



通信链路故障下高阶非匹配非线性MAS领导跟随一致性

游秀 张红 梁吉业

Leader-following Consensus for High-order Unmatched Nonlinear Multi-agent Systems With Communication Link Faults

YOU Xiu, ZHANG Hong, LIANG Ji-Ye

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16383/j.aas.c240644>

您可能感兴趣的其他文章

基于线性变换的领导跟随多智能体系统动态反馈均方一致性控制

Dynamic Feedback Mean Square Consensus Control Based on Linear Transformation for Leader-follower Multi-agent Systems

自动化学报. 2022, 48(10): 2474–2485 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c200850>

通信受限的多智能体系统二分实用一致性

Bipartite Practical Consensus Control of Multi-agent Systems With Communication Constraints

自动化学报. 2022, 48(5): 1318–1326 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c200600>

非匹配扰动下的多智能体系统固定时间一致跟踪

Fixed-time Consensus Tracking of Multi-agent Systems Under Unmatched Disturbances

自动化学报. 2021, 47(6): 1368–1376 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190339>

无控制器间通信的线性多智能体一致性的降阶协议

A Reduced-order Protocol for Linear Multi-agent Consensus Without Inter-controller Communication

自动化学报. 2023, 49(9): 1836–1844 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c220420>

基于PI结构的多智能体系统容错一致性控制

Fault-tolerant Consensus Control of Multi-agent Systems Based on PI Structure

自动化学报. 2025, 51(3): 570–576 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c240474>

切换拓扑下动态事件触发多智能体系统固定时间一致性

Dynamic Event-triggered Fixed-time Consensus Control of Multi-agent Systems Under Switching Topologies

自动化学报. 2023, 49(6): 1295–1305 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c211123>

通信链路故障下高阶非匹配非线性 MAS 领导跟随一致性

游秀¹ 张红¹ 梁吉业¹

摘要 研究通信链路故障下一类高阶非匹配非线性多智能体系统的领导跟随一致性控制问题. 为处理非匹配非线性项和通信链路故障, 提出一种基于三个在线调节动态参数的补偿器. 然后, 仅使用局部补偿信息, 设计一个完全分布式控制器以保证系统的领导跟随一致性, 并以矩阵不等式的形式给出确定控制增益和补偿器参数的充分条件. 最后通过仿真实验验证了所提结论的有效性.

关键词 多智能体系统, 非匹配非线性, 通信链路故障, 领导跟随一致性

引用格式 游秀, 张红, 梁吉业. 通信链路故障下高阶非匹配非线性 MAS 领导跟随一致性. 自动化学报, 2025, 51(6): 1320–1328

DOI 10.16383/j.aas.c240644 **CSTR** 32138.14.j.aas.c240644

Leader-following Consensus for High-order Unmatched Nonlinear Multi-agent Systems With Communication Link Faults

YOU Xiu¹ ZHANG Hong¹ LIANG Ji-Ye¹

Abstract This paper investigates the leader-following consensus control problem for a class of high-order unmatched nonlinear multi-agent systems with communication link faults. To deal with the unmatched nonlinear and communication link faults, a new compensator with three online tuned dynamic gains is proposed. Then, using only the local compensation information, a fully distributed consensus controller is designed to guarantee the leader-following consensus. Sufficient conditions in terms of matrix inequalities are derived to determine control gains and compensator parameters. Simulation studies are presented to demonstrate the validity of the proposed theoretical results.

Key words Multi-agent systems, unmatched nonlinearity, communication link faults, leader-following consensus

Citation You Xiu, Zhang Hong, Liang Ji-Ye. Leader-following consensus for high-order unmatched nonlinear multi-agent systems with communication link faults. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(6): 1320–1328

近年来, 多智能体系统 (Multi-agent system, MAS) 一致性控制在无线传感器网络^[1]、机器人编队^[2]、多机械臂协同装配^[3]、协同诊断系统^[4]等领域的应用日益增多, 受到研究者越来越多的关注. 相比于单个系统, 多智能体系统能够通过相互协调与合作^[5], 完成单一智能体难以完成的任务, 因而具有广阔的应用前景. 一致性问题作为智能体之间合作协调控制的基础, 具有重要的现实意义和理论价值. 因此研究多智能体系统协同中的一致性控制问题具有重要的实际意义.

