糊性, 导致决策者在参与评判的过程中常常伴随着多重的不确定性, 如随机性、模糊性和灰色性等因素, 其决策值也往往很难用一个精确的数值来表述. 针对上述问题, 文献 [1−4] 采用区间灰数刻画决策信息进行了研究. 但当使用区间灰数表述决策信息时, 由于灰数在区间内的取值机会均等, 为了覆盖整个取值范围, 可能导致区间灰数的上限与下限取值过大. 此外, 区间灰数的混合运算也会进一步扩大计算结果的取值范围, 这将导致决策结果产生较大的误差, 甚至产生错误的现象[5]. 因此, 文献 [5−6] 结合区间灰数和三角模糊数在刻画不确定信息时的互补优势性, 提出三参数区间灰数的概念, 并对决策信息为三参数区间灰数的风险型多准则决策方法进行了研究.

然而, 在实际决策过程中, 外界环境往往具有复杂性和不确定性, 决策者可能会面临多种不确定的自然状态, 且各自然状态下各方案准则值出现的概率也可能不同, 这将直接影响到最终的决策结果. 因此, 针对考虑到外界环境状态的这类风险型多准则决策问题, 文献 [7−8] 利用期望效用理论进行了研究, 也取得了一定的成果, 但由于该理论是基于决策者 "完全理性" 的假设, 这与 Simon 提出的人是 "有限理性" 的原则完全不符, 在实际决策中也很难应

收稿日期 2014-03-14 录用日期 2015-03-20
Manuscript received March 14, 2014; accepted March 20, 2015
国家自然科学基金 (71071054, 71271084) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (71071054, 71271084)
本文责任编委 李乐飞
Recommended by Associate Editor LI Le-Fei
1. 华北电力大学经济与管理学院 北京 102206
1. School of Economics and Management, North China Electronic Power University, Beijing 102206

用. 因此, Kahneman 和 Tversky 针对上述问题通过大量的实验、调查于 1979 年提出了前景理论, 该理论是基于决策者实际决策过程中的行为原则进行抽象提炼形成的[9], 它充分考虑了决策者对损失更敏感的风险态度, 并解释了期望效用理论所无法解释的现象, 如 ALLias 和 Ellsberg 悖论. 目前, 它已被广泛应用于相关领域的研究中[10−12], 但由于三参数区间灰数的概念提出相对较晚, 目前尚未发现将前景理论应用于准则值和概率均为三参数区间灰数的风险型多准则决策问题的研究中.

鉴于此, 针对准则值和概率均为三参数区间灰数的风险型多准则决策问题, 本文提出了一种基于前景理论决策的方法. 在该方法中, 首先针对三参数区间灰数的性质进行了研究, 提出一种新的三参数区间灰数距离度量的方法, 并通过定义三参数区间灰数的精确记分函数, 给出三参数区间灰数比较大小的方法; 其次, 本文通过结合三参数区间灰数的性质和上述两个定义, 将前景理论从实数运算拓展到三参数区间灰数的操作. 进而, 为综合考虑决策者面临收益和损失时不同的风险态度, 本文以多参考点为思路, 分别以正负理想点和中点为参考点得出前景决策矩阵, 并通过构建参考点集结算子, 集结出综合前景矩阵; 此外, 为增加决策结果的可靠性, 本文通过构建兼顾主客观准则权信息的优化模型, 给出一种新的定权方法. 进而, 通过综合前景决策矩阵和最优准则权系数, 可得出各方案的综合前景值及排序. 最后, 通过算例将本文方法与文献 [13−14] 进行对比分析, 说明了本文方法的合理性和可靠性.

1　三参数区间灰数

1.1　三参数区间灰数的定义及运算法则

本文采用三参数区间灰数来刻画决策准则信息, 既保证了区间灰数的取值范围, 又突出了灰数取值可能性最大的 “重心点”, 这恰恰弥补了灰数 “贫信息” 的不足, 也使评判过程更符合实际工程[5], 其具体定义如下:

定义 1[6]**.** 设 $a(\otimes)$ 是一个已知最大可能性取值的区间灰数, 记为 $a(\otimes)\in[\underline{a},\widetilde{a},\overline{a}]$, 则 $a(\otimes)$ 称为三参数区间灰数. 其中, $\underline{a}$, $\overline{a}$ 分别表示三参数区间灰数取值的下限、上限, $\widetilde{a}$ 表示三参数区间灰数中取值可能性最大的灰数, 称为重心或理想值.

注 1. 当重心未知时, 三参数区间灰数就退化为普通的区间灰数.

针对三参数区间灰数的基本运算法则, 本文采用文献 [6] 中的方法, 其具体内容为:

1) 加法运算: $a(\otimes)+b(\otimes)\in[\underline{a}+\underline{b},\widetilde{a}+\widetilde{b},\overline{a}+\overline{b}]$;

2) 除法运算: $a(\otimes)/b(\otimes)\in[\min\{\underline{a}/\underline{b},\underline{a}/\overline{b},\overline{a}/\underline{b},\overline{a}/\overline{b}\},\widetilde{a}/\widetilde{b},\max\{\underline{a}/\underline{b},\underline{a}/\overline{b},\overline{a}/\underline{b},\overline{a}/\overline{b}\}]$;

3) 幂方运算: 若 $n\geq 0$, 则 $a(\otimes)^n\in[\underline{a}^n,\widetilde{a}^n,\overline{a}^n]$; 若 $n<0$, 则 $a(\otimes)^n\in[\overline{a}^n,\widetilde{a}^n,\underline{a}^n]$.

1.2　三参数区间灰数距离的度量

针对 $a(\otimes)\in[\underline{a},\widetilde{a},\overline{a}]$ 与 $b(\otimes)\in[\underline{b},\widetilde{b},\overline{b}]$ 这两个三参数区间灰数的距离运算, 文献 [15] 直接将三参数分别对应相减, 取各自的最大值定义为距离, 其公式形式为 $D_1(a(\otimes),b(\otimes))=\max\{|\underline{a}-\underline{b}|,|\widetilde{a}-\widetilde{b}|,|\overline{a}-\overline{b}|\}$; 文献 [16] 借用欧氏距离定义为三参数区间灰数距离: $D_2(a(\otimes),b(\otimes))=\sqrt{(\underline{a}-\underline{b})^2+(\widetilde{a}-\widetilde{b})^2+(\overline{a}-\overline{b})^2}$; 文献 [6] 对文献 [16] 中表达式进行改进, 取 1/3 作为各参数的平均权重, 其公式为 $D_3(a(\otimes),b(\otimes))=3^{-\frac{1}{2}}\sqrt{(\underline{a}-\underline{b})^2+(\widetilde{a}-\widetilde{b})^2+(\overline{a}-\overline{b})^2}$. 上述 3 个文献虽然均考虑到了三参数区间灰数的上限、下限、重心点这三个主要特征, 但没有体现出重心点在区间灰数的特殊性, 重心点代表着区间灰数中最有可能发生的灰数, 不应与其他两个参数做同等对待. 因此, 本文结合决策者不同的风险态度, 给出一种新的三参数区间灰数距离度量定义, 其详细内容如下所示.

