鲁棒多模型自适应控制系统的稳定性

张维存 [1] 刘冀伟 [1] 胡广大 [1]

摘 要 研究含有不确定性的连续时间随机被控对象的鲁棒多模型自适应控制 (Robust multiple model adaptive control, RMMAC) 的闭环稳定性问题. 通过采用基于模型输出误差指标的加权算法取代传统的基于卡尔曼滤波器和贝叶斯后验概率公式的加权算法, 在权值收敛的前提下, 基于虚拟等价系统 (Virtual equivalent system, VES) 理论给出了此类鲁棒多模型自适应控制系统的闭环稳定性证明, 并将结果推广到可以用多个线性系统系统模型进行逼近的一类非线性慢时变被控对象.

关键词 鲁棒多模型自适应控制, 稳定性, 虚拟等价系统, 加权

引用格式 张维存, 刘冀伟, 胡广大. 鲁棒多模型自适应控制系统的稳定性. 自动化学报, 2015, **41**(1): 113−121

DOI 10.16383/j.aas.2015.c131081

Stability Analysis of Robust Multiple Model Adaptive Control Systems

ZHANG Wei-Cun[1] LIU Ji-Wei[1] HU Guang-Da[1]

Abstract The paper is concerned with the stability of robust multiple model adaptive control (RMMAC) systems. First, the traditional weighting algorithm based on multiple model Kalman filter and Bayes formulas is replaced by a newly developed weighting algorithm; second, with the help of virtual equivalent system (VES) concept and methodology, the stability results are presented for both continuous, linear time-invariant plant and a kind of nonlinear time varying plant.

Key words Robust multiple model adaptive control (RMMAC), stability, virtual equivalent system (VES), weight

Citation Zhang Wei-Cun, Liu Ji-Wei, Hu Guang-Da. Stability analysis of robust multiple model adaptive control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 113−121

近年来, 多模型控制方法正在受到越来越多的关注[1−3], 其中, 鲁棒多模型自适应控制 (Robust multiple model adaptive control, RMMAC)[4] 是一种基于多模型方法和鲁棒控制策略相结合的组合控制方案, 其继承了经典加权多模型自适应控制 (Classical multiple model adaptive control, CMMAC)[5−8] 的框架结构, 并在模型集和局部控制器设计上对经典加权多模型自适应控制进行了改进, 主要体现在: 根据性能指标相对于非自适应控制的改进百分比来确定模型集所包含的模型个数; 在局部控制器的设计上, 用基于输出反馈的鲁棒控制器设计方法 (μ 综合方法) 设计动态补偿器取代经典加权多模型自适应控制的基于状态反馈的 LQ 控制器, 实际上将基于多卡尔曼滤波器的自适应状态估计 (Multiple model adaptive estimation, MMAE) 与控制问题进行了隔离, 即控制律不再像 CMMAC 那样依赖状态估计, 而是直接依靠被控对象的输出.

从大量的控制系统计算机仿真效果和实验验证效果来看, RMMAC 有很好的鲁棒性和其他优点, 但也存在如下缺点[9]:

1) 由于采用多卡尔曼滤波器, 且依赖初始条件, 若系统噪声不能用白噪声近似, 则估计和控制精度都得不到保证;

2) 加权算法复杂, 收敛条件苛刻, 且原有的加权算法收敛性分析方法不适合开环不稳定系统;

3) 其闭环稳定性难以证明, 这一点实际上是所有加权型多模型自适应控制系统的共同问题.

具体来说, 经典加权算法的收敛性条件, 可以归纳为: 要求各个模型输出误差是平稳、遍历的, 且多个模型输出误差之间是可以区分的, 细节见文献 [4, 10−11]. 关于鲁棒 (加权) 多模型自适应控制系统的闭环稳定性, 文献 [12] 针对离散时间被控对象, 通过修改加权策略, 即在加权的基础上引入 "驻留时间", 给出了一个初步的稳定性结果. 而针对原始的 RMMAC 系统的闭环稳定性, 则仍是一个有待填补

收稿日期 2013-12-03 录用日期 2014-04-10
Manuscript received December 3, 2013; accepted April 10, 2014
国家重点基础研究发展规划 (973 计划) (2012CB821200), 国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2011AA060408) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2012CB821200) and National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2011 AA060408)
本文责任编委 贾英民
Recommended by Associate Editor JIA Ying-Min
1. 北京科技大学自动化学院 北京 100083
1. School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083

的空白.

最近, 文献 [13] 针对离散时间线性时不变 (Linear time invariant, LTI) 随机被控对象的加权多模型自适应控制, 提出一种新的基于模型输出误差进行递推计算的加权算法, 该加权算法取代了基于卡尔曼滤波器和动态假设检验的递推权值算法, 其特点是直接基于模型输出误差指标进行模型优劣的对比, 并进而计算权值, 不仅省略了多卡尔曼滤波器, 而且其收敛性分析相对简单, 收敛条件减少.

