反馈辅助 PD 型迭代学习控制: 初值问题及修正策略

孙明轩 [1] 毕宏博 [1] 周国良 [1] 王惠峰 [1]

摘 要 讨论迭代初态与期望初态存在固定偏移情形下的迭代学习控制问题, 提出带有反馈辅助项的 PD 型迭代学习控制算法, 可实现系统输出对期望轨迹的渐近跟踪. 为了进一步实现输出轨迹在预定有限区间上对期望轨迹的完全跟踪, 提出分别带有初始修正作用和终态吸引的学习算法. 文中给出所提出的学习算法的极限轨迹, 并对学习算法进行收敛性分析, 推导出收敛性充分条件, 可用于学习增益的确定. 通过数值结果, 验证所提学习算法的有效性.

关键词 迭代学习控制, 有限时间控制, 反馈辅助, 初始修正, 终态吸引

引用格式 孙明轩, 毕宏博, 周国良, 王惠峰. 反馈辅助 PD 型迭代学习控制: 初值问题及修正策略. 自动化学报, 2015, **41**(1): 157−164

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140133

Feedback-aided PD-type Iterative Learning Control: Initial Condition Problem and Rectifying Strategies

SUN Ming-Xuan[1] BI Hong-Bo[1] ZHOU Guo-Liang[1] WANG Hui-Feng[1]

Abstract This paper addresses the problem of iterative learning control for systems in the presence of a fixed initial shift. A feedback-aided PD-type learning algorithm is proposed, and the convergence analysis indicates that such a learning algorithm can ensure that the tracking error achieves asymptotic convergence with respect to time, as the iteration approaches infinity. Furthermore, the initial rectifying and terminal converging strategies are adopted respectively to form learning algorithms for eliminating the effect of the fixed initial shift. It is shown that the system output converges to the desired trajectory over a pre-specified time interval no matter what value the fixed initial shift takes. Numerical results are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed learning algorithms.

Key words Iterative learning control, finite time control, feedback-aided, initial rectifying, terminal convergence

Citation Sun Ming-Xuan, Bi Hong-Bo, Zhou Guo-Liang, Wang Hui-Feng. Feedback-aided PD-type iterative learning control: initial condition problem and rectifying strategies. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 157−164

适用于在有限区间上执行重复任务的系统的迭代学习控制技术, 通过反复学习, 能够实现快速运动受控对象的完全跟踪. 因其设计简单, 仅需较少动态特性知识和在线计算量, 这种控制技术在装配生产线工业机器人以及化工间歇过程等工业场合得到应用. 通常, 受控系统的初始条件不受控制输入影响. 由于是迭代作业, 这种控制技术要求系统进行初始定位操作, 这样, 控制性能便受系统重复精度的制约. 具体地讲, 常规的学习算法要求系统满足严格重置条件, 即每次迭代时的系统初态与期望轨迹的初值保持一致. 但由于重复定位精度的限制, 每次运行时的系统初态往往与期望初态不一致, 产生初始定位误差. 我们知道, 系统的解关于初值具有连续依赖性, 初始定位误差的累加会导致跟踪性能降低, 甚至导致系统发散. 文献 [1] 研究了 PD 型与 PI 型学习律的收敛性与鲁棒性.

固定初始定位误差情形下的学习控制性能引起了人们的特别关注. 文献 [2] 中引入脉冲修正作用消除固定初始误差的影响, 实现整个区间上对期望轨迹的完全跟踪. 然而, 这种脉冲修正作用在实际中却难以实现. 文献 [3] 首先给出了固定初始误差下 D 型与 PD 型学习的输出极限轨迹. 由于文献 [3] 中仅讨论线性时不变 (Linear time invariant, LTI) 系统, 将这一收敛性结果推广到非线性系统引起了作者的兴趣[4]. 文献 [5] 在研究 PID 型学习律的收敛性能时, 也将其收敛性结果推广到非线性系统. 一般地来说, PD 型学习算法可保证系统输出随时间渐近收敛于期望轨迹, 达到渐近收敛性能, 它不同于完全跟踪性能.

收稿日期 2014-03-06 录用日期 2014-09-01
Manuscript received March 6, 2014; accepted September 1, 2014
国家自然科学基金 (61174034, 61374103) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61174034, 61374103)
本文责任编委 侯忠生
Recommended by Associate Editor HOU Zhong-Sheng
1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023
1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023

有限时间控制技术能够实现跟踪误差在有限时间后达到零误差. 但迭代学习控制与有限时间控制的不同之处在于, 通过学习, 迭代学习控制能够完全抑制确定性 (不随迭代变化的) 干扰. 欲在给定的作业区间上实现迭代学习控制下的输出轨迹对期望轨迹的完全跟踪, 可借助于有限时间控制技术[6−8]. 文献 [9] 在更为一般的 PD 型学习中采用了终态吸引策略, 改进了原 PD 型学习只能达到渐近收敛的缺陷. 文献 [10] 较早采用有限时间吸引方法设计迭代学习控制器.

开环学习与闭环学习是迭代学习控制中的两种典型学习方式. 开环学习律利用上一次迭代时产生的输出误差及其导数构成修正项, 对控制输入进行更新, 显然这种更新不够及时, 因为未采用当前迭代时的实时数据; 闭环学习律克服了开环学习律这方面的缺陷, 其修正项中用到的信号为当前次迭代运行时产生, 但由于因果性, 相对阶为一的系统的输出的导数信号无法得到, 实现时只能用其估值代替, 导致控制性能下降. 存在固定初始误差时, 高相对阶系统的 PD 型和 PID 型闭环学习律的极限轨迹见文献 [11]. 利用当前迭代反馈信息的控制技术还包括开闭环学习律[12−13], 以及反馈–前馈学习律[14].

