网络控制系统随机稳定性研究

马卫国 [1] 邵 诚 [1]

摘 要 研究了具有随机网络诱导时延及数据包丢失的网络控制系统随机稳定性问题. 本文用一个具有两个状态的马尔可夫链来描述数据通过网络传输时随机数据包丢失过程, 利用马尔可夫跳变线性系统理论, 将网络控制系统建模为一个具有两种运行模式的马尔可夫跳变线性系统, 给出了在状态反馈控制下网络控制系统随机稳定的线性矩阵不等式形式的充分条件, 最后用一个仿真示例验证了该方法的有效性.

关键词 网络控制系统, 网络诱导时延, 数据包丢失, 随机稳定性, 马尔可夫跳变线性系统

中图分类号 TP273

Stochastic Stability for Networked Control Systems

MA Wei-Guo[1] SHAO Cheng[1]

Abstract The stochastic stability for networked control systems with stochastic network-induced delay and data packet dropout is studied. When data are transmitted over network, the stochastic data packet dropout process is modeled as a Markov chain with two states. Based on the theory of Markovian jump linear systems, the networked control systems are modeled as a discrete time Markovian jump linear system with two operation modes. The sufficient condition of stochastic stability for networked control systems stabilized by state feedback control is proposed in terms of linear matrix inequality. At last, a numerical example is given to verify the effectiveness of the method presented in this paper.

Key words Networked control systems, network-induced delay, data packet dropout, stochastic stability, Markovian jump linear systems

1 引言

近年来随着网络技术的发展, 网络控制系统 (Networked control systems) 即通过网络形成闭环的反馈控制系统, 引起了众多学者的关注[1~3]. 在网络控制系统中, 传感器、控制器和执行器等系统组件通过通信网络进行信息交换, 因此与传统的直接点对点连接的控制系统相比, 网络控制系统具有安装维护方便、灵活性高和易于重构等优点, 广泛应用于现代制造企业、自动公路系统、机器人控制和无人飞行器控制等多个领域.

在反馈回路中引入通信网络也带来了很多问题, 使系统的分析和设计变得很复杂. 一个主要问题是当数据在共享的带宽有限的通信网络上传输时, 将会产生网络诱导时延, 而时延是使控制系统性能恶化的潜在原因之一. 另一个问题是数据包丢失问题. 与有线网络相比, 无线网络更易受到外界干扰, 数据在网络上传输时可能具有较高的数据包丢失率, 对于数据包丢失问题的处理更为重要. 对于网络诱导时延问题, 文献 [4] 和 [5] 分别将小于一个采样周期和大于一个采样周期的时变网络诱导时延看作一个恒定时延与不确定时延之和, 建立了具有参数不确定性的网络控制系统的模型, 给出了基于矩阵不等式的控制器设计方法. 对于网络控制系统中存在的数据包丢失问题, 文献 [6] 利用异步动态系统的理论, 给出了存在确定性数据包丢失的网络控制系统指数稳定的充分条件. 文献 [7] 分析了具有小于一个采样周期的恒定网络诱导时延和确定性数据包丢失的网络控制系统稳定性, 给出了系统指数稳定的充分条件. 文献 [8] 分析了具有一个采样周期的恒定网络诱导时延和随机数据包丢失的无线网络控制系统的稳定性. 文献 [9] 在没有考虑网络诱导时延情况下, 研究了随机数据包丢失对网络控制系统稳定性的影响. 通常数据通过网络传输时, 网络诱导时延和数据包丢失是同时存在, 而且都是随机变化的, 然而上述文献在进行系统分析和设计过程中没有同时考虑随机的网络诱导时延和数据包丢失问题.

对于同时具有随机网络诱导时延和数据包丢失的网络控制系统, 本文利用马尔可夫跳变线性系统理论, 建立了网络诱导时延小于一个采样周期和大于一个采样周期的网络控制系统的模型, 以线性矩阵不等式的形式给出了采用状态反馈控制的网络控制系统随机稳定的充分条件, 保证系统稳定的状态反馈控制器可以通过解一组矩阵不等式求出.

2 网络控制系统建模

本文研究的网络控制系统框图如图 1 所示, 其中被控对象和控制器之间通过网络进行信息交换, 控制器和执行器之间不存在网络, 即控制器和执行器位于同一个节点上.