本文基于文献 [13] 提出的加权算法, 给出连续时间线性时不变随机被控对象的鲁棒多模型自适应控制系统的闭环稳定性证明, 并将结果推广到可以用多个线性系统模型进行逼近的非线性慢时变被控对象.

证明过程的关键之处是采用分析自适应控制系统的虚拟等价系统 (Virtual equivalent system, VES) 方法[14], 降低了解决原问题的难度.

需要指出, 本文中涉及随机变量或随机过程的极限运算均是在概率 1 的意义下进行.

1 参数不确定线性系统被控对象

1.1 RMMAC 系统描述

考虑如下单输入单输出的不确定性连续时间随机被控对象 P

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + \omega(t)\\ y(t) &= D_i x(t) + v(t)\end{aligned} \tag{1}$$

其中, $u(t)$ 为输入变量, $y(t)$ 为输出变量, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量, A_i, B_i, D_i 为适当维数的不确定矩阵或向量, 它们属于某个已知的有限集合 $M = \{M_i,\ i = 1, 2, \cdots, m\}$. $\omega(t)$ 和 $v(t)$ 分别为系统噪声和量测噪声, 且满足

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \omega^2(t)\mathrm{d}t = R < \infty$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\mathrm{d}t = Q < \infty$$

对每个给定的局部模型 $M_l = (A_l, B_l, D_l)$, $l = 1, \cdots, m$ 设计具有一定鲁棒性的局部控制器 C_l, 文献 [4] 提出用 μ 综合方法设计局部控制器, 实际上可以采用任何可行的具有一定鲁棒性的控制策略, 如极点配置等. 每个局部控制器的设计目标是镇定局部模型, 即局部模型和局部控制器构成的闭环系统稳定, 且跟踪有界参考输入信号 $y_r(t)$, $0 < y_r(t) \le M < \infty$.

不失一般性, 记局部控制器 C_l 的输出为

$$u_l(t) = K_l x(t) + G_l y_r(t) \tag{2}$$

其中, K_l 为状态反馈矩阵, G_l 为外部输入矩阵, 则全局控制量为

$$u(t) = \sum_{l=1}^{m} p_l(t) u_l(t) \tag{3}$$

其中, $p_l(t)$ 为各局部控制器所对应的加权值.

需要指出的是, 加权值仅在一些离散时刻进行计算, 得到 $p_l(k)$, 需要通过采用零阶保持器, 才能得到 $p_l(t)$, 文献 [4] 忽略了该细节.

文献 [13] 提出如下的加权算法:

$$l_i(0) = \frac{1}{m},\quad p_i(0) = l_i(0) \tag{4}$$

$$l_i'(k) = 1 + \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k} e_i(p)^2 \tag{5}$$

$$l_{\min}(k) = \min_i l_i'(k) \tag{6}$$

$$l_i(k) = l_i(k-1)\frac{l_{\min}(k)}{l_i'(k)} \tag{7}$$

$$p_i(k) = \frac{l_i(k)}{\sum_{i=1}^{m} l_i(k)} \tag{8}$$

其中, $e_i(k)$ 为第 k 个采样时刻第 i 个模型的输出与实际对象的输出之差, 即

$$e_i(k) = y(k) - y_i(k) \tag{9}$$

关于上述加权算法的收敛性, 有以下结果.

定理 1[13]**.** 设 $M_l \in \mathbf{M} = \{M_i,\ i = 1, 2, \cdots, m\}$ 最接近真实对象的输出特性, 即依概率 1, 有

$$\begin{cases}\sum\limits_{p=1}^{k} e_l^2(p) < \sum\limits_{p=1}^{k} e_i^2(p)\\ \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\sum\limits_{p=1}^{k} e_l^2(p) = R_l\\ \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\sum\limits_{p=1}^{k} e_i^2(p) = R_i\\ R_l < R_i,\ \ k \ge k^*,\ \ i \ne l\end{cases} \tag{10}$$

其中, R_l 为常数, R_i 为常数或无穷大, k^* 为有限正整数. 则依概率 1, 有

$$\lim_{k\to\infty} p_l(k) = 1,\ \ \lim_{k\to\infty} p_i(k) = 0,\ \ i \ne l$$

注 1. 定理 1 即为文献 [13] 定理 2-1, 其中 k^* 实际上可以取为 $k^*=1$.

注 2. 经过零阶保持器后, 必有

$$\lim_{t\to\infty} p_l(t)=1,\ \ \lim_{t\to\infty} p_i(t)=0,\ \ i\neq l$$

以上加权算法的收敛条件可以概括为, 误差性能指标 (5) 在系统噪声和量测噪声的干扰下可以区分, 即满足式 (10).

加权算法的收敛性实际上受系统信噪比的影响, 当信噪比超出一定范围, 将出现权值不收敛或错误收敛的情况, 详细讨论参见文献 [13].

图 1 给出了 RMMAC 的逻辑结构图, 其中 P, C_1, C_i, C_m, M_l 可以理解为相应的传递函数.