带有反馈辅助作用的 PD 型学习律, 利用上一次迭代产生的输出导数信号和当前次迭代产生的输出信号, 构成控制输入学习律的修正项, 以期加快学习过程收敛速度. 在反馈辅助学习算法中, 采用当前次的跟踪误差的作用有二: 1) 具有反馈镇定作用, 这是因为当前次 P 项的引入; 2) 对学习性能的影响明显, 容易给出极限轨迹. 反馈辅助学习律是一种具体形式的开闭环学习律, 反馈误差信号与上次迭代的误差信号构成反馈辅助 PD 学习律中的修正项, 但与现有的开闭环学习律的设计动机不同. 在开闭环学习算法中, 闭环项是相应于开环项给出的, 即开环部分有哪些项, 闭环部分就相应地有哪些项. 这样在学习算法中无可避免地需采用 $\dot{\boldsymbol{e}}_{k+1}(t)$, 而采用 $\dot{\boldsymbol{e}}_{k+1}(t)$ 是违背因果性的 (对于相对阶为一的动态系统), 实现时只能用估值替代. 另外, 开闭环算法注重推导收敛性条件, 并讨论与开环算法收敛性条件的不同之处; 反馈辅助算法注重初值问题, 收敛性分析过程也有不同之处. 反馈辅助迭代学习与反馈–前馈学习的提出动机也不同. 在后者中, 反馈项主要起镇定作用, 反馈增益对收敛性能的影响并未被明显地刻画, 而反馈辅助学习律中的反馈项对收敛性能的影响是可以被直接刻画的, 它对极限轨迹的影响是清楚的, 而不仅仅起到镇定作用. 压缩映射方法常被用于迭代学习控制算法的收敛性能分析[15−16]. 本文基于这一方法推导出所提学习算法的收敛性充分条件, 并给出相应学习过程的输出极限轨迹. 通过数值仿真, 验证所提学习算法的有效性.

1 反馈辅助 PD 型学习算法

本文首先给出反馈辅助 PD 型迭代学习控制算法, 利用上一次迭代产生的输出误差导数信号和当前次迭代产生的误差信号, 构成控制输入学习律的修正项, 由于采用的信号更为及时, 以期改善开环 PD 型学习律的跟踪性能.

考虑下述线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_k(t) = A\boldsymbol{x}_k(t) + B\boldsymbol{u}_k(t) \\ \boldsymbol{y}_k(t) = C\boldsymbol{x}_k(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $t \in [0,T], k$ 为迭代次数, $\boldsymbol{x}_k(t) \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u}_k(t) \in \mathbf{R}^r, \boldsymbol{y}_k(t) \in \mathbf{R}^m$, 分别为第 k 次迭代的系统状态、控制输入和输出向量, A, B, C 为具有适当维数的系统参数矩阵.

针对系统 (1), 提出如下带有反馈辅助作用的 PD 型迭代学习律:

$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \boldsymbol{u}_k(t) + \Gamma(\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) + L\boldsymbol{e}_{k+1}(t)) \tag{2}$$

式中, $\Gamma \in R^{r\times m}, L \in R^{m\times m}$ 为增益矩阵, 且 L 的特征值均具有正实部, $\boldsymbol{e}_k(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{y}_k(t)$ 为跟踪误差, $\boldsymbol{y}_d(t)$ 为期望轨迹.

定理 1. 若系统 (1) 满足下述假设条件:

C1) 存在增益矩阵 $\Gamma \in \mathbf{R}^{r\times m}$, 使得 $\|I - \Gamma CB\| = \rho < 1$;

C2) 每次运行时, 系统初态均置于 $\boldsymbol{x}_0$, 即 $\boldsymbol{x}_k(0) = \boldsymbol{x}_0\ (k = 1, 2, 3\cdots)$.

则当 $k \to \infty$ 时, 在学习律 (2) 的作用下, $\boldsymbol{y}_k(t)$ 在 $[0,T]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{y}_d^*(t)$, $\boldsymbol{y}_d^*(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{e}^*(t), t \in [0,T]$, $\boldsymbol{e}^*(t) = \mathrm{e}^{-Lt}(\boldsymbol{y}_d(0) - C\boldsymbol{x}_0)$.

证明. 对于任意给定的系统初态 $\boldsymbol{x}_0$, 记 $\boldsymbol{u}_d^*(t)$ 为使得系统的输出轨迹为 $\boldsymbol{y}_d^*(t)$ 的控制输入, 相应的状态轨迹为 $\boldsymbol{x}_d^*(t)$. 记 $\Delta\boldsymbol{u}_k^*(t) = \boldsymbol{u}_d^*(t) - \boldsymbol{u}_k(t)$, $\Delta\boldsymbol{x}_k^*(t) = \boldsymbol{x}_d^*(t) - \boldsymbol{x}_k(t), \boldsymbol{e}_k^*(t) = \boldsymbol{y}_d^*(t) - \boldsymbol{y}_k(t)$. 容易看出:

$$\boldsymbol{e}_k(t) = \boldsymbol{e}_k^*(t) + \mathrm{e}^{-Lt}(\boldsymbol{y}_d(0) - C\boldsymbol{x}_0) \tag{3}$$

对上式两端求导,

$$\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) = \dot{\boldsymbol{e}}_k^*(t) - L\mathrm{e}^{-Lt}(\boldsymbol{y}_d(0) - C\boldsymbol{x}_0) \tag{4}$$

则 $\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) + L\boldsymbol{e}_{k+1}(t) = \dot{\boldsymbol{e}}_k^*(t) + L\boldsymbol{e}_{k+1}^*(t)$. 这样,

$$\Delta\boldsymbol{u}_{k+1}^*(t) = (I - \Gamma CB)\Delta\boldsymbol{u}_k^*(t) - \Gamma CA\Delta\boldsymbol{x}_k^*(t) - \Gamma LC\Delta\boldsymbol{x}_{k+1}^*(t) \tag{5}$$

计算上式两端的 λ 范数,

$$\|\Delta \boldsymbol{u}_{k+1}^*\|_\lambda \le \rho\|\Delta \boldsymbol{u}_k^*\|_\lambda + c_1\|\Delta \boldsymbol{x}_k^*\|_\lambda + c_2\|\Delta \boldsymbol{x}_{k+1}^*\|_\lambda \tag{6}$$

其中, $c_1 = \|\Gamma CA\|, c_2 = \|\Gamma LC\|$.