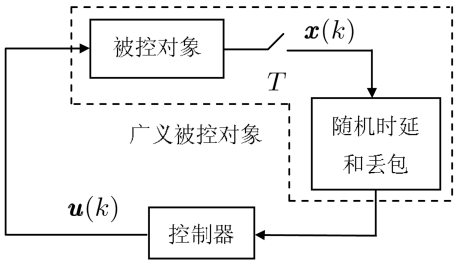

图 1 网络控制系统框图

Fig. 1 Diagram of networked control systems

假设被控对象的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbf{R}^p$ 分别为被控对象的状态, 控制输入和输出; A, B, C 为具有相应维数的定常矩阵. 传感器节点采用时间驱动, 以周期 T 对被控对象进行等周期采样, 然后将采集到的被控对象数据通过通信网络传输到控制器端的接收缓冲区. 控制器采用事件驱动, 即控制器接收到数据以后立刻根据所采用的控制算法计算控制量, 该控制量直接传给采用事件驱动的执行器, 进而作用于被控对象.

数据通过网络传输时, 将会不可避免地产生网络诱导时延, 而且该时延通常都是随机变化的. 假设网络诱导时延 τ_k 小于一个采样周期, 可以描述为: $\tau_k = T/2 + \tau_k' \le T$, 其中, $-T/2 \le \tau_k' \le T/2$, 则包括网络在内的广义被控对象的离散

收稿日期 2006-6-5 收修改稿日期 2006-10-11
Received June 5, 2006; in revised form October 11, 2006
国家科技攻关计划资助项目 (2001BA204B01) 资助
Supported by National Science and Technology Pursuit Project of China (2001BA204B01)
1. 大连理工大学电子与信息工程学院先进控制技术研究所 大连 116024
1. Institute of Advanced Control Technology, School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024
DOI: 10.1360/aas-007-0878

时间模型为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\Phi\boldsymbol{x}(k)+\Gamma_0(\tau_k)\boldsymbol{u}(k)+\Gamma_1(\tau_k)\boldsymbol{u}(k-1) \quad (2)$$

其中, $\Phi=\mathrm{e}^{AT}$, $\Gamma_0(\tau_k)=\int_0^{T-\tau_k}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B$, $\Gamma_1(\tau_k)=\int_{T-\tau_k}^{T}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B$. 可以看到由于网络诱导时延 τ_k 是时变的, 所以系数矩阵 $\Gamma_0(\tau_k)$ 和 $\Gamma_1(\tau_k)$ 是时变的. 下面将时变的网络诱导时延建模为系数矩阵的参数不确定性.

$$\begin{aligned}\Gamma_0(\tau_k) &= \int_0^{T-\tau_k}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B=\int_0^{T-T/2-\tau_k'}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B\\ &= \int_0^{T/2}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B+\mathrm{e}^{A(T/2)}\int_0^{-\tau_k'}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\tau_k) &= \int_{T-\tau_k}^{T}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B=\int_{T-T/2-\tau_k'}^{T}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B\\ &= \int_{T/2}^{T}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B+\mathrm{e}^{A(T/2)}\int_0^{-\tau_k'}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot(-B)\end{aligned}$$

设 $\bar{F}(\tau_k')=\int_0^{-\tau_k'}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s$, $\delta=\max\limits_{\tau_k'\in[-T/2,T/2]}\|\bar{F}(\tau_k')\|_2=\max\limits_{\tau_k'\in[-T/2,T/2]}\|\int_0^{-\tau_k'}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\|_2$ $=$ $\|\int_0^{T/2}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\|_2$, $\Gamma_0=\int_0^{T/2}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B$, $\Gamma_1=\int_{T/2}^{T}\mathrm{e}^{As}\mathrm{d}s\cdot B$, $D=\delta\mathrm{e}^{A(T/2)}$, $E_0=B$, $E_1=-B$, $F(\tau_k')=\delta^{-1}\bar{F}(\tau_k')$, 则式 (2) 中的系数矩阵 $\Gamma_0(\tau_k)$ 和 $\Gamma_1(\tau_k)$ 可化为

$$\Gamma_0(\tau_k)=\Gamma_0+DF(\tau_k')E_0,\quad \Gamma_1(\tau_k)=\Gamma_1+DF(\tau_k')E_1$$

其中 $F(\tau_k')$ 满足: $F^{\mathrm{T}}(\tau_k')F(\tau_k')=\delta^{-2}\bar{F}^{\mathrm{T}}(\tau_k')\bar{F}(\tau_k')\le I$.