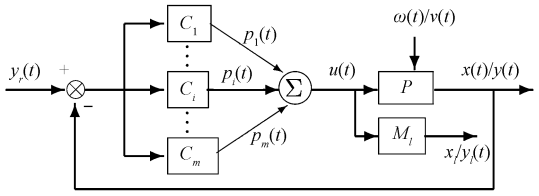

图 1　RMMAC 系统的结构图

Fig. 1　Structure block diagram of a general RMMAC

图 1 中, $p_l(t)$, $l=1,\cdots,m$ 实际上代表了对被控对象的 "辨识". 由于加权值只能在离散采样时刻进行计算得到 $p_l(k)$, 因此须经过零阶保持器才能得到连续的加权值 $p_l(t)$. 整个鲁棒多模型自适应控制系统本质上是一个混杂系统.

首先构造图 1 所示系统的输入输出意义上的等价系统 (考虑模型集包含真实对象模型 M_l, 且 $p_l\to 1$; $p_i=0$; $i\neq l$), 即虚拟等价系统, 如图 2 所示.

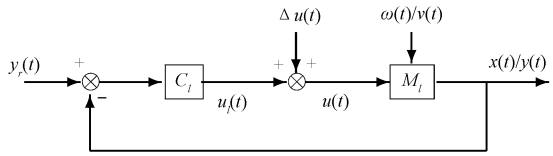

图 2　RMMAC 的虚拟等价系统

Fig. 2　VES for a general RMMAC

图 2 中, $u_l(t)$ 是控制器 C_l 产生的输出, $u(t)$ 同图 1 所示, $\Delta u(t)=u(t)-u_l(t)$.

1.2　主要结果

定理 2. 针对未知随机被控对象 P 的 RMMAC 系统, 若满足以下条件:

1) 模型集合中包含真实对象的模型, 记为 M_l;

2) 局部控制器与相应的局部模型构成稳定的闭环系统, 且跟踪系统的参考输入信号;

3) 各个局部模型与实际对象之间的输出误差可区分, 即依概率 1 满足式 (10).

则鲁棒多模型自适应控制系统是稳定的和收敛的.

证明. 根据条件 3) 及定理 1, 必有

$$p_l(t)\to 1,\ \ p_i(t)\to 0,\quad i\in L,\ \ i\neq l$$

在上述条件下, 我们推导图 2 中 $\Delta u(t)=u(t)-u_l(t)$ 的性质如下:

$$\begin{aligned}\Delta u(t)=u(t)-u_l(t)=&\\ &\sum_{i=1}^{m} p_i(t)[K_i x(t)+G_i y_r(t)]-\\ &K_l x(t)-G_l y_r(t)=\\ &o(\|x(t)\|+M)\end{aligned}\tag{11}$$

考虑图 2 所示虚拟等价系统的结构特点, 显然它是一个线性定常系统, 故可将其分解为图 3 和图 4 两个子系统.

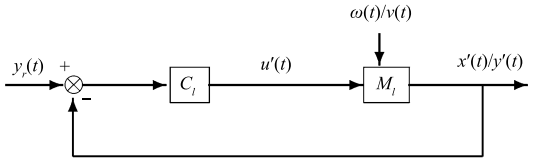

图 3　虚拟等价系统 (如图 2 所示) 的分解子系统 I

Fig. 3　Decomposed subsystem I of VES (Fig. 2)

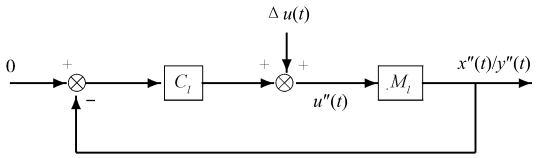

图 4　虚拟等价系统 (如图 2 所示) 的分解子系统 II

Fig. 4　Decomposed subsystem II of VES (Fig. 2)

图 3 为随机系统, 即

$$\begin{aligned}\dot{x}'(t)&=A_l x'(t)+B_l u'(t)+\omega(t)\\ y'(t)&=D_l x'(t)+v(t)\end{aligned}\tag{12}$$

图 4 为确定性系统, 即

$$\begin{aligned}\dot{x}''(t)&=A_l x''(t)+B_l u''(t)\\ y''(t)&=D_l x''(t)\end{aligned}\tag{13}$$

注意, 图 1 和图 2 所示系统的初始状态为 $x(0)=0$, 而图 3 和图 4 所示系统的初始状态分别为 $x'(0)=0$ 和 $x''(0)=0$, 显然满足

$$x(0) = x'(0) + x''(0)$$

由条件 2) 可知, 图 3 所示系统为稳定系统, 且跟踪参考输入, 因此有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left[\|x'(t)\|^2\right] < \infty\\ &\mathrm{E}y'(t) = \mathrm{E}\left[D_l x'(t)\right] = y_r(t)\\ &\mathrm{E}\left[y'(t) - y_r(t)\right]^2 < \infty\end{aligned}$$

分析图 4 所示确定性线性系统, 注意其参考输入信号为 0, 因此

$$u''(t) = K_l x''(t) + \Delta u(t) \tag{14}$$

代入式 (13), 得

$$\begin{aligned}&\dot{x}''(t) = (A_l + B_l K_l)x''(t) + B_l \Delta u(t)\\ &y''(t) = D_l x''(t)\end{aligned} \tag{15}$$