定义 2. 设 $a(\otimes)\in[\underline{a},\widetilde{a},\overline{a}]$ 与 $b(\otimes)\in[\underline{b},\widetilde{b},\overline{b}]$ 为两个三参数区间灰数, 则称:

$$D_4=\sqrt{\frac{2}{3}(\widetilde{a}-\widetilde{b})^2+\frac{\alpha_1(\underline{a}-\underline{b})^2+\beta_1(\overline{a}-\overline{b})^2}{3(\alpha_1+\beta_1)}}\quad(1)$$

为两个三参数区间灰数的距离, 记为 $D_4(a(\otimes),b(\otimes))$. 其中, α_1 和 β_1 分别代表了决策者的风险态度系数, 且两参数的取值范围为 $0\leq\alpha_1,\beta_1\leq 1,\alpha_1+\beta_1\neq 0$. 其中, 当 $\alpha_1>\beta_1$ 时, 表示决策者相对于较好的信息更倾向于用较差的信息来衡量两个三参数区间灰数的距离, 即代表决策者为风险规避者; 当 $\alpha_1<\beta_1$ 时, 表示决策者更倾向于用较好的信息来衡量距离, 即代表决策者为风险偏好者; 当 $\alpha_1=\beta_1$ 时, 表示决策者综合了较好和较差的信息来衡量距离, 即代表决策者为风险中立者.

注 2. 当两个三参数区间灰数中重心值 $\widetilde{a}$ 与 $\widetilde{b}$ 未知时, 则上述距离运算就退化为 $D_4(a(\otimes),b(\otimes))=\sqrt{\frac{\alpha_1(\underline{a}-\underline{b})^2+\beta_1(\overline{a}-\overline{b})^2}{\alpha_1+\beta_1}}$; 当两个三参数区间灰数中存在 $\underline{a}=\widetilde{a}=\overline{a}$ 和 $\underline{b}=\widetilde{b}=\overline{b}$ 的情况时, 上述距离运算就退化为实数的运算, 即为 $D_4(a(\otimes),b(\otimes))=|\underline{a}-\underline{b}|$.

为验证定义 2 中距离式 (1) 的合理性和优势性, 本文将式 (1) 与上述 3 个文献中的方法通过举例进行了对比和分析, 其详细结果如表 1 所示.

通过分析表 1 中各方法所得的结果可发现:

1) 针对第 1 列与第 2∼4 列的数据, 可发现: 第 1 列中两个三参数区间灰数的重心值相差较大、左右端点值相差较小, 第 2∼4 列与第 1 列情形相反, 重心值相差较小、左右端点值相差较大. 按照三参数区间灰数的定义, 第 1 列中两个三参数区间灰数的距离就应该大于第 2∼4 列, 这与本文提出的距离公式的结论相符, 而前三个距离公式均是相反的, 这忽略了重心点在区间灰数中的特殊性.

2) 针对第 3 列与第 4 列的数据, 可发现: 第 3 列与第 4 列三参数区间灰数的重心值相差相同, 第 3 列中三参数区间灰数的左端点相差较小、右端点相差较大, 而第 4 列与此相反. 此时, 考虑到决策者风险态度, 当决策者为风险爱好者, 即 $\alpha_1 < \beta_1$, 则第 3 列区间灰数的距离应大于第 4 列; 当决策者为风险规避者, 即 $\alpha_1 > \beta_1$, 则第 3 列区间灰数的距离就应该小于第 4 列, 这与本文提出的距离公式结论相符, 而前 3 个距离公式仅能得到第 3 列大于第 4 列这一种结论, 这忽略了决策者的风险态度对其的影响.

1.3 三参数区间灰数精确记分函数及比较大小

一般情况下, 三参数区间灰数的分布信息是很难确定的, 此时, 若采用传统区间灰数的方法, 即仅通过中点和区间长度对三参数区间灰数的大小进行比较, 则忽略重心点在区间灰数上的特殊性, 同时也不能从本质上区别区间灰数与三参数区间灰数. 因此, 本文在三参数区间灰数分布信息未知的情况下, 结合三参数区间灰数的 3 个特征量 (重心点、中点和区间长度) 给出三参数区间灰数精确记分函数的定义, 并以此为基础得出三参数区间灰数比较大小的方法, 其详细内容如下所示.

定义 3. 设 $a(\otimes) \in [\underline{a}, \widetilde{a}, \overline{a}]$ 为三参数区间灰数, 则 $a(\otimes)$ 的精确记分函数 $G(a(\otimes))$:

$$G(a(\otimes)) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{a} + \frac{\overline{a} + \underline{a}}{2}\right) \tag{2}$$

性质 1. 设 $a(\otimes) \in [\underline{a}, \widetilde{a}, \overline{a}]$ 为三参数区间灰数, 精确记分函数 $G(a(\otimes))$ 满足:

1) $\underline{a} \le G(a(\otimes)) \le \overline{a}$;

2) 当 $\widetilde{a} = (\overline{a} + \underline{a})/2$ 时, $G(a(\otimes)) = \widetilde{a} = (\overline{a} + \underline{a})/2$; 当 $\widetilde{a} = \overline{a} = \underline{a}$ 时, $G(a(\otimes)) = \widetilde{a} = \overline{a} = \underline{a}$.

基于上述三参数区间灰数精确记分函数的定义, 则可得出比较大小的方法, 其详细内容如下.

定义 4. 设 $a(\otimes) \in [\underline{a}, \widetilde{a}, \overline{a}]$ 和 $b(\otimes) \in [\underline{b}, \widetilde{b}, \overline{b}]$ 为两个三参数区间灰数, $G(a(\otimes))$ 和 $G(b(\otimes))$ 分别为两个三参数区间灰数的精确记分函数, 若 $G(a(\otimes)) > G(b(\otimes))$, 则 $a(\otimes) > b(\otimes)$, 也记 $a(\otimes) \underset{G}{>} b(\otimes)$; 否则, $a(\otimes) \underset{G}{\le} b(\otimes)$.