利用 Bellman-Gronwall 引理, 由式 (1) 知

$$\|\Delta \boldsymbol{x}_k^*(t)\| \le \int_0^t \mathrm{e}^{\|A\|(t-\tau)}\|B\|\|\Delta \boldsymbol{u}_k^*(\tau)\|\mathrm{d}\tau$$

上式两端取 λ 范数 (选取 $\lambda > \|A\|$),

$$\|\Delta \boldsymbol{x}_k^*\|_\lambda \le c_3\|\Delta \boldsymbol{u}_k^*\|_\lambda \tag{7}$$

其中, $c_3 = \frac{\|B\|(1-\mathrm{e}^{(\|A\|-\lambda)T})}{\lambda-\|A\|}$. 将式 (7) 代入式 (6), 可得:

$$\|\Delta \boldsymbol{u}_{k+1}^*\|_\lambda \le \frac{\rho + c_1c_3}{1-c_2c_3}\|\Delta \boldsymbol{u}_k^*\|_\lambda \tag{8}$$

记 $\rho' = \frac{\rho+c_1c_3}{1-c_2c_3}$, 当 λ 足够大时, 可使得 $\rho' < 1$, 且 $1 - c_2c_3 > 0$. 这样, 式 (8) 为一压缩映射. 因此, $\lim_{k\to\infty}\|\Delta \boldsymbol{u}_k^*\|_\lambda = 0$. 进一步, 由式 (7) 可得 $\lim_{k\to\infty}\|\Delta \boldsymbol{x}_k^*\|_\lambda = 0$. 继而, 可得 $\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{e}_k^*\|_\lambda = 0$. 利用 λ 范数的性质, 定理得证. □

由上述分析知, 利用所提出的反馈辅助 PD 型学习算法可获得与开环学习律相同的极限轨迹, 但由于反馈辅助作用, 可望加快学习过程收敛速度, 同时也回避了像闭环学习那样采用当前误差导数信号带来的非因果问题.

2　初始修正策略

为实现系统输出在预定区间上对期望轨迹的完全跟踪, 本节给出三种带有不同初始修正策略的学习算法, 通过在反馈辅助迭代学习控制算法中引入初始修正项, 从而在指定区间上消除固定初始误差对算法跟踪性能的影响.

构造如下带初始修正作用的迭代学习律

$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \boldsymbol{u}_k(t) + \Gamma(\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) + L\boldsymbol{e}_{k+1}(t) + \boldsymbol{r}(t)) \tag{9}$$

式中, $\boldsymbol{r}(t)$ 表示初始修正作用.

由式 (9) 知

$$\Delta \boldsymbol{u}_{k+1}^*(t) = \Delta \boldsymbol{u}_k^*(t) - \Gamma(\dot{\boldsymbol{e}}_k^*(t) + \dot{\boldsymbol{e}}^*(t) + L\boldsymbol{e}_{k+1}^*(t) + L\boldsymbol{e}^*(t) + \boldsymbol{r}(t)) \tag{10}$$

令 $\dot{\boldsymbol{e}}^*(t) + L\boldsymbol{e}^*(t) + \boldsymbol{r}(t) = 0$,

$$\boldsymbol{e}^*(t) = \mathrm{e}^{-Lt}\boldsymbol{e}(0) + \mathrm{e}^{-Lt}\int_0^t \mathrm{e}^{L\tau}\boldsymbol{r}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

式中, $\boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{y}_d(0) - C\boldsymbol{x}_0$. 若要求 $\boldsymbol{e}^*(t)$ 在给定的有限区间 $[0, h]$ 上趋于零, 即

$$\boldsymbol{e}^*(t) = \mathrm{e}^{-Lt}\boldsymbol{e}(0) + \mathrm{e}^{-Lt}\int_0^h \mathrm{e}^{L\tau}\boldsymbol{r}(\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \tag{11}$$

可选择初始修正作用 $\boldsymbol{r}(t) = -\mathrm{e}^{-Lt}\delta_h(t)\boldsymbol{e}(0)$. 其中, $\int_0^h \delta_h(t)\mathrm{d}t = 1$, 当 $t < 0$ 或 $t > h$ 时, $\delta_h(t) = 0$. 可选如下形式的 $\delta_h(t)$ 函数

$$\delta_h(t) = \frac{1}{h},\ 0 \le t \le h$$

定理 2. 若系统 (1) 满足定理 1 中的 C1) 和 C2), 则当 $k \to \infty$ 时, 在学习律 (9) 的作用下, $\boldsymbol{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{y}_d^*(t)$, $\boldsymbol{y}_d^*(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{e}^*(t), t \in [0, T]$. 其中, $\boldsymbol{e}^*(t) = 0, t \ge h$, 且

$$\boldsymbol{e}^*(t) = \mathrm{e}^{-Lt}(1 - \int_0^h \delta_h(\tau)\mathrm{d}\tau)(\boldsymbol{y}_d(0) - C\boldsymbol{x}_0),\quad 0 \le t \le h$$

证明. 加入初始修正作用 $\boldsymbol{r}(t)$ 后的跟踪误差可表达

$$\boldsymbol{e}_k(t) = \boldsymbol{e}_k^*(t) + \boldsymbol{e}^*(t) \tag{12}$$

对上式两端求导,

$$\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) = \dot{\boldsymbol{e}}_k^*(t) + \dot{\boldsymbol{e}}^*(t) \tag{13}$$

根据 $\boldsymbol{e}^*(t)$ 定义, 可得 $\dot{\boldsymbol{e}}^*(t) + L\boldsymbol{e}^*(t) + \boldsymbol{r}(t) = 0$. 由式 (12) 和式 (13),

$$\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) + L\boldsymbol{e}_{k+1}(t) + \boldsymbol{r}(t) = \dot{\boldsymbol{e}}_k^*(t) + L\boldsymbol{e}_{k+1}^*(t)$$

继而, 参照上一节式 (5) 后的分析过程, 可证得定理. □

由定理 2 知, 采用形如 $\boldsymbol{r}(t)$ 的初始修正策略, 可保证系统输出在预先给定的时间区间上一致收敛于期望轨迹. 定理 2 给出了系统输出极限轨迹的具体表达式.