求解上式, 并注意 $x''(0) = 0$, 有

$$x''(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{(A_l + B_l K_l)(t-\tau)} B_l \Delta u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

由于闭环系统稳定, 且初始条件为 0, $\Delta u(t)$ 满足式 (11), 因此根据附录中的引理 1 及其推论, 有

$$\|x''(t)\| = o(\|x(t)\| + M) \tag{17}$$

由线性叠加定理, 有

$$x(t) = x'(t) + x''(t)$$

对上式取范数, 显然有

$$\begin{aligned}0 \le \|x(t)\| \le \|x'(t)\| + \|x''(t)\| =\\ \|x'(t)\| + o(\|x(t)\| + M)\end{aligned} \tag{18}$$

对上式取平方, 并考虑到事实 $2ab \le a^2 + b^2$, 得到

$$\begin{aligned}0 \le \|x(t)\|^2 \le 2[\|x'(t)\|^2 + \|x''(t)\|^2] =\\ 2[\|x'(t)\|^2 + o((\|x(t)\| + M)^2)]\end{aligned} \tag{19}$$

对上式两边进行积分, 得

$$\begin{aligned}0 \le \frac{1}{T}\int_0^T \|x(t)\|^2\mathrm{d}t \le \frac{2}{T}\int_0^T \|x'(t)\|^2\mathrm{d}t +\\ o\left(\frac{2}{T}\int_0^T (\|x(t)\| + M)^2\mathrm{d}t\right)\end{aligned} \tag{20}$$

下面用反证法证明

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|x(t)\|^2\mathrm{d}t < \infty$$

即

$$\mathrm{E}[\|x(t)\|^2] < \infty$$

为此反设

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|x(t)\|^2\mathrm{d}t$$

无界, 因此必有无穷子列

$$\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k} \|x(t)\|^2\mathrm{d}t \to \infty, \quad k = 1, 2, \cdots, \infty$$

且满足

$$\begin{aligned}0 \le \frac{1}{T_k}\int_0^{T_k} \|x(t)\|^2\mathrm{d}t \le \frac{2}{T_k}\int_0^{T_k} \|x'(t)\|^2\mathrm{d}t +\\ o\left(\frac{2}{T_k}\int_0^{T_k} (\|x(t)\| + M)^2\mathrm{d}t\right),\\ k = 1, 2, \cdots, \infty\end{aligned} \tag{21}$$

上式两端同除以

$$\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k} \|x(t)\|^2\mathrm{d}t$$

并取极限 $\lim_{T_k\to\infty}$, 同时注意到 $\mathrm{E}[\|x'(t)\|^2] < \infty$ 意味着

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|x'(t)\|^2\mathrm{d}t < \infty$$

以及

$$\lim_{T_k\to\infty}\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k} \|x'(t)\|^2\mathrm{d}t < \infty$$

因此, 由式 (21) 和夹逼定理, 得

$$\frac{\lim\limits_{T_k\to\infty}\dfrac{1}{T_k}\displaystyle\int_0^{T_k} \|x(t)\|^2\mathrm{d}t}{\lim\limits_{T_k\to\infty}\dfrac{1}{T_k}\displaystyle\int_0^{T_k} \|x(t)\|^2\mathrm{d}t} \to 0$$

显然上式意味着一个错误结论, 即 $1 \to 0$, 因此原假设 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|x(t)\|^2\mathrm{d}t$ 无界不能成立, 于是证得

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|x(t)\|^2\mathrm{d}t < \infty$$

即

$$\mathrm{E}\|x(t)\|^2 < \infty$$

类似地, 可以证明

$$\mathrm{E}\|x(t)\| < \infty$$

在此基础上, 考虑到式 (17), 有

$$\mathrm{E}\|x''(t)\| = o(E\|x(t)\| + M) = 0$$
$$\mathrm{E}x''(t) = 0$$

从而有

$$\mathrm{E}x(t) = \mathrm{E}x'(t)$$
$$\mathrm{E}y(t) = \mathrm{E}\left[D_l(x'(t) + x''(t))\right] = \mathrm{E}\left[D_l x'(t)\right] = \mathrm{E}y'(t) = y_r(t) \tag{22}$$

最后, 由附录中的引理 2 可知

$$\mathrm{E}[y(t) - y_r(t)]^2 = \mathrm{E}[y'(t) - y_r(t)]^2 < \infty$$

至此得出结论, 图 2 所示的虚拟等价系统稳定且收敛, 进而鲁棒加权多模型自适应控制系统稳定且收敛. □

若模型集中不包含被控对象的精确模型, 则称该情况为非精确建模, 需要构造新的虚拟等价系统, 如图 5 所示.