下文中为了记号方便将省去 $F(\tau_k')$ 中的 τ_k'. 令增广向量 $\boldsymbol{z}(k)=[\boldsymbol{x}(k)^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{u}(k-1)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 则式 (2) 可化为

$$\boldsymbol{z}(k+1)=\bar{\Phi}_1\boldsymbol{z}(k)+\bar{\Gamma}_1\boldsymbol{u}(k) \quad (3)$$

其中 $\bar{\Phi}_1=\begin{bmatrix}\Phi & \Gamma_1+DFE_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\bar{\Gamma}_1=\begin{bmatrix}\Gamma_0+DFE_0\\ I\end{bmatrix}$.

如果网络控制系统中的控制器采用状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}(k)=K\boldsymbol{z}(k)$, 则闭环网络控制系统的状态方程为

$$\boldsymbol{z}(k+1)=\tilde{\Phi}_1\boldsymbol{z}(k) \quad (4)$$

其中, $\tilde{\Phi}_1=\hat{\Phi}_1+\hat{\Gamma}_1K+\hat{D}F(\hat{E}_1+E_0K)$, $\hat{\Phi}_1=\begin{bmatrix}\Phi & \Gamma_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\hat{\Gamma}_1=\begin{bmatrix}\Gamma_0\\ I\end{bmatrix}$, $\hat{D}=\begin{bmatrix}D\\ 0\end{bmatrix}$, $\hat{E}_1=\begin{bmatrix}0 & E_1\end{bmatrix}$.

数据通过网络传输时, 除了存在网络诱导时延外, 还可能由于受到干扰或者发生网络拥塞而产生数据包丢失. 如果发生数据包丢失, 发送节点将根据所采用的通讯协议采取不同的措施. 例如, 如果网络节点采用的是基于连接的 TCP 协议, 发送节点将重新传输丢失的数据包; 而如果网络节点采用的是 UDP 协议, 由于 UDP 协议是基于无连接的, 所以如果数据包丢失, 发送节点不会重传丢失的数据包. 对于控制系统而言, 重新传输的丢失数据已经不能反映被控对象的真实状态, 因此网络节点通常采用 UDP 协议[10], 当发生数据包丢失时, 执行器保持前一时刻的值, 即 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{u}(k-1)$, 则开环网络控制系统的状态方程为

$$\boldsymbol{z}(k+1)=\tilde{\Phi}_2\boldsymbol{z}(k) \quad (5)$$

其中 $\tilde{\Phi}_2=\begin{bmatrix}\Phi & \Gamma_0+\Gamma_1\\ 0 & I\end{bmatrix}$.

在通信网络中, 数据传输通常具有突发性, 即在传输过程中一个数据丢失后, 下一个数据丢失的概率大于成功传输的概率, 这种特性通常用一个如图 2 所示的具有两个状态的马尔可夫链来描述[8], 其中, $\sigma(k)=1$ 表示数据通过网络传输时没有丢失, 系统处于闭环状态; $\sigma(k)=2$ 表示数据通过网络传输时丢失, 系统处于开环状态. 马尔可夫链的状态转移概率矩阵为 $P=[p_{ij}]$, $p_{ij}=\Pr\{\sigma(k+1)=j|\sigma(k)=i\}$, $\forall\, i,j\in\{1,2\}$, $p_{ij}\ge 0$, $\sum\limits_{j=1}^{2}p_{ij}=1$.

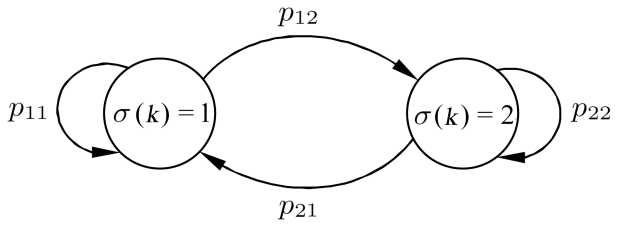

图 2　具有两个状态的马尔可夫链丢包模型

Fig. 2　Two-state Markov chain dropout model

这样, 网络控制系统可以用如下具有两种运行模式的离散时间马尔可夫跳变线性系统来描述

$$\boldsymbol{z}(k+1)=\tilde{\Phi}_{\sigma(k)}\boldsymbol{z}(k),\quad \sigma(k)\in S=\{1,2\} \quad (6)$$