在实际应用中, 大量实际系统的动力学特性往往是由复杂的非线性方程刻画的^[6], 因此这些系统的动力学模型具有非匹配非线性结构特性. 目前, 针对非匹配非线性多智能体系统的一致性控制研究已经取得大量的研究成果^[7–9]. 文献 [10] 研究严格反馈高阶非线性多智能体系统的一致性问题, 通过递归方法将传统的严格反馈系统转化为高阶全驱动模型, 并基于此设计完全分布式一致性控制算法. 文献 [11] 针对高阶非匹配非线性多智能体系统, 通过引入一致性误差的光滑函数补偿项, 提出一种新的基于反步法的分布式自适应控制方案. 文献 [12] 研究一类严格反馈高阶非线性多智能体系统的一致性问题, 通过在反步控制方法中的每一步引入局部补偿变量, 设计分布式自适应一致性控制器. 文献 [13] 针对高阶非匹配非线性多智能体系统, 提出鲁棒自适应神经网络一致性控制器, 保证系统的领导跟随一致性. 文献 [14] 研究高阶严格反馈非线性多智能体系统的分布式一致性跟踪控制问题, 基于分布式动态曲面设计方法设计局部一致性控制器. 然而文

收稿日期 2024-09-29 录用日期 2025-02-14

Manuscript received September 29, 2024; accepted February 14, 2025

国家自然科学基金 (62373232, 62376141), 山西省基础研究计划 (202403021224004), 山西大学“文瀛青年学者”人才计划资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62373232, 62376141), Fundamental Research Program of Shanxi Province (202403021224004), and Wenying Young Scholar Talent Program of Shanxi University

本文责任编辑 杨涛

Recommended by Associate Editor YANG Tao

1. 山西大学计算机与信息技术学院 太原 237016

1. School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 237016

献 [10–14] 提出的控制算法都依赖于一个稳定的通信系统, 提出的控制协议对于通信故障下的一致性不再适用。

多智能体系统与单个个体系统最本质的区别在于其通过网络进行状态信息的传递与共享^[15]。然而在实际应用中, 通信网络环境往往并不理想, 通信链路可能因为多种原因 (如信号干扰、硬件故障等) 出现故障, 从而导致控制失效和潜在的严重后果。因此, 在多智能体系统一致性控制中, 考虑并解决通信链路故障带来的系统控制失效问题具有重要意义^[16–18]。文献 [19] 针对通信链路故障下高阶线性多智能体系统, 基于 H_∞ 准则设计分布式自适应一致性控制器。文献 [20] 研究通信故障下高阶线性多智能体系统的一致性控制问题, 通过引入改进的代数黎卡提方程, 提出一种鲁棒分布式控制协议。文献 [21] 针对通信故障下的高阶非线性多智能体系统, 通过设计领导者状态观测器自适应地调整相邻代理之间的链路权重, 抵消通信链路故障的影响, 进而提出鲁棒分布式自适应一致性控制器。文献 [22] 针对通信链路故障下的高阶非线性多智能体系统, 基于神经网络设计一种自适应容错控制方案, 保证非线性多智能体系统的领导跟随一致性。然而文献 [19–22] 对通信故障下多智能体系统一致性控制问题的研究, 大都聚焦于线性或匹配非线性系统, 忽略了对于实际系统普遍存在的非匹配非线性特性的考虑。