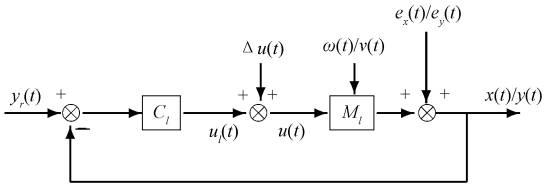

图 5　非精确建模情况下的虚拟等价系统

Fig. 5　VES for a general RMMAC with non-precise modeling

图 5 中

$$e_x(t) = x(t) - x_l(t) - \omega(t)$$
$$e_y(t) = y(t) - y_l(t) - v(t)$$

在此非精确建模情况下, 有如下结论.

推论 1. 针对未知随机被控对象 P 的 RMMAC 系统, 若满足以下条件:

1) 模型集合中包含一个距离真实对象最近的模型 M_l, 即依概率 1 满足式 (10);

2) 局部控制器与对应的局部模型构成稳定的闭环系统, 且跟踪系统的参考输入信号;

3) M_l 充分逼近被控对象, 即 $\|e_x(t)\| = o(\|x(t)\|)$, $\|e_y(t)\| = o(\|x(t)\|)$. 则相应的鲁棒多模型自适应控制系统是稳定的和收敛的.

证明过程与定理 2 类似, 过程略.

2　一类非线性慢时变被控对象

2.1　RMMAC 的虚拟等价系统

控制系统的描述同第 1.1 节所述, 对被控对象没有直接的限制, 可以考虑为任意的连续时间非线性慢时变对象 $P(t)$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \omega(t))$$
$$y(t) = g(x(t), v(t)) \tag{23}$$

但是, 假定其真实模型可以被有限个 "慢切换" 的连续时间线性时不变模型所近似 (近似误差为相对无穷小量, 细节见后面的描述).

该类被控对象的 RMMAC 系统结构如图 6 所示.

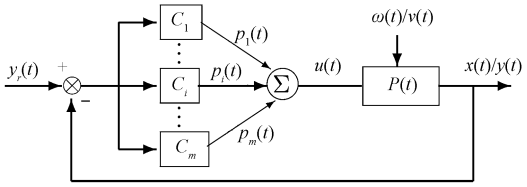

图 6　非线性慢时变对象的 RMMAC 控制系统结构图

Fig. 6　Structure block diagram of RMMAC system for non-linear time-varying plant

由于用多个线性时不变状态空间模型可以逼近 $P(t)$ 的状态 $x(t)$ 以及输出 $y(t)$, 因此, 可以构造出图 6 所示系统的输入输出等价系统, 即虚拟等价系统, 如图 7 所示.

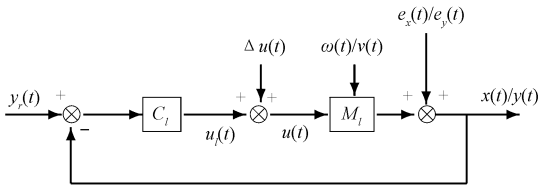

图 7　图 6 系统的虚拟等价系统

Fig. 7　VES for Fig. 6

图 7 中, $u_l(t)$ 是 C_l 产生的输出, $u(t)$ 同图 1 所示, $\Delta u(t) = u(t) - u_l(t)$, 此外, $e_x(t) = x(t) - x_l(t) - \omega(t)$ 和 $e_y(t) = y(t) - y_l(t) - v(t)$ 是用多个局部连续时间线性模型 $M_l, l \in L$ 逼近未知对象 $P(t)$ 所产生的状态误差和输出误差. 图 7 与图 2、图 5 的本质区别在于, 图 7 从结构上说是一个连续时间线性切换系统, 即 l 是变化的, 而图 2 和图 5 是一个连续时间线性定常系统, 即 l 是固定的.

需要指出的是, 对于具有时变特征的被控对象, 加权算法需要增加一些特殊处理, 以便解决权值的 "锁死" 状态, 即一旦某些权值收敛到 0, 则当被控对象发生变化时, 由于权值是递推计算的, 那些已经收敛到 0 的权值将失去重新调整的能力. 为此, 可以采用两种方案: 1) 设置权值的下限; 2) 权值的重置. 本

文采用权值重置的办法, 当检测到系统跳变时, 重新启动权值算法, 即式 (4) ∼ (8).

2.2 主要结论

定理 3. 针对连续时间非线性慢时变未知被控对象 $P(t)$ 的 RMMAC 系统, 如果满足以下条件:

1) 被控对象的真实模型可以用 L 个局部模型所逼近, 且逼近误差 $\|e_x(t)\| = o(\|x(t)\|)$, $\|e_y(t)\| = o(\|x(t)\|)$;

2) 局部控制器与相应的局部模型构成稳定的闭环系统, 且局部模型之间的切换间隔足够长;

3) 在任意两次模型切换之间, 总有一个模型 M_l, $l \in L$ 的输出误差最小, 即依概率 1 有

$$\begin{cases} \sum\limits_{p=T_j+1}^{T_j+k} e_l^2(p) < \sum\limits_{p=T_j+1}^{T_j+k} e_i^2(p) \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} \sum\limits_{p=T_j+1}^{T_j+k} e_l^2(p) = R_l \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} \sum\limits_{p=T_j+1}^{T_j+k} e_i^2(p) = R_i \\ R_l < R_i, \ \ k \geq k^*, \ \ i \neq l \end{cases}$$

其中, R_l 为常数, R_i 为常数或无穷大, k^* 为有限正整数; T_j, $j = 0, 1, 2, \cdots$ 为系统发生跳变 (即模型切换) 的时间序列, 且 $T_0 = 0$. 则相应的鲁棒多模型自适应控制系统是稳定的和收敛的.