为说明上述定义的合理性和优势性, 本文将上述方法与文献 [17] 中的方法通过论证和举例的方式进行了对比分析, 其具体内容如下所示.

1) 理论分析

依据文献 [17] 中可能度的定义, 只要两个三参数区间灰数的可能度公式满足 $p(a(\otimes) > b(\otimes)) > 0.5$, 则可得出 $a(\otimes) > b(\otimes)$ 的结论, 其中可能度的公式为 $p(a(\otimes) > b(\otimes)) = \min\left(1, \max\left(\dfrac{\overline{a} - \underline{b} + \widetilde{a} - \widetilde{b}}{l_a + l_b}, 0\right)\right)$, 因此, 只要满足 $\dfrac{\overline{a} - \underline{b} + \widetilde{a} - \widetilde{b}}{l_a + l_b} > 0.5$ 的条件, 则可得出 $a(\otimes) > b(\otimes)$. 其中 $l_a = \overline{a} - \underline{a}$、$l_b = \overline{b} - \underline{b}$, 将其带入可能度公式化简可得: 只要能够满足 $\dfrac{1}{2}\left(\widetilde{a} + \dfrac{\overline{a} + \underline{a}}{2}\right) > \dfrac{1}{2}\left(\widetilde{b} + \dfrac{\overline{b} + \underline{b}}{2}\right)$ 的条件, 则 $a(\otimes) > b(\otimes)$. 这与定义 4 中的方法具有相同的原理, 因此, 定义 4 中提出的方法从理论分析上是可行的.

2) 举例分析

本文通过三个典型的例子对定义 4 和文献 [17] 中的方法进行了验证, 其详细内容如表 2 所示.

表 1 文献 [6, 15−16] 与定义 2 中距离运算的结果

Table 1 The distance result comparison of [6, 15−16] and method in this paper

		$a_1(\otimes)$	$b_1(\otimes)$	$a_2(\otimes)$	$b_2(\otimes)$	$a_3(\otimes)$	$b_3(\otimes)$	$a_4(\otimes)$	$b_4(\otimes)$
		[75, 80, 92]	[74, 85, 90]	[75, 80, 92]	[70, 81, 85]	[75, 80, 92]	[74, 81, 85]	[75, 80, 92]	[69, 81, 91]
	D_1	5		7		7		6	
	D_2	5.477		8.66		7.141		6.164	
	D_3	3.16		5		4.123		3.559	
D_4	$\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.9$	4.219		3.924		3.715		1.826	
	$\alpha_1 = \beta_1$	4.183		3.606		3		2.614	
	$\alpha_1 = 0.9, \beta_1 = 0.1$	4.147		3.256		2.049		3.215	

表 2　定义 4 与文献 [17] 中方法所得的结果

Table 2　The result comparison of [17] and Definition 4

$a(\otimes)$	$b(\otimes)$	定义 4		文献 [17]	
$[10,35,45]$	$[40,60,70]$	$31.25=G(a(\otimes))<G(b(\otimes))=57.5$	$a(\otimes)<b(\otimes)$	$P(a(\otimes)\geq b(\otimes))=0$	$a(\otimes)<b(\otimes)$
$[20,35,60]$	$[20,35,60]$	$40=G(a(\otimes))>G(b(\otimes))=37.5$	$a(\otimes)>b(\otimes)$	$P(a(\otimes)\geq b(\otimes))=0.5714$	$a(\otimes)>b(\otimes)$
$[20,35,50]$	$[15,40,45]$	$35=G(a(\otimes))=G(b(\otimes))=35$	$a(\otimes)=b(\otimes)$	$P(a(\otimes)\geq b(\otimes))=0.5$	$a(\otimes)=b(\otimes)$

对表 2 所得的结果进行分析, 可发现: a) 定义 4 中方法所得的结果与文献 [17] 是完全一致的; b) 定义 4 中的方法仅需加法运算即可得出其结果, 计算过程较为简便、明了, 而文献 [17] 的方法在基本四则运算的基础上还需进行求 min 和 max 操作, 计算过程较为复杂.

基于上述理论分析和举例分析, 已充分体现出本文所提三参数区间灰数精确记分函数和比较大小方法是具有一定的可行性和优势性.

2　前景理论

1979 年, Kahnemanh 和 Tversky 结合心理学和行为科学, 经过大量的调查和实验, 在 Simon 提出人类有限理性原则的基础上, 提出了前景理论[9].

前景理论中前景价值主要是由 “价值函数” 和 “决策权重函数” 共同来决定的, 即

$$V=\sum_{i=1}^{n}\pi(p_i)v(\Delta x_i) \tag{3}$$

其中, $\pi(p)$ 为决策权重函数, 它是概率 p 的非线性单调增函数; $v(\Delta x)$ 为价值函数, 是决策者的主观感受价值[18]. 其具体计算公式如下:

$$\pi(p)=\begin{cases}\dfrac{p^{\gamma}}{(p^{\gamma}+(1-p)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}}, & \Delta x_i\geq 0\\ \dfrac{p^{\delta}}{(p^{\delta}+(1-p)^{\delta})^{\frac{1}{\delta}}}, & \Delta x_i\leq 0\end{cases} \tag{4}$$

$$v(\Delta x_i)=\begin{cases}(\Delta x_i)^{\alpha}, & \Delta x_i\geq 0\\ -\lambda(\Delta x_i)^{\beta}, & \Delta x_i\leq 0\end{cases} \tag{5}$$

其中, $\Delta x_i=x_i-x_0$, 它代表决策准则值 x_i 相对于参考点 x_0 的差值; 在决策权重函数中, p 为决策准则值 x_i 发生的概率, 参数 γ、δ 是用来控制权重函数曲线的曲率, 它能较好地刻画出决策者在决策时存在 “高估小概率事件, 低估大概率事件” 的系统感知偏差; 在价值函数中, 参数 α, β 为风险态度系数, 它表示收益和损失区域价值幂函数的凹凸程度, 系数 λ 为损失厌恶系数, 它突出损失区域比收益区域更陡的特征.

在上述决策权重函数和价值函数的公式中, 均是针对实数进行的运算, 而本文中运算对象为三参数区间灰数, 由于区间灰数在做减法运算时会出现信息失真的现象[19], 所以本文采用文献 [14] 的思想, 给出三参数区间灰数的权重函数和价值函数的计算公式, 其详细内容如下所示.