基于此, 本文研究通信故障下高阶非匹配非线性多智能体系统的一致性控制问题。通过提出一种新颖的基于动态补偿器的分布式一致性控制器, 保证了非匹配非线性多智能体系统的渐近领导跟随一致性。本文的主要贡献总结如下: 1) 考虑更适用于描述实际多智能体系统动力学特性的非匹配非线性系统模型, 同时考虑时变通信故障。这能包含已有通信故障一致性控制工作中考虑的线性或匹配非线性系统模型为特例。2) 通过引入在线调节的动态增益, 设计一种基于状态一致性误差的补偿器, 以克服非匹配非线性项及其非线性耦合和时变故障。3) 基于补偿器状态信息, 提出一种完全分布式的状态反馈一致性控制器, 保证通信故障下的领导跟随渐近一致性。值得注意的是所设计的补偿器状态信息无需在通信网络中进行传输。

符号说明。 在本文中, 如果没有特别说明, 则假定所给出的矩阵和向量具有合适的维数。 \mathbf{R}^n 表示 n 维实数向量集。 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 实数矩阵集。 \mathbf{I}_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵。 \otimes 表示克罗内克积。 $\mathbf{1}_N \in \mathbf{R}^N$ 是一个所有分量都为 1 的列向量。 $\|\cdot\|$ 表示一个矩阵的 Euclidean 范数。 $\|\cdot\|_F$ 表示一个矩阵的 Frobenius 范数。对于任意的一个矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\sigma_{\min}(\mathbf{A})$

和 $\sigma_{\max}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 最小和最大的奇异值。

1 问题描述

考虑由 $N + 1$ ($N \geq 1$) 个高阶非匹配非线性智能体组成的多智能体系统, 其中包括 N 个跟随智能体和 1 个领导智能体, 其第 i ($i = 0, 1, \dots, N$) 个智能体的系统动力学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,m} &= x_{i,m+1} + f_m(\bar{x}_{i,m}), \quad m = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{i,n} &= u_i + f_n(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_i = [x_{i,1}, \dots, x_{i,n}]^T \in \mathbf{R}^n$ 和 $u_i \in \mathbf{R}$ 分别表示系统的状态变量和输入。注意 $\bar{x}_{i,m} = [x_{i,1}, \dots, x_{i,m}]^T \in \mathbf{R}^m$ 且 $u_0 = 0$ 。对于 $m = 1, \dots, n$, $f_m(\cdot): \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ 为非线性函数且满足以下假设条件:

假设 1. 对于任意的向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ 和 $m = 1, \dots, n$, 存在一个未知的正常数 α 使得 $|f_m(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{y})| \leq \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 。

在本文中, 使用有向图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 表示智能体间的通信关系, 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$ 表示对应于跟随智能体的索引集合, \mathcal{E} 表示智能体相邻关系的边集合, 描述了跟随智能体间的信息交换。 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 表示存在一条从智能体 i 到智能体 j 的边, 即智能体 j 能收到智能体 i 的通信信息。 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} \mid (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 定义了智能体 i 的邻居集合。定义通信拓扑图 \mathcal{G} 的邻接矩阵为 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, 其中如果 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 有 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。因为智能体无自连接, 有 $a_{ii} = 0$ 。定义入度矩阵为 $\mathbf{D} = \text{diag}\{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}\}$ 。那么, 拉普拉斯矩阵定义为 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ 。另外, 用矩阵 \mathbf{B} 描述通信拓扑图 \mathcal{G} 中可以直接接收到领导智能体状态信息的跟随智能体的情况, 其定义为 $\mathbf{B} = \text{diag}\{b_1, \dots, b_N\}$ 。当且仅当领导智能体与第 i 个跟随智能体有通信关系时, 有 $b_i > 0$ 。显然, 在一个有领导智能体的多智能体系统中, 为了实现跟随智能体与领导智能体的状态一致性, 应该至少有一个跟随智能体与领导智能体有通信关系, 即至少有一个 $b_i > 0$ 。假设领导智能体由节点 0 表示, 那么, 可以得到一个由拓扑图 \mathcal{G} , 节点 0 和领导智能体与跟随智能体之间的边组成的增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 。 $\bar{\mathcal{G}}$ 能够反映一个通信网络中, 所有智能体间的通信关系。关于通信拓扑, 有如下假设:

假设 2. \mathcal{G} 是固定的有向图, 其增广图 $\bar{\mathcal{G}}$ 包含一个以领导智能体 0 为根节点的生成树。

在本文中, 考虑通信拓扑 $\bar{\mathcal{G}}$ 中的通信链路处于未知时变故障状态。因此, 存在故障的通信链路可以描述为

$$\begin{cases} \bar{a}_{ij}(t) = a_{ij} + \omega_{ij}^a(t) \\ \bar{b}_i(t) = b_i + \omega_i^b(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 a_{ij} 和 b_i 为上述给出的无故障通信链路权重. $\omega_{ij}^a(t)$ 和 $\omega_i^b(t)$ 为通信故障引起的通信链路权重损坏. $\omega_{ij}^a(t)$ 和 $\omega_i^b(t)$ 的存在使得整体通信链路权重时变且未知, 这种不确定性给非匹配非线性多智能体系统的一致性控制带来挑战. 此外, 在通信故障 (2) 下, 拉普拉斯矩阵变为 $\mathcal{L}(t) = \mathcal{D}(t) - \mathcal{A}(t)$, 其中邻接矩阵 $\mathcal{A}(t) = [a_{ij}(t)]$, 入度矩阵 $\mathcal{D}(t) = \text{diag}\{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t)\}$. 领导智能体邻接矩阵变为 $\mathcal{B}(t) = \text{diag}\{b_1(t), \dots, b_N(t)\}$. 对于考虑的通信故障 (2), 假设其满足如下条件:

假设 3^[21]. 通信链路故障 $\omega_{ij}^a(t)$ 和 $\omega_i^b(t)$ 及其导数有界.

假设 4^[21]. 在通信链路故障描述 (2) 中, $\bar{a}_{ij}(t)$ 和 $\bar{b}_i(t)$ 的符号分别与 a_{ij} 和 b_i 的符号相同.

下面, 将给出两个引理, 其对本文的理论分析具有重要作用.

引理 1. 令向量 $\mathcal{B} = [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbf{R}^n$ 和矩阵 $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}$. 那么, 存在向量 $\kappa = [\kappa_1, \dots, \kappa_n]^T \in \mathbf{R}^n$, 正定矩阵 \mathcal{S} 和正常数 ι_0 使得

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}\kappa^T)^T \mathcal{S} + \mathcal{S}(\mathcal{A} + \mathcal{B}\kappa^T) \leq -\iota_0 \mathcal{S} \quad (3)$$

进一步, 令矩阵 $\mathbf{\Pi} = \text{diag}\{0, 1, \dots, n-1\} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 那么存在正常数 ι_1, ι_2 和 h 使得

$$\begin{cases} \iota_1 \mathbf{I}_n \leq \mathcal{S} \leq \iota_2 \mathbf{I}_n \\ -h \mathcal{S} \leq \mathbf{\Pi}^T \mathcal{S} + \mathcal{S} \mathbf{\Pi} \leq h \mathcal{S} \end{cases} \quad (4)$$

证明. 显然, 矩阵对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 为可控矩阵. 因此, 存在向量 $\kappa = [\kappa_1, \dots, \kappa_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 使得矩阵 $\mathcal{A} + \mathcal{B}\kappa^T$ 为赫尔维兹矩阵. 基于此, 上述矩阵不等式 (3) 显然成立. 此外, 可以很容易获得不等式 (4) 成立, 其证明过程在此不再赘述. \square

引理 2^[21]. 如果假设 2 和假设 4 满足, 那么存在一个正定对角矩阵 $\mathcal{Q}(t)$, 使得 $\mathcal{Q}(t)\mathcal{H}(t) + \mathcal{H}^T(t)\mathcal{Q}(t) = \mathcal{P}(t)$, 其中 $\mathcal{P}(t)$ 是正定矩阵, $\mathcal{H}(t) = \mathcal{L}(t) + \mathcal{B}(t)$ 是通信图拓扑相关矩阵. 此外, 如果假设 3 也满足, 那么 $\mathcal{Q}(t)$ 及其导数有界. 一般的正定对角矩阵 $\mathcal{Q}(t)$ 可选择为 $\mathcal{Q}(t) = \text{diag}\{q_1(t), \dots, q_N(t)\}$, 其中 $q(t) = [q_1(t), \dots, q_N(t)]^T = (\mathcal{H}(t))^{-1} \mathbf{1}_N$.