证明. 将图 7 所示系统进行分解, 分别如图 8 和图 9 所示, 分解前后的等价性可以用数学归纳法加以证明 (过程略).

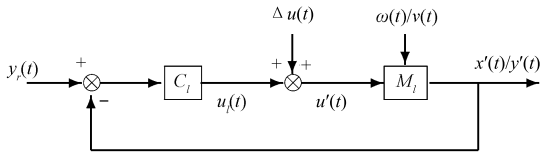

图 8 虚拟等价系统 (如图 7 所示) 的分解子系统 I

Fig. 8 Decomposed subsystem I of VES Fig. 7

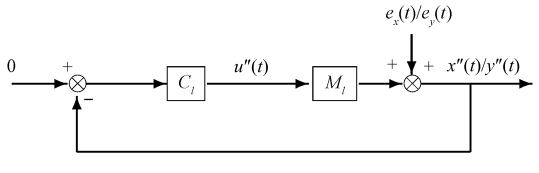

图 9 虚拟等价系统 (如图 7 所示) 的分解子系统 II

Fig. 9 Decomposed subsystem II of VES Fig. 7

分析图 8 所示子系统的性质, 由条件 2) 和条件 3), 同时考虑定理 2, 假想将被控对象和相应的控制器 "冻结" 在某个工作点, 即 M_l 和 C_l 的下标 "冻结" 不变, 那么图 8 所示子系统在输入输出意义下等价于图 2 所示系统, 是一个全局稳定的系统.

在此基础上, 由条件 2) 的后半部分可知, 图 8 所示系统是一个慢切换系统, 并且各个组成系统是稳定的连续时间线性时不变随机系统, 因此根据切换系统理论[15−16] 可得, 图 8 所示子系统是全局稳定的, 即

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[\|x'(t)\|^2\right] < \infty \\ &\mathrm{E}y'(t) = \mathrm{E}\left[D_l x'(t)\right] = y_r(t) \\ &\mathrm{E}\left[y'(t) - y_r(t)\right]^2 < \infty \end{aligned}$$

考察图 9 所示子系统的性质, 由于其为确定性闭环稳定系统, 又由于条件 1), 故有

$$\|x''(t)\| = o(\|x(t)\|)$$

仿照定理 2 的反证法证明过程, 可得

$$\mathrm{E}\left[\|x(t)\|^2\right] < \infty$$

进一步有

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}y(t) = \mathrm{E}y'(t) = \mathrm{E}\left[D_l x'(t)\right] = y_r(t) \\ &\mathrm{E}\left[y(t) - y_r(t)\right]^2 = \mathrm{E}\left[y'(t) - y_r(t)\right]^2 < \infty \end{aligned}$$

□

放宽对模型逼近误差的要求, 即只要求逼近误差有界, 则相应的鲁棒多模型自适应控制系统仍可保证稳定, 即状态和输出有界, 但不能保证收敛性. 为此, 我们给出如下推论, 证明过程略.

推论 2. 针对非线性慢时变未知被控对象的 RMMAC 系统, 若满足以下条件:

1) 被控对象的输出特性可以用 L 个局部模型所逼近, 且逼近误差有界, 即 $\|e_x(t)\| \leq \eta_1 < \infty$, $\|e_y(t)\| \leq \eta_2 < \infty$;

2) 局部控制器与相应的局部模型构成稳定的闭环系统, 且局部模型之间的切换间隔足够长;

3) 在任意两次模型切换之间, 总有一个模型 M_l, $l \in L$ 的输出误差最小, 即依概率 1 有

$$\begin{cases} \sum\limits_{p=T_j+1}^{T_j+k} e_l^2(p) < \sum\limits_{p=T_j+1}^{T_j+k} e_i^2(p) \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} \sum\limits_{p=T_j+1}^{T_j+k} e_l^2(p) = R_l \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} \sum\limits_{p=T_j+1}^{T_j+k} e_i^2(p) = R_i \\ R_l < R_i, \ \ k \geq k^*, \ \ i \neq l \end{cases}$$

其中, R_l 为常数, R_i 为常数或无穷大, k^* 为有限正整数; T_j, $j=0,1,2,\cdots$ 为系统发生跳变 (即模型切换) 的时间序列, 且 $T_0=0$. 则相应的鲁棒多模型自适应控制系统是稳定的.