其实, 为了实现有限区间上的完全跟踪, 初始修正作用也可选为其他形式. 我们给出另外一种初始修正形式

$$\boldsymbol{r}(t) = -\dot{\boldsymbol{\theta}}_h(t) - L\boldsymbol{\theta}_h(t) \tag{14}$$

选取如下的 $\boldsymbol{\theta}_h(t)$ 函数, 使得 $\boldsymbol{\theta_h}(t) = 0, t \ge h$, 且

$$\boldsymbol{\theta}_h(t) = \boldsymbol{e}(0) + \dot{\boldsymbol{e}}(0)t + \left(\frac{a_{00}}{h^2}\boldsymbol{e}(0) + \frac{a_{01}}{h}\dot{\boldsymbol{e}}(0)\right)t^2 + \left(\frac{a_{10}}{h^3}\boldsymbol{e}(0) + \frac{a_{11}}{h^2}\dot{\boldsymbol{e}}(0)\right)t^3,\quad 0 < t \le h$$

其中, $\boldsymbol{\theta}_h(t) = [\theta_{1,h}(t), \theta_{2,h}(t), \cdots, \theta_{m,h}(t)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\theta}_h(0) = \boldsymbol{e}(0), \dot{\boldsymbol{\theta}}_h(0) = \dot{\boldsymbol{e}}(0)$.

依据 $\boldsymbol{\theta}_h(t)$ 的有限截止特性, 可以得到两个二元一次方程组

$$\begin{cases} 1 + a_{00} + a_{10} = 0 \\ 2a_{00} + 3a_{10} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + a_{01} + a_{11} = 0 \\ 1 + 2a_{01} + 3a_{11} = 0 \end{cases}$$

解得各系数如下

$$\begin{cases} a_{00} = -3, \quad a_{01} = -2 \\ a_{10} = 2, \quad\ \ a_{11} = 1 \end{cases}$$

若各参数按照上式选取, 则 $\theta(t)$ 在时刻 $t = h$ 时为零.

若系统 (1) 满足定理 1 中的 C1) 和 C2), 则当 $k \to \infty$ 时, 在学习律 (9) 和初始修正项 (14) 的作用下, $\boldsymbol{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{y}_d^*(t)$, $\boldsymbol{y}_d^*(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{e}^*(t), t \in [0, T]$. 其中, $\boldsymbol{e}^*(t) = 0, t \geq h$, 且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^*(t) = {} & \boldsymbol{e}(0) + \dot{\boldsymbol{e}}(0)t + \\ & \left(\frac{a_{00}}{h^2}\boldsymbol{e}(0) + \frac{a_{01}}{h}\dot{\boldsymbol{e}}(0)\right)t^2 + \\ & \left(\frac{a_{10}}{h^3}\boldsymbol{e}(0) + \frac{a_{11}}{h^2}\dot{\boldsymbol{e}}(0)\right)t^3, \ \ 0 \leq t \leq h \end{aligned}$$

$\boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{y}_d(0) - C\boldsymbol{x}_0$, 为固定初始误差情形下起始点处的跟踪误差, $\dot{\boldsymbol{e}}(0)$ 为初始误差导数.

我们也可利用系统的能控 Gram 矩阵构造另外一种初始修正项:

$$\boldsymbol{r}(t) = \mathrm{e}^{-L^{\mathrm{T}}(h-t)} W_c^{-1}(0, h) \mathrm{e}^{-Lh} \boldsymbol{e}(0) \tag{15}$$

其中, $W_c(0, t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-L(t-\tau)} \mathrm{e}^{-L^{\mathrm{T}}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau$, 当 $t \leq 0$ 或 $t \geq h, \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{0}$.

若系统 (1) 满足定理 1 中的 C1) 和 C2), 则当 $k \to \infty$ 时, 在学习律 (9) 和初始修正项 (15) 的作用下, $\boldsymbol{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{y}_d^*(t)$, $\boldsymbol{y}_d^*(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{e}^*(t), t \in [0, T]$, 其中, $\boldsymbol{e}^*(t) = 0, t \geq h$, 且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^*(t) = {} & \mathrm{e}^{-Lt}\boldsymbol{e}(0) - \int_0^h \mathrm{e}^{-L(t-\tau)} \mathrm{e}^{-L^{\mathrm{T}}(h-\tau)} \mathrm{d}\tau \\ & W_c^{-1}(0, h) \mathrm{e}^{-Lh} \boldsymbol{e}(0), \quad 0 \leq t \leq h \end{aligned} \tag{16}$$

本节在反馈辅助迭代学习控制算法中引入了三种初始修正策略, 实现了跟踪误差在预定区间上对期望轨迹的完全跟踪.

3 终态吸引策略

本节通过在学习律中采用终态吸引策略, 借助于其有限时间收敛性, 实现跟踪误差于有限区间上一致收敛于零. 为进一步加快收敛速度, 本节还提出了相应的快速算法.

首先给出 Holder 连续的定义:

如果一个函数 $f(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \exists D \subset \mathbf{R}^n, L > 0, 0 < \alpha \leq 1$,

$$\text{s.t.} \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|^{\alpha}$$

其中, $\forall x_1, x_2 \in D$, 则 $f(x)$ 在区域 D 上是 Holder 连续的.