注 1. 假设 3 和假设 4 共同保证了原本能够相互通信的智能体之间发生故障之后还能够继续通信, 通信的权重可能变大或变小, 但是变化的幅度

不能过大.

2 通信链路故障下一致性控制器设计

在本文中, 考虑通信链路故障 (2) 下高阶非匹配非线性多智能体系统 (1) 的领导跟随一致性问题. 针对通信链路故障, 提出了一种具有三个在线调节动态增益的一致性控制器, 以保证多智能体系统的渐近领导跟随一致性, 即对于 $i = 1, \dots, N$ 和 $m = 1, \dots, n$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_{i,m} - x_{0,m}| = 0$.

由于每个智能体系统只能获得其邻居智能体的状态信息, 因此对于智能体 i , 其在通信链路故障下可获得的实时局部一致性误差为

$$e_{i,m}(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{a}_{ij}(t)(x_{i,m} - x_{j,m}) + \bar{b}_i(t)(x_{i,m} - x_{0,m}) \quad (5)$$

在下文中, 为了便于描述, 用 $e_{i,m}$ 来表示 $e_{i,m}(t)$. 基于此, 设计第 i 个智能体的分布式动态一致性控制器为

$$\begin{cases} \dot{z}_{i,m} = z_{i,m+1} - (\dot{\gamma}_i + \gamma_i) \sigma_{i,m} \\ \dot{z}_{i,n} = u_i - (\dot{\gamma}_i + \gamma_i) \sigma_{i,n} \\ u_i = \sum_{m=1}^n L_i^{n-m+1} \kappa_m z_{i,m} \end{cases} \quad (6)$$

其中 $z_{i,m}$, $m = 1, \dots, n$ 为所设计的补偿器系统的状态变量; $\sigma_{i,m} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{a}_{ij}(t)(z_{i,m} - z_{j,m}) + \bar{b}_i(t)z_{i,m} - e_{i,m}$; κ_m , $m = 1, \dots, n$ 为由引理 1 提供的参数; L_i 和 γ_i ($\gamma_i(0) > 0$) 为两个动态参数, 其自适应更新律将在下面给出. 基于此, 可得到如下结论:

定理 1. 考虑通信链路故障 (2) 下的高阶非匹配非线性多智能体系统 (1), 并且其满足假设条件 1~4. 设计基于补偿器的分布式一致性控制器为 (6), 其中动态参数 L_i 和 γ_i 的更新律设计为

$$\begin{cases} \dot{L}_i = \varsigma_i(L_i, t) = \\ \quad - \frac{L_i}{h} \left(\frac{\iota_0(L_i - 1)}{3} - \hat{\theta}_i \right), \quad L_i(0) > 1 \\ \dot{\hat{\theta}}_i = \boldsymbol{\eta}_i^T \mathcal{S} \boldsymbol{\eta}_i, \quad \hat{\theta}_i(0) > 0 \\ \dot{\gamma}_i = \boldsymbol{\delta}_i^T \boldsymbol{\delta}_i \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\varsigma_i(L_i, t)$ 是关于动态参数 L_i 与时间 t 的函数, 参数 ι_0, h 和矩阵 \mathcal{S} 为引理 1 中给出的正常数和正定矩阵, 向量 $\boldsymbol{\eta}_i = [\eta_{i,1}, \dots, \eta_{i,n}]^T$ 和 $\boldsymbol{\delta}_i = [\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n}]^T$, 其中

$$\begin{cases} \eta_{i,m} = \frac{z_{i,m}}{L_i^{m-1+h}} \\ \delta_{i,m} = \frac{\sigma_{i,m}}{L_i^{m-1+h}}, \quad m = 1, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

那么, 如果引理 1 中的矩阵不等式成立, 则所考虑的通信故障下的高阶非匹配非线性系统能够达到渐近领导跟随一致性.