3　结论

本文基于虚拟等价系统的概念和方法, 给出了连续时间鲁棒多模型自适应控制 (RMMAC) 系统的稳定性证明, 主要条件可以概括为: 模型集包含被控对象的真实模型或能够充分逼近被控对象的模型; 加权算法 0-1 收敛; 局部控制器镇定局部模型, 且满足渐近跟踪参考输入的要求.

今后的研究工作是进一步改进加权算法, 给出全面的 RMMAC 系统的稳定性结论 (包括非 0-1 收敛等情况).

附录　引理及证明

引理 1. 对于一个稳定的多输入多输出 ((Multiple-input multiple-output, MIMO) 连续时间确定线性系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\&y(t)=Dx(t)\\&x(0)=0\end{aligned}\tag{A1}$$

若

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|=0$$

则有

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$$

$$\lim_{t\to\infty}\|y(t)\|=0$$

证明. 求解系统 (A1) 的状态方程, 并注意到其初始状态为零, 因此有

$$x(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{A2}$$

由于系统稳定, 所以 A 为稳定矩阵, 因此必存在常数 $\lambda<0$, $c>0$, 使得

$$\|\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\|\le c\,\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}\tag{A3}$$

进而有

$$0\le\|x(t)\|\le c\|B\|\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}\|u(\tau)\|\mathrm{d}\tau\tag{A4}$$

由引理 1.1 知, 当 $t\to\infty$ 时, 有

$$\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}\|u(\tau)\|\mathrm{d}\tau\to 0$$

所以根据夹逼定理, 有

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$$

类似地, 可以证明

$$\lim_{t\to\infty}\|y(t)\|=0$$

□

引理 1 的推论. 对于一个稳定的多输入多输出 (MIMO) 连续时间确定线性系统, 若其输入信号的向量范数为 $\|u(t)\|=o(\|f(t)\|+M)$, 则状态及输出信号的向量范数也必定为 $o(\|f(t)\|+M)$, 其中, $f(t)$ 为任意向量函数, $0<M<\infty$.

证明. 式 (A2) 两端同时除以 $(\|f(t)\|+M)$, 按引理 1 的证明过程可得

$$\frac{\|x(t)\|}{\|f(t)\|+M}\to 0$$

$$\frac{\|y(t)\|}{\|f(t)\|+M}\to 0$$

即

$$\|x(t)\|=o(\|f(t)\|+M)$$

$$\|y(t)\|=o(\|f(t)\|+M)$$

□

引理 1.1. 设 $\lambda<0$, $\|u(\tau)\|\to 0$, 则有

$$\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}\|u(\tau)\|\mathrm{d}\tau\to 0$$

证明. 引理 1.2 已经证明, 若 $\lambda<0$, $S_n\to 0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{e}^{\lambda(n-i)}S_i=0\tag{A5}$$

下面将引理 1.2 的结论推广到积分情形. 显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{e}^{\lambda(n-i)}S_i=0\tag{A6}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{e}^{\lambda(n-i)}S_i\frac{1}{n}=0\tag{A7}$$

令

$$\|u(i)\|=S_i,\ \ f(x_i)=\mathrm{e}^{\lambda(n-x_i)}\|u(x_i)\|,\ \ \frac{1}{n}=\triangle x_i$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\triangle x_i=0\tag{A8}$$

即

$$\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}\|u(\tau)\|\mathrm{d}\tau\to 0\tag{A9}$$

□

引理 1.2. 设有常数 $\lambda<0$, 以及实数序列 S_n, $n=0,1,2,\cdots$. 若

$$\lim_{n\to\infty}S_n=0$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{e}^{\lambda(n-i)}S_i=0$$

证明. 文献 [17] 中已经证明: 若 $P_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, 且满足条件

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_0 + P_1 + \cdots + P_n} = 0$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} P_{n-i} S_i}{P_0 + P_1 + \cdots + P_n} = s \tag{A10}$$

考虑到

$$P_k = \mathrm{e}^{\lambda k}, \ \lambda < 0$$

首先, $P_k = \mathrm{e}^{\lambda k} > 0$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda n}}{1 + \mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{2\lambda} + \cdots + \mathrm{e}^{n\lambda}} = 0$$

基于式 (A10), 并注意到本引理中 S_n 的极限为 $s = 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{n\lambda} S_0 + \mathrm{e}^{(n-1)\lambda} S_1 + \cdots + S_n}{1 + \mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{2\lambda} + \cdots + \mathrm{e}^{n\lambda}} = 0 \tag{A11}$$

上式分母的极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{2\lambda} + \cdots + \mathrm{e}^{n\lambda}\right) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\lambda}}$$

为常数, 因此 (A11) 意味着

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{e}^{\lambda(n-i)} S_i = 0$$

□

引理 2. 已知

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y''(t)\right]^2 \mathrm{d}t = 0$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t < \infty$$

必有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t) + y''(t)\right]^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$

证明. 显然

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t) + y''(t)\right]^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y''(t)\right]^2 \mathrm{d}t + \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right] y''(t) \mathrm{d}t =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t + \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right] y''(t) \mathrm{d}t \tag{A12}$$