引理 1. 对于 n 维向量 $\boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{g}(x)$, 且 $\boldsymbol{g}(x)$ 有界,

$$\|(\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x))^{\alpha} - (\boldsymbol{g}(x))^{\alpha}\| \leq L\|\boldsymbol{f}(x)\|^{\beta} \tag{17}$$

其中, β 为小于或等于 α 的某一正数.

证明. 详见附录. □

我们构造如下终态吸引的反馈辅助有限时间迭代学习律:

$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \boldsymbol{u}_k(t) + \Gamma(\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) + L\boldsymbol{e}_{k+1}^{\frac{q}{p}}(t)) \tag{18}$$

式中, Γ 是增益矩阵, $L = \mathrm{diag}\{l_i\}, l_i > 0, 1 \leq i \leq m$, p、q 为两个正奇数且 $q < p$. 对于 n 维向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 定义 $\boldsymbol{x}^{q/p} = \left((x_1)^{q/p}, \cdots, (x_n)^{q/p}\right)^{\mathrm{T}}$.

定理 3. 若系统 (1) 满足定理 1 中的 C1) 和 C2), 则当 $k \to \infty$ 时, 在学习律 (18) 的作用下, $\boldsymbol{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{y}_d^*(t)$, $\boldsymbol{y}_d^*(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{e}^*(t), t \in [0, T]$. $\boldsymbol{e}^*(t) = (e_1^*(t), \cdots, e_i^*(t), \cdots, e_m^*(t))^{\mathrm{T}}, 1 \leq i \leq m$. 其中, $e_i^*(t) = 0, t \geq t_h^i$, 且

$$e_i^*(t) = e_i(0) \times \left(1 - l_i\left(\frac{p-q}{p}\right)e_i(0)^{\frac{q}{p}-1}t\right)^{\frac{p}{p-q}}, \quad 0 \leq t < t_h^i$$

$$t_h^i = \frac{p}{l_i(p-q)} e_i(0)^{1-\frac{q}{p}}$$

证明. 由式 (18) 知,

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{u}_{k+1}^*(t) = {} & \Delta\boldsymbol{u}_k^*(t) - \Gamma(\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) + L\boldsymbol{e}_{k+1}^{\frac{q}{p}}(t)) = \\ & (I - \Gamma CB)\Delta\boldsymbol{u}_k^*(t) - \Gamma CA\Delta\boldsymbol{x}_k^*(t) - \\ & \Gamma L\Big[\Big(C\Delta\boldsymbol{x}_{k+1}^*(t) + \boldsymbol{e}^*(t)\Big)^{\frac{q}{p}} - \\ & (\boldsymbol{e}^*(t))^{\frac{q}{p}}\Big] \end{aligned}$$

上式两端取 λ 范数, 并利用引理 1, 可得:

$$\begin{aligned}\|\Delta\boldsymbol{u}^*_{k+1}\|_\lambda \le{}& \rho\|\Delta\boldsymbol{u}^*_k\|_\lambda + \|\Gamma CA\|\|\Delta\boldsymbol{x}^*_k\|_\lambda + \\ & \|\Gamma L\|\left\|\left(C\Delta\boldsymbol{x}^*_{k+1}+\boldsymbol{e}^*\right)^{\frac{q}{p}} - (\boldsymbol{e}^*)^{\frac{q}{p}}\right\|_\lambda \le \\ & \rho\|\Delta\boldsymbol{u}^*_k\|_\lambda + c_4\|\Delta\boldsymbol{x}^*_k\|_\lambda + \\ & c_5\|\Delta\boldsymbol{x}^*_{k+1}\|^\alpha_\lambda\end{aligned}$$

式中, $c_4 = \|\Gamma CA\|, c_5 = \|\Gamma L\|k_0$, k_0 为某一常数. 继而, 参照定理 1 证明中式 (6) 后的分析过程, 可证得定理. □

定理 3 中给出的输出极限轨迹取决于参数 q, p 和增益矩阵 L. 由于采用了终态吸引策略, 实现了系统输出在有限区间上的完全跟踪. 当参数 $q/p = 1$ 时, 式 (18) 所示的迭代学习律变成 PD 型反馈辅助学习律.

为了加快学习算法的收敛速度, 可在学习律 (18) 中引入跟踪误差的线性项, 构造如下学习律:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \boldsymbol{u}_k(t) + \Gamma\Big(&\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) + L_1\boldsymbol{e}^{\frac{q}{p}}_{k+1}(t) + \\ & L_2\boldsymbol{e}_{k+1}(t)\Big)\end{aligned} \tag{19}$$

式中 Γ 为学习增益矩阵, $L_1 = \mathrm{diag}\{l^i_1\}, l^i_1 > 0$, $L_2 = \mathrm{diag}\{l^i_2\}, l^i_2 > 0, 1 \le i \le m$. p, q 为两个正奇数且 $q < p$.

定理 4. 若系统 (1) 满足定理 1 中的 C1) 和 C2), 则当 $k \to \infty$ 时, 在学习律 (19) 的作用下, $\boldsymbol{y}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{y}^*_d(t)$, $\boldsymbol{y}^*_d(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{e}^*(t), t \in [0, T]$. $\boldsymbol{e}^*(t) = (e^*_1(t), \cdots, e^*_i(t), \cdots, e^*_m(t))^{\mathrm{T}}, 1 \le i \le m$. 其中, $e^*_i(t) = 0, t \ge t^i_h$, 且

$$\begin{aligned}e^*_i(t) = \Bigg(&-\frac{l^i_1}{l^i_2} + \frac{l^i_1}{l^i_2}\mathrm{e}^{-\frac{p-q}{p}l^i_2 t} + \\ & e_i(0)^{1-\frac{q}{p}}\mathrm{e}^{-\frac{p-q}{p}l^i_2 t}\Bigg)^{\frac{p}{p-q}}, \quad 0 \le t < t^i_h\end{aligned}$$

$$t^i_h = \frac{p}{l^i_2(p-q)}\ln\frac{l^i_2 e_i(0)^{\frac{p-q}{p}} + l^i_1}{l^i_1}$$