定义 5. 设 $x_1(\otimes)\in[\underline{x_1},\widetilde{x_1},\overline{x_1}]$ 和 $x_2(\otimes)\in[\underline{x_2},\widetilde{x_2},\overline{x_2}]$ 为两个三参数区间灰数, 则称 $v(x_{12}(\otimes))$ 和 $\pi(p_1)$ 分别是以 $x_2(\otimes)$ 为参考点 $x_1(\otimes)$ 的价值函数和权重函数, 其计算公式为

$$v(x_{12}(\otimes))=\begin{cases}(D_4(x_1(\otimes),x_2(\otimes)))^{\alpha}, & x_1(\otimes)\underset{G}{\geq}x_2(\otimes)\\ -\lambda(D_4(x_1(\otimes),x_2(\otimes)))^{\beta}, & x_1(\otimes)\underset{G}{\leq}x_2(\otimes)\end{cases} \tag{6}$$

$$\pi(p_1)=\begin{cases}\dfrac{p_1^{\gamma}}{(p_1^{\gamma}+(1-p_1)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}}, & x_1(\otimes)\underset{G}{\geq}x_2(\otimes)\\ \dfrac{p_1^{\delta}}{(p_1^{\delta}+(1-p_1)^{\delta})^{\frac{1}{\delta}}}, & x_1(\otimes)\underset{G}{\leq}x_2(\otimes)\end{cases} \tag{7}$$

其中, p_1 为准则值 $x_1(\otimes)$ 发生的概率; $x_1(\otimes)$ 和 $x_2(\otimes)$ 大小的比较可直接由定义 4 得出; $(D_4(x_1(\otimes),x_2(\otimes)))$ 通过式 (1) 得出.

3　基于前景理论的三参数区间灰数风险型多准则决策步骤

设某灰色风险型多准则决策问题, 方案集为 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$, 准则集为 $C=\{c_1,\cdots,c_n\}$, 且决策者已主观给出各准则的权重为 $W^0=\{w_1^0,\cdots,w_n^0\}$, 该决策问题将面临 l 种可能的自然状态, 状态集记为 $Q=\{q_1,\cdots,q_l\}$, 其中第 k 种状态 q_k 发生的概率为三参数区间灰数 $p_k(\otimes)$, 即 $p_k(\otimes)\in[\underline{p_k},\widetilde{p_k},\overline{p_k}]$, 且方案 a_i 在准则 c_j 状态 q_k 下的准则值为 $x_{ij}^k(\otimes)$, $x_{ij}^k(\otimes)\in[\underline{x_{ij}^k},\widetilde{x_{ij}^k},\overline{x_{ij}^k}]$, 其中 $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$, $1\leq k\leq l$, 可得出 $D=(x_{ij}^k(\otimes))_{m\times n\times l}$ 的决策矩阵. 在尽量不丢失决策信息的前提下, 确定出方案集 A 的最佳方案及排序.

针对上述决策问题其决策步骤如下:

步骤 1. 规范化处理

为消除不同指标下准则信息在量纲上的差异性、增加其可比性, 本文采用三参数区间灰数极差变换公式[6], 对准则值 $x_{ij}^k(\otimes) \in [\underline{x_{ij}^k}, \widetilde{x_{ij}^k}, \overline{x_{ij}^k}]$ 规范化为 $e_{ij}^k(\otimes) \in [\underline{e_{ij}^k}, \widetilde{e_{ij}^k}, \overline{e_{ij}^k}]$.

针对效益型准则值: $e_{ij}^k(\otimes) \in \left[\dfrac{\underline{x_{ij}^k}-\underline{x_{j\ \min}^k}}{\overline{x_{j\ \max}^k}-\underline{x_{j\ \min}^k}}, \dfrac{\widetilde{x_{ij}^k}-\underline{x_{j\ \min}^k}}{\overline{x_{j\ \max}^k}-\underline{x_{j\ \min}^k}}, \dfrac{\overline{x_{ij}^k}-\underline{x_{j\ \min}^k}}{\overline{x_{j\ \max}^k}-\underline{x_{j\ \min}^k}}\right]$;

针对成本型准则值: $e_{ij}^k(\otimes) \in \left[\dfrac{\overline{x_{j\ \max}^k}-\overline{x_{ij}^k}}{\overline{x_{j\ \max}^k}-\underline{x_{j\ \min}^k}}, \dfrac{\overline{x_{j\ \max}^k}-\widetilde{x_{ij}^k}}{\overline{x_{j\ \max}^k}-\underline{x_{j\ \min}^k}}, \dfrac{\overline{x_{j\ \max}^k}-\underline{x_{ij}^k}}{\overline{x_{j\ \max}^k}-\underline{x_{j\ \min}^k}}\right]$. 其中, $\overline{x_{j\ \max}^k} = \max\limits_{1\le i\le m}\{\overline{x_{ij}^k}\}$; $\underline{x_{j\ \min}^k} = \min\limits_{1\le i\le m}\{\underline{x_{ij}^k}\}$.

从而可得到 l 个准则值在 0∼1 范围内标准化风险决策矩阵 $E^k(\otimes)$, 即 $E^k(\otimes) = (e_{ij}^k(\otimes))_{m\times n}$, $k = 1, 2, \cdots, l$.

步骤 2. 构建各参考点前景决策矩阵

基于决策者对损失更敏感的原则, 当收益点和损失点与参考点的差距相同时, 在前景价值中, 损失点与参考点的前景价值相对于收益点与参考点的前景价值差距更大. 因此, 不同的参考点会产生不同的前景价值, 也会间接地影响各方案的排序. 所以, 为增加排序结果的可靠性, 本文分别以各状态下的正负理想点与中点 0.5 (可认为三参数区间灰数 $[0.5, 0.5, 0.5]$) 作为参考点, 根据式 (3) 构建前景决策矩阵 $V^+(\otimes) = (v_{ij}^+(\otimes))_{m\times n}$、$V^-(\otimes) = (v_{ij}^-(\otimes))_{m\times n}$、$V^{0.5}(\otimes) = (v_{ij}^{0.5}(\otimes))_{m\times n}$.