证明. 对于第 i 个智能体, 定义其与领导智能体之间的跟踪误差为 $\tilde{x}_{i,m} = x_{i,m} - x_{0,m}$. 那么, 根据智能体系统动力学模型 (1) 可得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{i,m} = \tilde{x}_{i,m+1} + \bar{\phi}_{i,m} \\ \dot{\tilde{x}}_{i,n} = u_i + \bar{\phi}_{i,n} \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\bar{\phi}_{i,m} = f_m(\bar{x}_{i,m}) - f_m(\bar{x}_{0,m})$, $m = 1, \dots, n$. 令 $r_{i,m} = z_{i,m} - \tilde{x}_{i,m}$, 根据式 (6) 和 (9) 可得

$$\begin{cases} \dot{r}_{i,m} = r_{i,m+1} - (\dot{\gamma}_i + \gamma_i)\sigma_{i,m} - \bar{\phi}_{i,m} \\ \dot{r}_{i,n} = -(\dot{\gamma}_i + \gamma_i)\sigma_{i,n} - \bar{\phi}_{i,n} \end{cases} \quad (10)$$

令 $\zeta_{i,m} = r_{i,m}/L_i^{m-1+h}$, 基于状态变换 (8), 式 (6) 中的补偿器系统方程和式 (10) 可重写为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{i,m} = L_i\eta_{i,m+1} - (\dot{\gamma}_i + \gamma_i)\delta_{i,m} - \\ \quad (m-1+h)\frac{\dot{L}_i}{L_i}\eta_{i,m} \\ \dot{\eta}_{i,n} = \sum_{m=1}^n L_i\kappa_m\eta_{i,m} - (\dot{\gamma}_i + \gamma_i)\delta_{i,n} - \\ \quad (n-1+h)\frac{\dot{L}_i}{L_i}\eta_{i,n} \end{cases} \quad (11)$$

和

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_{i,m} = L_i\zeta_{i,m+1} - (\dot{\gamma}_i + \gamma_i)\delta_{i,m} - \phi_{i,m} - \\ \quad (m-1+h)\frac{\dot{L}_i}{L_i}\zeta_{i,m} \\ \dot{\zeta}_{i,n} = -(\dot{\gamma}_i + \gamma_i)\delta_{i,n} - \phi_{i,n} - \\ \quad (n-1+h)\frac{\dot{L}_i}{L_i}\zeta_{i,n} \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\phi_{i,m} = \bar{\phi}_{i,m}/L_i^{m-1+h}$. 令 $\eta_i = [\eta_{i,1}, \dots, \eta_{i,n}]^T$, $\zeta_i = [\zeta_{i,1}, \dots, \zeta_{i,n}]^T$, 那么式 (11) 和 (12) 的全局形式可写为

$$\dot{\eta}_i = L_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}\kappa^T)\eta_i - (\dot{\gamma}_i + \gamma_i)\delta_i - \frac{\dot{L}_i}{L_i}\tilde{\Pi}\eta_i \quad (13)$$

和

$$\dot{\zeta}_i = L_i\mathbf{A}\zeta_i - (\dot{\gamma}_i + \gamma_i)\delta_i - \phi_i - \frac{\dot{L}_i}{L_i}\tilde{\Pi}\zeta_i \quad (14)$$

其中 $\phi_i = [\phi_{i,1}, \dots, \phi_{i,n}]^T$, 矩阵 $\tilde{\Pi} = \text{diag}\{h, 1+h, \dots, n-1+h\}$, 向量 \mathbf{B} , κ 和矩阵 \mathbf{A} 的定义在引理 1 中给出. 进一步, 令 $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_N]^T$, 则式 (14) 可重写为

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= (\mathbf{L} \otimes \mathbf{A})\zeta - ((\dot{\gamma} + \gamma) \otimes \mathbf{I}_n)\delta - \\ &\quad \phi - (\tilde{\mathbf{L}} \otimes \tilde{\Pi})\zeta \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_N]^T$, $\mathbf{L} = \text{diag}\{L_1, \dots, L_N\}$, $\gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$, $\tilde{\mathbf{L}} = \text{diag}\{\frac{\dot{L}_1}{L_1}, \dots, \frac{\dot{L}_N}{L_N}\}$, $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_N]^T$, δ_i , $i = 1, \dots, N$ 的定义在定理 1 中给出, \mathbf{I}_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵, \otimes 表示克罗内积.