证明. 由式 (19) 知,

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{u}^*_{k+1}(t) = {}& \boldsymbol{u}^*_d(t) - \boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \\ & \Delta\boldsymbol{u}^*_k(t) - \Gamma\Big(\dot{\boldsymbol{e}}_k(t) + L_1\boldsymbol{e}^{\frac{q}{p}}_{k+1}(t) + L_2\boldsymbol{e}_{k+1}(t)\Big) = \\ & (I - \Gamma CB)\Delta\boldsymbol{u}^*_k(t) - \Gamma CA\Delta\boldsymbol{x}^*_k(t) - \\ & \Gamma\Big[L_2\Big(C\Delta\boldsymbol{x}^*_{k+1}(t) + \boldsymbol{e}^*(t)\Big) + \\ & L_1\Big(C\Delta x^*_{k+1}(t) + e^*(t)\Big)^{\frac{q}{p}} - \\ & L_2\boldsymbol{e}^*(t) - L_1(\boldsymbol{e}^*(t))^{\frac{q}{p}}\Big]\end{aligned} \tag{20}$$

上式两端取 λ 范数

$$\begin{aligned}\|\Delta\boldsymbol{u}^*_{k+1}\|_\lambda \le{}& \rho\|\Delta\boldsymbol{u}^*_k\|_\lambda + \|\Gamma CA\|\|\Delta\boldsymbol{x}^*_k\|_\lambda + \\ & \|\Gamma\|\Big\|L_2\Big(C\Delta\boldsymbol{x}^*_{k+1} + \boldsymbol{e}^*\Big) + \\ & L_1\Big(C\Delta\boldsymbol{x}^*_{k+1} + \boldsymbol{e}^*\Big)^{\frac{q}{p}} - \\ & L_2\boldsymbol{e}^* - L_1(\boldsymbol{e}^*)^{\frac{q}{p}}\Big\|_\lambda \le \\ & \rho\|\Delta\boldsymbol{u}^*_k\|_\lambda + c_6\|\Delta\boldsymbol{x}^*_k\|_\lambda + \\ & c_7\|\Delta\boldsymbol{x}^*_{k+1}\|_\lambda + c_8\|\Delta\boldsymbol{x}^*_{k+1}\|^\beta_\lambda\end{aligned}$$

式中, $c_6 = \|\Gamma CA\|, c_7 = \|\Gamma\|\|L_2C\|, c_8 = \|\Gamma\|\|L_1\|k_1$, k_1 为某一常数. 继而, 参照定理 1 式 (6) 后的分析过程, 可证得定理. □

与学习律 (18) 相比, 学习律 (19) 增加了反馈辅助线性项, 可加快跟踪误差收敛于零的速度, 并实现系统输出完全跟踪性能.

提出的反馈辅助学习律在形式上不同于现有的反馈–前馈学习律, 而是一种具体形式的开闭环学习律. 除文中讨论的有限时间控制策略以外, 仍有其他类型的有限时间控制策略可用来构成有限时间迭代学习控制方案, 实现系统输出在预定区间上对期望轨迹的完全跟踪.

本文采用 λ 范数作为迭代学习控制系统的分析工具. 与其他分析工具相比, 基于 λ 范数的收敛性分析过程简洁, 获得的收敛性条件简单, 便于控制器设计.

4　数值结果

本节完成数值算例, 以说明本文所提学习算法的有效性. 考虑系统 (1), 其中,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ \ 1]$$

给定期望轨迹为 $y_d(t) = 90\Big[(t/5)^5 - 5/2\,(t/5)^4 + 5/3\,(t/5)^3\Big], 0 \le t \le 5$, 且设置初始状态 $\boldsymbol{x}_k(0) = [0.5, 0.5]^{\mathrm{T}}$

首先比较开环 PD 型学习控制与文中所提出的反馈辅助 PD 型学习律及 3 种初始修正策略. 置 $\Gamma = 1, L = 6$; 对于带有初始修正策略的反馈辅助学习律, 截止时间为 $h = 0.2\,\mathrm{s}$. 数值结果如图 1 ∼ 3 所示, 其中, 跟踪性能指标为 $J_k = \max_{t\in[0.2,5]}|e_k(t)|$.