上面假设网络诱导时延小于一个采样周期. 在某些情况下, 网络诱导时延也可能大于一个采样周期, 可以描述为[5]: $\tau_k=(d-1)T+T/2+\tau_k'\le\bar{d}T$, 其中 $d\le\bar{d}=\lceil\tau^{wc}/T\rceil$, $\lceil\Delta\rceil$ 表示大于 Δ 的最小整数, τ^{wc} 为已知的最坏情况下的时延, $-T/2\le\tau_k'\le T/2$. 设增广向量 $\boldsymbol{z}(k)=[\boldsymbol{x}(k)^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{u}(k-d)^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{u}(k-1)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 当网络诱导时延大于一个采样周期时, 网络控制系统同样也可以用如下具有两种运行模式的离散时间马尔可夫跳变线性系统来描述

$$\boldsymbol{z}(k+1)=\tilde{\Phi}_{\sigma(k)}\boldsymbol{z}(k),\quad \sigma(k)\in S=\{1,2\} \quad (7)$$

其中, $\tilde{\Phi}_1=\hat{\Phi}_1+\hat{D}F\hat{E}+\bar{\Gamma}_1K$, $\tilde{\Phi}_2=\hat{\Phi}_2+\hat{D}F\hat{E}$, $\hat{\Phi}_1=\begin{bmatrix}\Phi & \Gamma_1 & \Gamma_0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & I & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$, $\bar{\Gamma}_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ I\end{bmatrix}$, $\hat{D}=\begin{bmatrix}D\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$, $\hat{\Phi}_2=\begin{bmatrix}\Phi & \Gamma_1 & \Gamma_0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & I & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I\end{bmatrix}$, $\hat{E}=[0\quad E_1\quad E_0\quad\cdots\quad 0\quad 0]$.

3　随机稳定性分析

这一节给出网络控制系统随机稳定的一个充分条件. 首先引入离散时间马尔可夫跳变线性系统的随机稳定性定义:

定义 1[11]**.** 离散时间马尔可夫跳变线性系统 (6) 是随机稳定的 (Stochastically stable), 如果对于每个初始状态

$(\boldsymbol{z}(0),\sigma(0))$, 有 $\mathrm{E}\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{z}(k)\|^2\right]<\infty$.

引理 1[12]. 给定具有相应维数的矩阵 W, D 和 E, 其中 W 为对称阵. 对于所有满足 $F^{\mathrm{T}}F\le I$ 的矩阵 F, $W+DFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}<0$ 当且仅当存在 $\varepsilon>0$, 使得 $W+\varepsilon DD^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E<0$.

由上一节分析知, 网络控制系统可以建模为具有两个状态的离散时间马尔可夫跳变线性系统, 因此根据马尔可夫跳变线性系统理论[13], 可以得到如下结论:

定理 1. 当网络诱导时延小于一个采样周期时, 网络控制系统 (6) 是随机稳定的, 如果存在对称正定矩阵 X, Y, 矩阵 Z, 正标量 ε, 使得不等式 (8) 和 (9) 成立. 其中保证系统稳定的状态反馈控制器增益矩阵 $K=ZX^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ \hat{\Phi}_1X+\hat{\Gamma}_1Z & \Xi_{22} & * & * \\ \hat{\Phi}_1X+\hat{\Gamma}_1Z & \varepsilon\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}} & \Xi_{33} & * \\ \hat{E}_1X+E_0Z & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix}<0 \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} -Y & * & * \\ \tilde{\Phi}_2Y & -p_{21}^{-1}X & * \\ \tilde{\Phi}_2Y & 0 & -p_{22}^{-1}Y \end{bmatrix}<0 \tag{9}$$

式中, $\Xi_{22}=-p_{11}^{-1}X+\varepsilon\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}}$, $\Xi_{33}=-p_{12}^{-1}Y+\varepsilon\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}}$.