步骤 3. 集结综合前景决策矩阵

为将不同参考点下的前景决策矩阵整合, 得出一个综合的前景决策矩阵 $V(\otimes) = (v_{ij}(\otimes))_{m\times n}$, $v_{ij}(\otimes) \in [\underline{v_{ij}}, \widetilde{v_{ij}}, \overline{v_{ij}}]$, 本文通过构建参考点集结算子对各参考点下的前景决策矩阵进行集结, 其详细求解过程为: $\overline{v_{ij}} = \dfrac{\overline{x_{ij}^+}-\underline{x_{j\ \min}^+}}{\overline{x_{j\ \max}^+}-\underline{x_{j\ \min}^+}} + \dfrac{\overline{x_{ij}^{0.5}}-\underline{x_{j\ \min}^{0.5}}}{\overline{x_{j\ \max}^{0.5}}-\underline{x_{j\ \min}^{0.5}}} + \dfrac{\overline{x_{ij}^-}-\underline{x_{j\ \min}^-}}{\overline{x_{j\ \max}^-}-\underline{x_{j\ \min}^-}}$; $\widetilde{v_{ij}} = \dfrac{\widetilde{x_{ij}^+}-\underline{x_{j\ \min}^+}}{\overline{x_{j\ \max}^+}-\underline{x_{j\ \min}^+}} + \dfrac{\widetilde{x_{ij}^{0.5}}-\underline{x_{j\ \min}^{0.5}}}{\overline{x_{j\ \max}^{0.5}}-\underline{x_{j\ \min}^{0.5}}} + \dfrac{\widetilde{x_{ij}^-}-\underline{x_{j\ \min}^-}}{\overline{x_{j\ \max}^-}-\underline{x_{j\ \min}^-}}$; $\underline{v_{ij}} = \dfrac{\underline{x_{ij}^+}-\underline{x_{j\ \min}^+}}{\overline{x_{j\ \max}^+}-\underline{x_{j\ \min}^+}} + \dfrac{\underline{x_{ij}^{0.5}}-\underline{x_{j\ \min}^{0.5}}}{\overline{x_{j\ \max}^{0.5}}-\underline{x_{j\ \min}^{0.5}}} + \dfrac{\underline{x_{ij}^-}-\underline{x_{j\ \min}^-}}{\overline{x_{j\ \max}^-}-\underline{x_{j\ \min}^-}}$.

其中, $\overline{v_{j\ \max}^+} = \max\limits_{1\le i\le m}\{\overline{v_{ij}^+}\}$, $\underline{v_{j\ \min}^+} = \min\limits_{1\le i\le m}\{\underline{v_{ij}^+}\}$, $\overline{v_{j\ \max}^{0.5}} = \max\limits_{1\le i\le m}\{\overline{v_{ij}^{0.5}}\}$, $\underline{v_{j\ min}^{0.5}} = \min\limits_{1\le i\le m}\{\underline{v_{ij}^{0.5}}\}$, $\overline{v_{j\ \max}^-} = \max\limits_{1\le i\le m}\{\overline{v_{ij}^-}\}$, $\underline{v_{j\ \min}^-} = \min\limits_{1\le i\le m}\{\underline{v_{ij}^-}\}$.

步骤 4. 确定准则权系数

不同的准则权系数会使各方案得到不同的前景值, 也会间接地影响方案的排序. 因此, 为增加排序的可靠性, 本文通过构建兼顾主客观权重信息的优化模型, 来求解最优权系数 $W^* = \{w_1, \cdots, w_j, \cdots, w_n\}^{\mathrm{T}}$, 其详细步骤如下.

针对决策者已主观给出的权重信息 $W^0 = \{w_1^0, \cdots, w_j^0, \cdots, w_n^0\}$, 为使最优权重与决策者主观权重偏离较小, 可构建优化模型:

$$\min \quad Z' = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_j - w_j^0}{w_j^0}\right)^2 \tag{8}$$

其中, w_j 满足: $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, $w_j \ge 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

针对决策问题的客观信息, 为使各方案与理想方案的偏差最小化, 可构建优化模型:

$$\min \quad Z'' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(w_j \times \frac{d_4(v_{ij}(\otimes), v_j^+(\otimes))}{d_4(v_j^+(\otimes), v_j^-(\otimes))}\right)^2 \tag{9}$$

其中, w_j 满足: $\sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \ge 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$; $v_j^+(\otimes)$ 和 $v_j^-(\otimes)$ 是综合前景决策矩阵中准则 c_j 下正负理想点. $d_4(v_{ij}(\otimes), v_j^+(\otimes))$ 和 $d_4(v_j^+(\otimes), v_j^-(\otimes))$ 可直接根据定义 2 中的距离式 (1) 求得.

为使最优准则权系数能够同时结合主客观权重信息, 本文将以上两目标优化模型转化为等价单目标优化模型:

$$\begin{aligned}\min \quad Z = {} & \alpha_2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_j - w_j^0}{w_j^0}\right)^2 + \\ & \beta_2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(w_j\frac{d_4(v_{ij}(\otimes), v_j^+(\otimes))}{d_4(v_j^+(\otimes), v_j^-(\otimes))}\right)^2\end{aligned} \tag{10}$$

其中, w_j 满足: $\sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \ge 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$;

参数 α_2 与 β_2 为主客观权重信息的相对重要度, 且 $\alpha_2 + \beta_2 = 1$, $0 \le \alpha_2, \beta_2 \le 1$.

针对上述非线性优化模型 (13), 可利用 La-

grange 方法来求解, 首先构造 Lagrange 函数:

$$\begin{aligned}\min\quad L(\lambda,w)=&\alpha_2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_j-w_j^0}{w_j^0}\right)^2+\\&\beta_2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(w_j\frac{d_4(v_{ij}(\otimes),v_j^+(\otimes))}{d_4(v_j^+(\otimes),v_j^-(\otimes))}\right)^2+\\&\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}w_j-1\right)\end{aligned}\tag{11}$$

进而依据 “极值存在, 导数必为零” 的必要条件, 得出等式, 并求解可得最优解:

$$w_j=\frac{a_jw_j^0-\lambda}{a_j+b_j}\tag{12}$$

其中, $\lambda=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{a_jw_j^0}{a_j+b_j}-1\right)/\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j+b_j}\right)$, $a_j=\dfrac{2\alpha_2}{(w_j^0)^2}$, $b_j=2\beta_2\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\dfrac{d_4(v_{ij}(\otimes),v_j^+(\otimes))}{d_4(v_j^+(\otimes),v_j^-(\otimes))}\right)^2$.