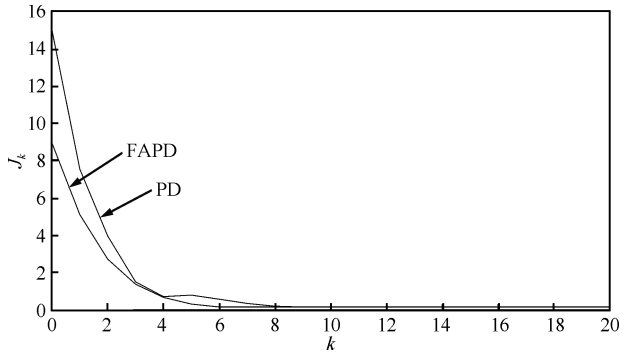


图 1 PD 型与 FAPD 型学习控制下的 J_k 值

Fig. 1 J_k by PD and FAPD learning laws

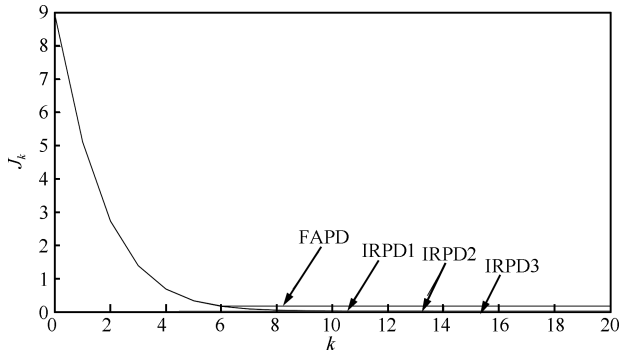


图 2 FAPD 型与带初始修正作用学习控制下的 J_k 值

Fig. 2 J_k by FAPD learning law and those with initial rectifying action

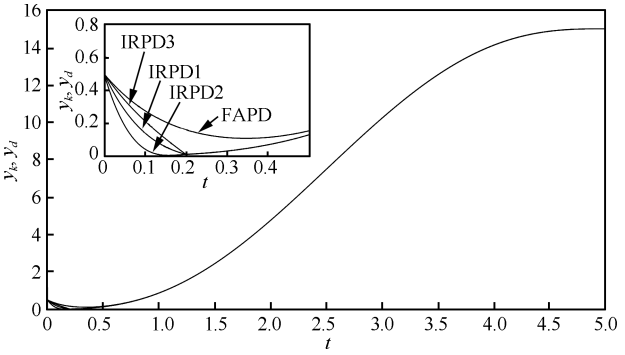


图 3 $k = 20$ 时, 跟踪性能比较及局部放大

Fig. 3 Comparison of tracking performance in the cycle $k = 20$

由图 1 可以看出, 与开环 PD 型学习律相比, 采用反馈辅助 PD 型学习律, 可使得跟踪误差更快速收敛. 在图 2 中, IRPD1-IRPD3 分别代表在初始修正策略 1 至初始修正策略 3 作用下的相应曲线. 反馈辅助 PD 型学习律和三种初始修正策略均可保证跟踪误差收敛, 但采用初始修正策略可使得跟踪误差在指定时刻收敛于零. 由图 3 看出, 当迭代次数 $k = 20$ 时, 采用本文所提的三种初始修正学习算法均可使得系统的输出轨迹在预先指定的时刻收敛于期望轨迹, 而 PD 型反馈辅助学习律却不能实现对期望轨迹的完全跟踪.

为了验证终态吸引反馈辅助学习算法的有效性, 仍考虑系统 (1), 且设定相同的期望轨迹和系统初态. 选取 $\Gamma = 1, L = 9, L_1 = 9, L_2 = 2, p = 11, q = 9$, 数值结果如图 4 和图 5 所示.

在图 4 和图 5 中, TPD1 和 TPD2 分别代表学习律 (18) 和学习律 (19) 作用下的相应曲线. 由图 4 知, 采用终态吸引反馈辅助学习律 (18) 和 (19) 均可使得跟踪误差收敛, 但采用学习律 (19) 具有相对较快的收敛速度. 由图 5 可以看出, 当迭代次数 $k = 20$ 时, 这两种学习律均可使得系统输出轨迹在有限时间内收敛于给定的期望轨迹.

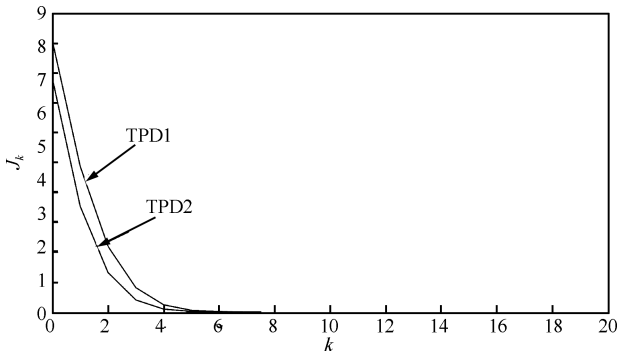


图 4 终态吸引学习控制下的 J_k 值

Fig. 4 J_k by the terminal learning laws

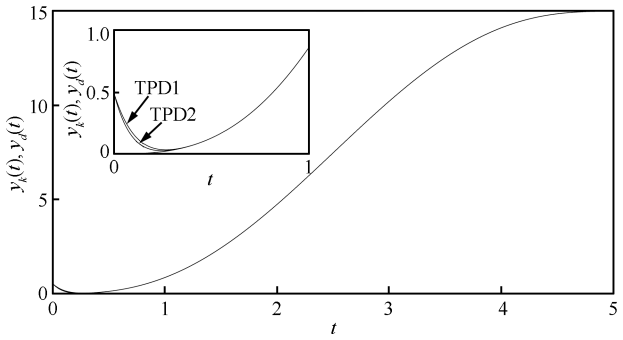


图 5 $k = 20$ 时, 终态吸引学习控制跟踪性能比较及局部放大

Fig. 5 Comparison of tracking performance by the terminal learning laws, in the cycle $k = 20$

5 结论

本文讨论线性定常系统存在固定初始偏移时的迭代学习控制问题. 提出反馈辅助 PD 型学习控制算法, 可实现跟踪误差渐近收敛于零. 它在形式上不同于现有的反馈–前馈学习律, 是一种具体形式的开闭环学习律. 为了实现系统输出在有限区间上对

期望轨迹的完全跟踪, 分别提出了基于初始修正策略和终态吸引策略的有限时间迭代学习控制器, 文中给出了相应的极限轨迹和收敛条件. 数值结果验证了所提算法的有效性.

附录

这里给出引理 1 的证明过程.

当 $f_i(x)$ 或 $g_i(x)$ 等于零时, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 显然 $|(f_i(x)+g_i(x))^\alpha - (g_i(x))^\alpha| \le L|f_i(x)|^\beta$.

当 $f_i(x)$, $g_i(x)$ 均不等于零时, 分三种情况讨论.