证明. 假设存在对称正定矩阵 X, Y, 矩阵 Z, 正标量 ε 满足式 (8) 和式 (9). 选择 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{z}(k),\sigma(k))=\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}P(\sigma(k))\boldsymbol{z}(k)=\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{z}(k)$, 当 $\sigma(k)=i\in S$ 时, 记 $P(\sigma(k))=P_i$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[V(\boldsymbol{z}(k+1),\sigma(k+1))|\boldsymbol{z}(k),\sigma(k)=i\right]-V(\boldsymbol{z}(k),\sigma(k)=i)\\
&=\sum_{j=1}^{2}\Pr\{\sigma(k+1)=j|\sigma(k)=i\}\boldsymbol{z}(k+1)^{\mathrm{T}}P_j\boldsymbol{z}(k+1)-\\
&\quad\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{z}(k)\\
&=\sum_{j=1}^{2}p_{ij}\boldsymbol{z}(k+1)^{\mathrm{T}}P_j\boldsymbol{z}(k+1)-\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{z}(k)\\
&=\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}[\tilde{\Phi}_i^{\mathrm{T}}(p_{i1}P_1+p_{i2}P_2)\tilde{\Phi}_i-P_i]\boldsymbol{z}(k)\\
&=\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}M_i\boldsymbol{z}(k)
\end{aligned}$$

根据 Schur 补引理, 式 (8) 可化为

$$\begin{bmatrix} -X & * & * \\ \hat{\Phi}_1X+\hat{\Gamma}_1KX & -p_{11}^{-1}X & * \\ \hat{\Phi}_1X+\hat{\Gamma}_1KX & 0 & -p_{12}^{-1}Y \end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}0\\ \hat{D}\\ \hat{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \hat{D}\\ \hat{D}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+$$
$$\varepsilon^{-1}\begin{bmatrix}(\hat{E}_1X+E_0KX)^{\mathrm{T}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{E}_1X+E_0KX & 0 & 0\end{bmatrix}<0$$

根据引理 2, 上式可化为

$$\begin{bmatrix} -X & * & * \\ \hat{\Phi}_1X+\hat{\Gamma}_1KX & -p_{11}^{-1}X & * \\ \hat{\Phi}_1X+\hat{\Gamma}_1KX & 0 & -p_{12}^{-1}Y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \hat{D}\\ \hat{D}\end{bmatrix}F\left[\hat{E}_1X+\right.$$
$$\left.E_0KX \quad 0 \quad 0\right]+\begin{bmatrix}(\hat{E}_1X+E_0KX)^{\mathrm{T}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}F^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ \hat{D}\\ \hat{D}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}<0$$

即

$$\begin{bmatrix} -X & * & * \\ \Pi_{21} & -p_{11}^{-1}X & * \\ \Pi_{31} & 0 & -p_{12}^{-1}Y \end{bmatrix}<0$$

其中 $\Pi_{21}=\Pi_{31}=\hat{\Phi}_1X+\hat{\Gamma}_1KX+\hat{D}F(\hat{E}_1X+E_0KX)$. 设 $P_1=X^{-1}$, $P_2=Y^{-1}$, 上述不等式两边同时乘以 $\mathrm{diag}\{P_1,I,I\}$ 得

$$\begin{bmatrix} -P_1 & * & * \\ \Omega_{21} & -p_{11}^{-1}P_1^{-1} & * \\ \Omega_{31} & 0 & -p_{12}^{-1}P_2^{-1} \end{bmatrix}<0$$

其中 $\Omega_{21}=\Omega_{31}=\hat{\Phi}_1+\hat{\Gamma}_1K+\hat{D}F(\hat{E}_1+E_0K)$. 根据 Schur 补引理得

$$M_1=\tilde{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(p_{11}P_1+p_{12}P_2)\tilde{\Phi}_1-P_1<0$$

按上述推导方式, 由式 (9) 可得

$$M_2=\tilde{\Phi}_2^{\mathrm{T}}(p_{21}P_1+p_{22}P_2)\tilde{\Phi}_2-P_2<0$$

因为 $M_i<0$, 所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[V(\boldsymbol{z}(k+1),\sigma(k+1))|\boldsymbol{z}(k),\sigma(k)=i]-V(\boldsymbol{z}(k),\sigma(k)=i)\\
&\quad=\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}M_i\boldsymbol{z}(k)\le\beta\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k)<0
\end{aligned}$$

其中 $\beta=\max\limits_{i\in S}[\lambda_{\max}(M_i)]<0$. 当 $N\ge1$,

$$\mathrm{E}[V(\boldsymbol{z}(N+1),\sigma(N+1))]-V(\boldsymbol{z}(0),\sigma(0))\le$$
$$\sum_{k=0}^{N}\beta\mathrm{E}[\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k)]$$

即

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N}\mathrm{E}[\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k)]\\
&\quad\le\beta^{-1}[\mathrm{E}[V(\boldsymbol{z}(N+1),\sigma(N+1))]-V(\boldsymbol{z}(0),\sigma(0))]\\
&\quad<-\beta^{-1}V(\boldsymbol{z}(0),\sigma(0))
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{E}[\boldsymbol{z}(k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(k)]<-\beta^{-1}V(\boldsymbol{z}(0),\sigma(0))<\infty$$

即网络控制系统 (6) 是随机稳定的. □

定理 1 可以推广到网络诱导时延大于一个采样周期的情况, 因此有下述推论.