最后, 对最优解进行归一化处理, 则可得最优准则权系数:

$$w_j^*=\frac{w_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}w_j}\tag{13}$$

步骤 5. 求解各方案综合前景值

依据综合前景决策矩阵和最优准则权系数, 利用三参数区间灰数运算法则, 计算各方案的综合前景值.

$$V_i(\otimes)=\sum_{j=1}^{n}w_j^*\times v_{ij}(\otimes)\tag{14}$$

进而, 依据方案综合前景值越大、方案越好的原则, 按照定义 4 中三参数区间灰数比较大小的方法对方案进行排序, 得出最优方案.

4　算例分析

某地区电网拟组合几种类型的电厂对整个地区提供供电服务, 其中 5 种组合方案分别记为 $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$, 采用启动所需机组时间/min (C_1), 启动机组容量/MW (C_2), 负荷重要程度 (C_3) 3 个准则对这几个方案进行评估, 其中, C_1 为成本型准则, C_2、C_3 均为效益型准则, 且电网调度小组根据经验已主观给出各准则的权重: $W^0=\{0.28,0.35,0.37\}$. 由于用户侧的用电量会随着外界环境和时间发生变化, 各准则会面临三种可能的用电量: 大、中等、小. 且电网调度小组给出各状态下评估数据如表 3 所示. 依据上述信息, 确定最优组合方案.

1) 根据步骤 4 中的式 (8) 和式 (9) 对决策表中的成本型准则和效益型准则分别进行规范化处理.

2) 根据规范化决策矩阵, 求出各状态下的正负理想点, 并分别以正理想点、中点 0.5 (可视为 $[0.5,0.5,0.5]$) 和负理想点为参考点, 根据式 (3)、式 (6) 和式 (7) 求出各参考点下前景决策矩阵, 具体数据如表 4～表 6 所示. 其中各参数的值为 $\alpha=\beta=0.88$、$\lambda=2.25$、$\gamma=0.61$、$\delta=0.69$[20], 三参数区间灰数距离式 (1) 中的参数取值为 $\alpha_1=\beta_1$.

3) 根据式 (10) 集结出综合前景决策矩阵, 其具体数据如表 7 所示.

4) 根据式 (15) 和式 (16) 和主观权重向量, 解得最优准则权系数为 $W^*=\{0.287,0.332,0.381\}$, 其中主客观权重信息的相对重要度: $\alpha_2=\beta_2$.

5) 依据综合前景决策矩阵和最优准则权系数, 求得各方案综合前景值为 $V_1(\otimes)\in[0.436,1.226,1.75]$, $V_2(\otimes)\in[1.134,1.82,2.47]$, $V_3(\otimes)\in[1,1.66,2.23]$, $V_4(\otimes)\in[1.313,1.868,2.522]$, $V_5(\otimes)\in[1.644,2.078,2.786]$. 进而, 可通过定义 3 中的式 (2) 求得各方案的精确记分函数值分别为 $G(V_1(\otimes))=1.159$, $G(V_2(\otimes))=1.8109$, $G(V_3(\otimes))=1.6398$, $G(V_4(\otimes))=1.8923$, $G(V_5(\otimes))=2.1466$, 则各方案排序为 $A_5\succ A_4\succ A_2\succ A_3\succ A_1$, 电网调度人员应选择第 5 个最优组合方案.

在得出上述结论的基础上, 为说明本方法所得排序结果的可靠性, 本文采用文献 [14] 中提出的基于前景理论以动态准则值为参考点的方法对本例重新进行求解.

根据文献 [14] 中提出的方法得到各方案的前景决策矩阵如表 8 所示, 为在同一标准下进行比较, 准则权重取为 $W^*=\{0.287,0.332,0.381\}$, 则各方案的综合前景值为 $V_1(\otimes)\in[-6.187,-2.825,-1.144]$, $V_2(\otimes)\in[-1.41,-0.201,0.893]$, $V_3(\otimes)\in[-2.479,-0.734,0.404]$, $V_4(\otimes)\in[-1.558,-0.1535,0.957]$, $V_5(\otimes)\in[-0.813,0.166,1.379]$. 进而, 依据定义 4 中三参数区间灰数比较大小的方法进行排序, 得: $A_5\succ A_4\succ A_2\succ A_3\succ A_1$, 这与本文方法所得的排序结果是相同的, 因此, 这也就说明本文通过多参考点来集结得出方案的最终前景值是可靠的.

此外, 为说明本方法通过多参考点的思路集结得出排序结果的优势性, 本文分别以正负理想点为参考点和采用文献 [13] 中提出的基于前景理论以中点为参考点的思路对本例进行求解, 其详细结果如表 9 所示.

表 3 风险型决策表

Table 3 The data of risky decision-making

方案	用电量大时 $p_1 \in [0.4, 0.5, 0.8]$			用电量中等时 $p_2 \in [0.2, 0.5, 0.6]$			用电量小时 $p_3 \in [0.1, 0.25, 0.4]$		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
A_1	[50, 65, 70]	[180, 200, 210]	[20, 40, 50]	[35, 45, 55]	[100, 120, 125]	[20, 30, 40]	[15, 25, 30]	[95, 110, 125]	[15, 25, 30]
A_2	[50, 55, 70]	[100, 150, 180]	[55, 75, 85]	[20, 30, 45]	[115, 125, 150]	[45, 60, 65]	[15, 20, 40]	[105, 120, 130]	[30, 50, 65]
A_3	[40, 50, 55]	[110, 150, 160]	[50, 60, 65]	[15, 30, 40]	[110, 130, 160]	[40, 50, 55]	[15, 20, 25]	[80, 100, 130]	[20, 35, 40]
A_4	[45, 50, 60]	[180, 190, 210]	[75, 85, 95]	[20, 30, 50]	[95, 130, 135]	[55, 70, 80]	[15, 25, 30]	[90, 105, 115]	[20, 45, 55]
A_5	[35, 50, 55]	[190, 210, 215]	[70, 75, 90]	[30, 40, 45]	[100, 140, 160]	[55, 60, 75]	[20, 30, 40]	[90, 110, 130]	[30, 35, 55]

表 4 正理想点为参考点时的前景决策矩阵

Table 4 The prospect decision matrix using the best ideal points as reference

正理想点为参考点	C_1	C_2	C_3
A_1	[−2.241, −1.049, −0.515]	[−0.578, −0.282, −0.124]	[−3.423, −1.6, −0.744]
A_2	[−1.258, −0.57, −0.296]	[−1.046, −0.466, −0.26]	[−0.776, −0.358, −0.185]
A_3	[−0.197, −0.084, −0.052]	[−1.185, −0.53, −0.286]	[−1.98, −0.921, −0.449]
A_4	[−1.116, −0.6, −0.31]	[−0.451, −0.357, −0.166]	[−0.58, −0.278, −0.112]
A_5	[−1.032, −0.519, −0.302]	[−0.076, −0.036, −0.015]	[−0.87, −0.602, −0.293]