分析上式右面的第 2 项, 根据积分形式的 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$0 \le \left\{\frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right] y''(t) \mathrm{d}t\right\}^2 \le \left\{\frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t\right\} \times \left\{\frac{1}{T} \int_0^T \left[y''(t)\right]^2 \mathrm{d}t\right\} \to 0 \tag{A13}$$

运用夹逼定理得

$$\lim_{T\to\infty} \left\{\frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right] y''(t) \mathrm{d}t\right\}^2 = 0$$

从而

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right] y''(t) \mathrm{d}t = 0$$

代入式 (A12), 得

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t) + y''(t)\right]^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[y'(t) - y_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t \tag{A14}$$

□

References

1 Liu Lin-Lin, Zhou Li-Fang, Ji Ting, Zhao Yu-Hong. Research on model switching method of multi-hierarchical model predictive control system. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 626−630
(刘琳琳, 周立芳, 嵇婷, 赵豫红. 多层次多模型预测控制算法的模型切换方法研究. 自动化学报, 2013, **39**(5): 626−630)

2 Huang Miao, Wang Xin, Wang Zhen-Lei. Multiple models adaptive control based on time series for a class of nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 581−586
(黄淼, 王昕, 王振雷. 一类非线性系统的基于时间序列的多模型自适应控制. 自动化学报, 2013, **39**(5): 581−586)

3 Dong Zhi-Kun, Wang Xin, Wang Xiao-Bo, Li Shao-Yuan, Zheng Yi-Hui. Application of weighted multiple models adaptive controller in the plate cooling process. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(8): 1144−1150
(董志坤, 王昕, 王笑波, 李少远, 郑益慧. 多模型加权自适应控制在中厚板层流冷却系统中的应用. 自动化学报, 2010, **36**(8): 1144−1150)

4 Fekri S, Athans M, Pascoal A. Issues, progress and new results in robust adaptive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2006, **20**(10): 519−579

5 Magill D T. Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1965, **10**(4): 434−439

6 Lainiotis D G. Partitioning: a unifying framework for adaptive systems — I: Estimation; II: Control. *Proceedings of the IEEE*, 1976, **64**(8): 1126−1143, 1182−1197

7 Athans M, Castanon D, Dunn K, Greene C, Lee W, Sandell N Jr, Willsky A S. The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptive control (MMAC) method — Part I: Equilibrium flight. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(5): 768−780

8 Badr A, Binder Z, Rey D. Weighted multi-model control. *International Journal of Systems Science*, 1992, **23**(1): 145−149

9 Kuipers M, Ioannou P. Practical robust adaptive control: benchmark example. In: Proceedings of the 2008 American Control Conference. Seattle, Washington, USA: IEEE, 2008. 5168−5173

10 Baram Y. Information, Consistent Estimation and Dynamic System Identification [Ph. D. dissertation], MIT, Cambridge, MA, USA, 1976.

11 Baram Y, Sandell N R. An information theoretic approach to dynamical systems modeling and identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, **23**(1): 61−66

12 Hassani V, Hespanha J, Athans M, Pascoal A. Stability analysis of robust multiple model adaptive control. In: Proceedings of the 18th IFAC World Congress. Milan, Italy: Universitá Cattolica del Sacro Cuore, 2011.

13 Zhang W C. Stable weighted multiple model adaptive control: discrete-time stochastic plant. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2013, **27**(7): 562−581

14 Zhang W C. On the stability and convergence of self-tuning control-virtual equivalent system approach. *International Journal of Control*, 2010, **83**(5): 879−896

15 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5): 59−70

16 Shorten R, Wirth F, Mason O, Wulff K, King C. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Review*, 2007, **49**(4): 545−592

17 Sun Ben-Wang, Wang Hao. *Typical Problems and Solutions in Mathematical Analysis*. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 1981.
(孙本旺, 汪浩. 数学分析中的典型例题和解题方法. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1981.)

张维存 博士, 北京科技大学自动化学院副教授. 主要研究方向为控制理论及应用, 自校正控制和多模型自适应控制. 本文通信作者.
E-mail: weicunzhang@ustb.edu.cn
(**ZHANG Wei-Cun** Ph. D., associate professor at the School of Automation and Electrical Engineering, University of Sciences and Technology Beijing. His research interest covers control theory, self-tuning control, and multiple model adaptive control. Corresponding author of this paper.)

刘冀伟 北京科技大学自动化学院副教授. 主要研究方向为图像处理, 现代控制理论和智能控制.
E-mail: easyliu@vip.sina.com
(**LIU Ji-Wei** Associate professor at the School of Automation and Electrical Engineering, University of Sciences and Technology Beijing. His research interest covers image processing, modern control theory and intelligent control.)

胡广大 博士, 北京科技大学自动化学院教授. 主要研究方向为控制理论及应用, 计算数学和信号处理.
E-mail: ghu@ies.ustb.edu.cn
(**HU Guang-Da** Ph. D., professor at the School of Automation and Electrical Engineering, University of Sciences and Technology Beijing. His research interest covers control theory, computational mathematics, and signal processing.)