推论. 当网络诱导时延大于一个采样周期时, 网络控制系统 (7) 是随机稳定的, 如果存在对称正定矩阵 X, Y, 矩阵 Z, 正标量 ε_1 和 ε_2, 使得不等式 (10) 和 (11) 成立. 其中保证系统稳定的状态反馈控制器增益矩阵 $K=ZX^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ \hat{\Phi}_1X+\bar{\Gamma}_1Z & \Xi_{22} & * & * \\ \hat{\Phi}_1X+\bar{\Gamma}_1Z & \varepsilon\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}} & \Xi_{33} & * \\ \hat{E}X & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix}<0 \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} -Y & * & * & * \\ \hat{\Phi}_2 Y & -p_{21}^{-1}X+\varepsilon_2\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}} & * & * \\ \hat{\Phi}_2 Y & \varepsilon_2\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}} & -p_{22}^{-1}Y+\varepsilon_2\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}} & * \\ \hat{E}Y & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} <0 \tag{11}$$

式中, $\Xi_{22}=-p_{11}^{-1}X+\varepsilon_1\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}}$, $\Xi_{33}=-p_{12}^{-1}Y+\varepsilon_1\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}}$.

4　仿真示例

假设被控对象的状态方程为[9]

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

传感器采样周期为 1 秒, 网络诱导时延在区间 $[0,1]$ 秒内随机变化, 如图 3 所示, 马尔可夫链丢包过程 $\sigma(k)$ 如图 4 所示, 其状态转移概率矩阵为 $P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.6 & 0.4\end{bmatrix}$.

根据定理 1, 求解不等式 (8) 和 (9) 得

$$X=\begin{bmatrix}1011.8 & -702.87 & -210.54 & -78.484\\ -702.87 & 842.68 & -548.27 & -63.051\\ -250.14 & -548.27 & 4632.7 & 11.338\\ -78.484 & -63.051 & 11.338 & 119.41\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}704.08 & -466.82 & -240.32 & -40.382\\ -466.82 & 599.54 & -213.53 & -48.373\\ -240.32 & -213.53 & 3388.8 & -31.545\\ -40.382 & -48.373 & -31.545 & 38.431\end{bmatrix}$$

$$Z=\begin{bmatrix}-56.438 & -61.913 & 41.958 & 44.217\end{bmatrix},\ \varepsilon=89.669.$$

进而可求得控制器的增益矩阵 $K=[-0.3797\ -0.4368\ -0.0596\ -0.1042]$. 假设被控对象的初始状态为 $[0\ 2\ 1]^{\mathrm{T}}$, 在上述控制律的作用下, 被控对象的状态运动轨迹如图 5 所示, 从图中可以看出, 即使存在随机网络诱导时延和数据包丢失, 被控对象也能够达到稳定状态.