1) 设 $M_{1i} \le |\frac{f_i(x)}{g_i(x)}| \le M_{2i}$, 其中, M_{1i} 和 M_{2i} 均大于 0. 此时, 由假设条件,

$$f_i(x) = c_1 g_i(x)$$

当 $c_1 = -1$ 时, 命题显然成立; 当 $c_1 \neq -1$ 时,

$$|(f_i(x)+g_i(x))^\alpha - (g_i(x))^\alpha| = |(c_1+1)^\alpha - 1||g_i(x)|^\alpha \le c_2|f_i(x)|^\alpha$$

式中, c_1 和 c_2 为某正常数.

2) 若 $\lim_{x\to x_0} f_i(x) = 0, \lim_{x\to x_0} \frac{f_i(x)}{g_i(x)} = 0$. 此时

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|(f_i(x)+g_i(x))^\alpha - (g_i(x))^\alpha|}{|g_i(x)|^\alpha} \le c_3$$

则

$$\lim_{x\to x_0} |(f_i(x)+g_i(x))^\alpha - (g_i(x))^\alpha| \le c_3|(g_i(x))^\alpha| \le c_4|(f_i(x))^\beta|$$

式中, c_3 和 c_4 为某正常数.

3) 若 $\lim_{x\to x_0} g_i(x) = 0, \lim_{x\to x_0} \frac{g_i(x)}{f_i(x)} = 0$. 此时

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|(f_i(x)+g_i(x))^\alpha - (g_i(x))^\alpha|}{|(f_i(x))|^\alpha} \le c_5$$

则

$$\lim_{x\to x_0} |(f_i(x)+g_i(x))^\alpha - (g_i(x))^\alpha| \le c_5|f(x)|^\alpha$$

式中, c_5 为某正常数.

综上, $|(f_i(x)+g_i(x))^\alpha - (g_i(x))^\alpha| \le L_i|f_i(x)|^\beta$, L_i 为某正常数, 可推知式 (17) 成立. □

References

1 Arimoto S. Learning control theory for robotic motion. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1990, **4**(6): 543−564

2 Porter B, Mohamed S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial impulsive action. *International Journal of Systems Science*, 1991, **22**(3): 447−454

3 Lee H S, Bien Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error. *International Journal of Control*, 1996, **64**(3): 345−359

4 Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian, Zhang Xue-Zhi. PD-type iterative learning control for a class of nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(5): 711−714
(孙明轩, 黄宝健, 张学智. 非线性系统的 PD 型迭代学习控制. 自动化学报, 1998, **24**(5): 711−714)

5 Park K H, Bien Z, Hwang D H. A study on the robustness of a PID-type iterative learning controller against initial state error. *International Journal of Systems Science*, 1999, **30**(1): 49−59

6 Zak M. Terminal attractors for addressable memory in neural networks. *Physics Letters A*, 1988, **133**(1): 18−22

7 Park K B, Tsuji T. Terminal sliding mode control of second-order nonlinear uncertain systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1999, **9**(11): 769−780

8 Sun M X, He X X, Yu L. Initial rectified attractors for perfect synchronization of chaotic systems. *Physics Letters A*, 2005, **348**(1−2): 28−36

9 Park K H, Bien Z. A generalized iterative learning controller against initial state error. *International Journal of Control*, 2000, **73**(10): 871−881

10 Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian, Zhang Xue-Zhi. PD-type iterative learning control for a class of uncertain time-delay systems with biased initial state. *Control Theory & Applications*, 1998, **15**(6): 853−858
(孙明轩, 黄宝健, 张学智. 任意初态下不确定时滞系统的 PD 型迭代学习控制. 控制理论与应用, 1998, **15**(6): 853−858)

11 Sun M X, Wang D W. Closed-loop iterative learning control for non-linear systems with initial shifts. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, **16**(7): 515−538

12 Pi Dao-Ying, Sun You-Xian. The convergence of iterative learning control with open-closed-loop P-type scheme for nonlinear time-varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 1999, **25**(3): 351−354
(皮道映, 孙优贤. 非线性时变系统开闭环 P 型迭代学习控制的收敛性. 自动化学报, 1999, **25**(3): 351−354)

13 Ruan Xiao-E, Lian Jian-Bang, Wu Hui-Zhuo. Convergence of iterative learning control with feedback information in the sense of Lebesgue-p norm. *Acta Automatica Sinica*, 2011,

37(4): 513−516
(阮小娥, 连建帮, 吴慧卓. 具有反馈信息的迭代学习控制律在 Lebesgue-p 范数意义下的收敛性. 自动化学报, 2011, **37**(4): 513−516)

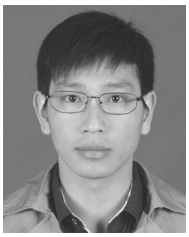
14 Jang T J, Choi C H, Ahn H S. Iterative learning control in feedback systems. *Automatica*, 1995, **31**(2): 243−248

15 Meng D Y, Jia Y M, Du J P, Yu F S. Stability analysis of continuous-time iterative learning control systems with multiple state delays. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(5): 696−703

16 Lv Qing, Fang Yong-Chun, Ren Xiao. Iterative learning control for accelerated inhibition effect of initial state random error. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(7): 1295−1302
(吕庆, 方勇纯, 任逍. 加速抑制随机初态误差影响的迭代学习控制. 自动化学报, 2014, **40**(7): 1295−1302)

孙明轩 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为学习控制. 本文通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn
(**SUN Ming-Xuan** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control. Corresponding author of this paper)

毕宏博 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为学习控制. E-mail: bihbo001@163.com
(**BI Hong-Bo** Ph. D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control.)



周国良 2013 年获得浙江工业大学信息工程学院硕士. 主要研究方向为学习控制. E-mail: 18324303370@163.com
(**ZHOU Guo-Liang** Received his master degree from the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology in 2013. His main research interest is learning control.)

王惠峰 2013 年获得浙江工业大学信息工程学院硕士. 主要研究方向为学习控制. E-mail: wanghf.jx@zjmail. zjtelecom.com.cn
(**WANG Hui-Feng** Received his master degree from the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology in 2013. His main research interest is learning control.)