表 5 中点为参考点时的前景决策矩阵

Table 5 The prospect decision matrix using the middle points as reference

中点为参考点	C_1	C_2	C_3
A_1	[−1.588, −0.663, −0.196]	[0.0616, 0.115, 0.246]	[−2.1, −0.997, −0.463]
A_2	[−0.523, −0.036, 0.287]	[−0.485, −0.141, 0.021]	[0.145, 0.284, 0.599]
A_3	[0.152, 0.321, 0.658]	[−0.631, −0.226, −0.0393]	[−0.512, −0.228, −0.019]
A_4	[−1.03, −0.084, 0.234]	[−0.056, 0.121, 0.243]	[0.097, 0.234, 0.521]
A_5	[−0.284, −0.0296, 0.29]	[0.1, 0.199, 0.415]	[−0.168, 0.0834, 0.414]

表 6 负理想点为参考点时的前景决策矩阵

Table 6 The prospect decision matrix using the worst ideal points as reference

负理想点为参考点	C_1	C_2	C_3
A_1	[0.116, 0.252, 0.4071]	[0.091, 0.152, 0.341]	[0, 0, 0]
A_2	[0.179, 0.372, 0.763]	[0.053, 0.112, 0.229]	[0.287, 0.58, 1.205]
A_3	[0.236, 0.469, 0.977]	[0.022, 0.0539, 0.103]	[0.175, 0.35, 0.726]
A_4	[0.138, 0.294, 0.594]	[0.0825, 0.142, 0.314]	[0.292, 0.563, 1.183]
A_5	[0.158, 0.28, 0.607]	[0.135, 0.252, 0.538]	[0.281, 0.556, 1.159]

表 7 综合前景决策矩阵

Table 7 The integrated prospect decision matrix

	C_1	C_2	C_3
A_1	[0, 0.987, 1.496]	[1.313, 1.738, 2.362]	[0, 0.959, 1.406]
A_2	[1.088, 1.82, 2.499]	[0.318, 1.257, 1.815]	[1.879, 2.309, 3.017]
A_3	[1.931, 2.303, 3]	[0, 1.009, 1.49]	[1.174, 1.751, 2.295]
A_4	[0.981, 1.703, 2.292]	[1.038, 1.573, 2.177]	[1.803, 2.249, 2.991]
A_5	[1.274, 1.75, 2.379]	[1.867, 2.22, 3]	[1.729, 2.201, 2.907]

表 8　文献 [14] 中方法所得前景决策矩阵

Table 8　The prospect decision matrix obtained by the method in [14]

	C_1	C_2	C_3
A_1	$[-6.6235, -3.0733, -1.423]$	$[-0.9807, -0.2637, 0.4852]$	$[-10.4902, -4.9174, -2.3821]$
A_2	$[-2.6852, -0.8886, 0.1181]$	$[-1.4237, -0.5058, 0.2313]$	$[-0.4257, 0.594, 2.0721]$
A_3	$[0.3604, 1.0293, 2.2652]$	$[-3.0408, -1.2376, -0.5158]$	$[-4.139, -1.6283, -0.1947]$
A_4	$[-1.6037, -0.1421, 1.0073]$	$[-2.4064, -0.8715, -0.1777]$	$[-0.7662, 0.4805, 1.9306]$
A_5	$[-2.6636, -0.9247, 0.718]$	$[0.2806, 0.6341, 1.4103]$	$[-0.3764, 0.5806, 1.8542]$

表 9　各参考点所得排序结果

Table 9　The order of each reference point

	正理想点为参考点	中点为参考点	负理想点位参考点
A_1	$[-2.184, -1.025, -0.494]$	$[-1.227, -0.528, -0.148]$	$[0.0637, 0.1242, 0.2311]$
A_2	$[-0.665, -0.399, -0.207]$	$[-0.258, 0.0496, 0.315]$	$[0.179, 0.366, 0.7565]$
A_3	$[-1.217, -0.557, -0.284]$	$[-0.361, -0.07, 0.168]$	$[0.1429, 0.2886, 0.5968]$
A_4	$[-0.693, -0.395, -0.186]$	$[-2.781, 0.1048, 0.3452]$	$[0.1783, 0.3466, 0.726]$
A_5	$[-0.9995, -0.453, -0.241]$	$[-0.111, 0.0898, 0.379]$	$[0.1972, 0.3757, 0.7939]$
权重 W^*	$[0.2869, 0.3165, 0.3866]$	$[0.287, 0.336, 0.377]$	$[0.295, 0.326, 0.379]$
排序	$A_4 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_1$	$A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$

从表 9 中的排序结果可看出: 各参考点所得的方案排序结果均与本方法不同, 且以正理想点和中点为参考点所得的最优方案也与本方法不同, 分析其排序原理和决策过程, 可发现:

1) 针对正理想点为参考点时, 各方案的前景值均为损失, 此时, 基于决策者 "对损失更敏感" 的原则, 排序结果更侧重于方案准则值的稳定性, 即若方案的各准则值没有较大波动, 且均平稳的接近正理想点, 则方案综合前景值越大、方案越优.

2) 针对中点为参考, 各方案的前景值有收益也有损失, 基于决策者 "对损失更敏感" 的原则, 此时, 排序结果更侧重于各方案准则值小于参考点的个数和差距, 即若方案的准则值小于参考点的个数越少、与参考点的差距越小, 方案的综合前景值越大、方案越优.

3) 针对负理想点为参考点时, 各方案的前景值均为收益, 且相差较小. 此时, 基于决策者对收益的敏感性相对较低的原则, 排序结果更侧重各方案准则值为负理想点的个数, 即若方案的准则值为负理想点的个数越少, 方案的综合前景值越大, 方案越优.

基于上述论述可看出: 以不同的点为参考点时, 决策过程中相对的侧重点也不同, 所得的排序结果也不同. 而本文将各参考点下的前景值进行集结, 综合考虑了各方案面临收益和损失时不同的情形, 因此所得的排序结果也更具有可靠性.