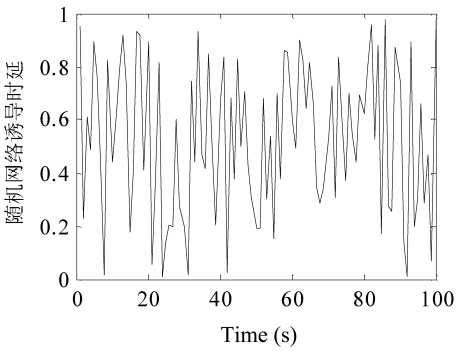

图 3　随机网络诱导时延

Fig. 3　Stochastic network-induced delay

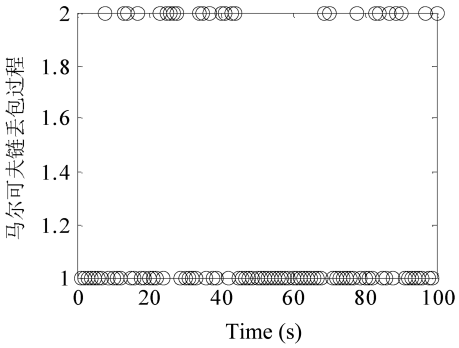

图 4　马尔可夫链丢包过程

Fig. 4　Data packet dropout process governed by Markov chain

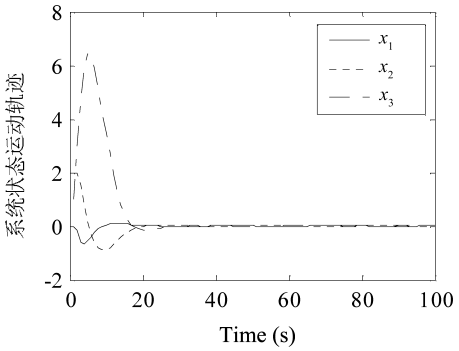

图 5　系统状态运动轨迹

Fig. 5　Trajectory of system states

5　结论

数据在带宽有限的网络上传输时, 不仅具有网络诱导时延, 而且可能存在一定程度的数据包丢失. 本文分析了随机网络诱导时延和马尔可夫链数据包丢失对网络控制系统的性能影响, 将网络控制系统建模为具有两个状态的马尔可夫跳变线性系统, 给出了基于线性矩阵不等式的网络控制系统随机稳定的充分条件, 并且保证系统稳定的状态反馈控制器可以利用 Matlab 中的线性矩阵不等式工具箱很容易的求出.

References

1 Nicholas J P, Palu A K, Andrew G A. Closed-loop control over wireless networks. *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, **24**(3): 58∼71

2 Tipsuwan Y, Chow M Y. Control methodologies in networked control systems. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**(10): 1099∼1111

3 Hokayem P F, Abdallah C T. Inherent issues in networked control systems: a survey. In: Proceedings of the American Control Conference. IEEE, 2004. 4897∼4902

4 Xie G M, Wang L. Stabilization of networked control systems with time-varying network-induced delay. In: Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2004. 3551∼3556

5 Li S B, Wang Z, Sun Y X. Delay-dependent controller design for networked control systems with long time delays: an iterative LMI method. In: Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. IEEE, 2004. 1338∼1342

6 Zhang W, Branicky M S, Phillips S M. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, **21**(1): 84∼99

7 Fan Wei-Hua, Cai Hua, Wu Xiao-Bei, Hu Wei-Li. Stability of networked control systems with time delay and data packet dropout. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2004, **28**(5): 465∼468
(樊卫华, 蔡骅, 吴晓蓓, 胡维礼. 具有延时和数据包丢失的网络控制系统的稳定性. 南京理工大学学报, 2004, **28**(5): 465∼468)

8 Paul A K, Andrew G A. Stability and feedback control of wireless networked systems. In: Proceedings of the American Control Conference. IEEE, 2005. 2953∼2959

9 Pete S, Raja S. Analysis of communication losses in vehicle control problems. In: Proceedings of American Control Conference. Arlington, IEEE, 2001. 1491∼1496

10 Babak A Z. Stability of networked control systems in the presence of packet losses. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2003. 676∼681

11 Ji Y, Chizeck H J, Feng X, Loparo K A. Stability and control of discrete-time jump linear systems. *Control Theory and Advanced Technology*, 1991, **7**(2): 247∼270

12 Wang Y, Xie L, De Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 1992, **19**(3): 139∼149

13 Shi P, Boukas E K, Agarwal R K. Robust control for Markovian jumping disctete-time systems. *Internatinal Journal of Systems Science*, 1999, **30**(8): 787∼797

马卫国 大连理工大学电子与信息工程学院先进控制技术研究所博士研究生. 主要研究方向为网络控制系统. 本文通信作者.
E-mail: maweiguodut@gmail.com
(**MA Wei-Guo** Ph. D. candidate at Institute of Advanced Control Technology, School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology. His research interest is networked control systems. Corresponding author of this paper.)

邵 诚 大连理工大学电子与信息工程学院先进控制技术研究所教授. 主要研究方向为鲁棒自适应控制, 智能学习控制和化工过程优化控制.
E-mail: cshao@dlut.edu.cn
(**SHAO Cheng** Professor at Institute of Advanced Control Technology, School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology. His research interest covers robust adaptive control, intelligent learning control, and optimizing control for chemical processes.)