5　结论

三参数区间灰数可以在保证区间灰数取值范围的前提下, 突出灰数取值可能性最大的 "重心点", 从而弥补灰数 "贫信息" 的不足. 因此, 本文对准则信息为三参数区间灰数的多准则决策问题利用前景理论进行了研究, 充分考虑了决策者面临收益和损失时, 不同的主观风险态度, 更加符合实际决策过程. 通过算例分析, 验证了本文决策方法的有效性与可行性, 这也为解决此类决策提供了新的思路.

综上所述, 本文主要工作如下: 1) 针对准则信息与概率均为三参数区间灰数的多准则决策问题, 给出一种基于前景理论的决策方法; 2) 给出一种新的三参数区间灰数距离度量的公式; 3) 通过定义三参数区间灰数的精确记分函数, 给出三参数区间灰数比较大小的方法; 4) 通过结合主客观权重信息, 给出一种兼顾主客观权重信息准则定权方法; 5) 在前景理论中采用多参考点的思路, 构建多参考点集算子. 在未来研究中, 可进一步考虑三参数区间灰数风险型多准则群决策问题.

References

1 Basar O. A decision model for information technology selection using AHP integrated TOPSIS-Grey: the case of content management systems. *Knowledge-Based Systems*, 2014, **70**: 44−54

2 Wang P, Meng P, Zhai J Y, Zhu Z Q. A hybrid method using experiment design and grey relational analysis for multiple criteria decision making problems. *Knowledge-Based Systems*, 2013, **53**: 100−107

3 Wang J Q, Zhang H Y, Ren S C. Grey stochastic multi-criteria decision-making approach based on expected probability degree. *Scientia Iranica*, 2013, **20**(3): 873−878

4 Lin Y H, Lee P C, Ting H I. Dynamic multi-attribute decision making model with grey number evaluations. *Expert Systems with Applications*, 2008, **35**(4): 1638−1644

5 Luo D, Wang X. The multi-attribute grey target decision method for attribute value within three-parameter interval grey number. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, **36**(5): 1957−1963

6 Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica*, 1979, **47**(2): 263−291

7 Fan Z P, Zhang X, Chen F D, Liu Y. Multiple attribute decision making considering aspiration-levels: a method based on prospect theory. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, **65**(2): 341−350

8 Liu P D, Jin F, Zhang X, Su Y, Wang M H. Research on the multi-attribute decision-making under risk with interval probability based on prospect theory and the uncertain linguistic variables. *Knowledge-Based Systems*, 2011, **24**(4): 554−561

9 Wang J Q, Li K J, Zhang H Y. Interval-valued intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making approach based on prospect score function. *Knowledge-Based Systems*, 2012, **27**: 119−125

10 Luo Dang. Decision-making methods with three-parameter interval grey number. *Systems Engineering— Theory & Practice*, 2009, **29**(1): 124−130
(罗党. 三参数区间灰数信息下的决策方法. 系统工程理论与实践, 2009, **29**(1): 124−130)

11 Bu Guang-Zhi, Zhang Yu-Wen. Grey fuzzy comprehensive evaluation method based on interval numbers of three parameters. *Systems Engineering and Electronics*, 2001, **23**(9): 43−45
(卜广志, 张宇文. 基于三参数区间数的灰色模糊综合评判. 系统工程与电子技术, 2001, **23**(9): 43−45)

12 Hu Qi-Zhou, Zhang Wei-Hua, Yu Li. The research and application in of interval numbers of three parameters. *Engineering Science*, 2007, **9**(3): 47−51
(胡启洲, 张卫华, 于莉. 三参数区间数研究及其在决策分析中的应用. 中国工程科学, 2007, **9**(3): 47−51)

13 Yan Shu-Li, Liu Si-Feng, Zhu Jian-Jun, Fang Zhi-Geng, Liu Jian. TOPSIS decision-making method with three-parameter interval number based on entropy measure. *Chinese Journal of Management Science*, 2013, **21**(6): 145−151
(闫书丽, 刘思峰, 朱建军, 方志耕, 刘健. 基于熵测度的三参数区间数信息下的 TOPSIS 决策方法. 中国管理科学, 2013, **21**(6): 145−151)

14 Wu G, Gonzalez R. Curvature of the probability weighting function. *Management Science*, 1996, **42**(12): 1676−1690

15 Yang Bao-Hua, Fang Zhi-Geng, Zhou Wei, Liu Jian. Incidence decision model of multi-attribute interval grey number based on information reduction operator. *Control and Decision*, 2012, **27**(2): 182−186
(杨保华, 方志耕, 周伟, 刘健. 基于信息还原算子的多指标区间灰数关联决策模型. 控制与决策, 2012, **27**(2): 182−186)

16 Wang Jian-Qiang, Zhou Ling. Grey-stochastic multi-criteria decision-making approach based on prospect theory. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2010, **30**(9): 1658−1664
(王坚强, 周玲. 基于前景理论的灰色随机多准则决策方法. 系统工程理论与实践, 2010, **30**(9): 1658−1664)

17 Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainly. *Journal of Risk and Uncertainty*, 1992, **5**(4): 297−323

18 Liu Pei-De. Method for multi-attribute decision-making under risk with the uncertain linguistic variables based on prospect theory. *Control and Decision*, 2011, **26**(6): 893−897
(刘培德. 一种基于前景理论的不确定语言变量风险型多属性决策方法. 控制与决策, 2011, **26**(6): 893−897)

19 Eirik B A, Frank A. On how access to an insurance market affects investments in safety measures, based on the expected utility theory. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, **96**(3): 361−364

20 Park C, Ahn S, Lee S. A Bayesian decision model based on expected utility and uncertainty risk. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **242**: 643−648

李存斌 华北电力大学经济与管理学院教授. 主要研究方向为信息管理与风险型决策分析.
E-mail: Lcb999@263.net
(**LI Cun-Bin** Professor at the College of Economics and Management, North China Electronic Power University. His research interest covers information management and risky decision-making analysis.)

赵 坤 华北电力大学经济与管理学院博士研究生. 主要研究方向为电力能源投资决策, 风险型决策分析.
E-mail: 13911891139@139.com
(**ZHAO Kun** Ph. D. candidate at the College of Economics and Management, North China Electronic Power University. His research interest covers electric power investment decision and risky decision-making analysis.)

祁之强 华北电力大学经济与管理学院硕士研究生. 主要研究方向为决策分析与灰色系统理论. 本文通信作者.
E-mail: qzq8610689@126.com
(**QI Zhi-Qiang** Master student at the College of Economics and Management, North China Electronic Power University. His research interest covers decision making and grey system theory. Corresponding author of this paper.)