由式 (6) 可知 $\sigma_{i,m} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{a}_{ij}(t)(z_{i,m} - z_{j,m}) + \bar{b}_i(t)z_{i,m} - e_{i,m}$, 结合式 (5) 和式 (8) 可得

$$\begin{aligned} \delta_{i,m} &= \frac{\sigma_{i,m}}{L_i^{m-1+h}} = \\ &= \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{a}_{ij}(t)(r_{i,m} - r_{j,m}) + \bar{b}_i(t)r_{i,m}}{L_i^{m-1+h}} = \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{a}_{ij}(t)(\zeta_{i,m} - \zeta_{j,m}) + \bar{b}_i(t)\zeta_{i,m} \end{aligned}$$

将其写成全局形式可得 $\delta = ((\mathbf{L}(t) + \mathbf{B}(t)) \otimes \mathbf{I}_n)\zeta = (\mathbf{H}(t) \otimes \mathbf{I}_n)\zeta$, 其中 $\mathbf{L}(t)$ 和 $\mathbf{B}(t)$ 是上述给出的通信拓扑相关矩阵. 因此, 可得关于 δ 的动态特性方程为

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= (\mathbf{H}(t) \otimes \mathbf{I}_n)\dot{\zeta} + (\dot{\mathbf{H}}(t) \otimes \mathbf{I}_n)\zeta = \\ &= (\mathbf{L} \otimes \mathbf{A})\delta - (\mathbf{H}(t) \otimes \mathbf{I}_n)\phi - (\tilde{\mathbf{L}} \otimes \tilde{\Pi})\delta - \\ &= ((\mathbf{H}(t)(\dot{\gamma} + \gamma)) \otimes \mathbf{I}_n)\delta + (\dot{\mathbf{H}}(t) \otimes \mathbf{I}_n)\zeta \end{aligned} \quad (16)$$

基于上述讨论, 对于闭环系统 (16) 构造 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \sum_{i=1}^N \left((\dot{\gamma}_i + 2\gamma_i)q_i(t)\delta_i^T\delta_i + (\gamma_i - \gamma^*)^2 \right) \quad (17)$$

其中 $q_i(t)$ 的定义在引理 2 中给出, γ^* 是一个在后文会确定的常数. 那么, 基于式 (7) 和 (16) 对 V_1 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 4\delta^T(((\dot{\gamma} + \gamma)\mathbf{Q}(t)) \otimes \mathbf{I}_n)\dot{\delta} - 2\gamma^*\delta^T\delta + \\ &= 2\delta^T((\dot{\gamma}\mathbf{Q}(t)) \otimes \mathbf{I}_n)\delta + 2\delta^T(\gamma \otimes \mathbf{I}_n)\delta + \\ &= \delta^T\left(\left((\dot{\gamma} + 2\gamma)\dot{\mathbf{Q}}(t)\right) \otimes \mathbf{I}_n\right)\delta = \\ &= 4\delta^T(((\dot{\gamma} + \gamma)\mathbf{Q}(t)\mathbf{L}) \otimes \mathbf{A})\delta - \\ &= 4\delta^T(((\dot{\gamma} + \gamma)\mathbf{Q}(t)\mathbf{H}(t)(\dot{\gamma} + \gamma)) \otimes \mathbf{I}_n)\delta - \\ &= 4\delta^T(((\dot{\gamma} + \gamma)\mathbf{Q}(t)\mathbf{H}(t)) \otimes \mathbf{I}_n)\phi - \\ &= 4\delta^T\left(\left((\dot{\gamma} + \gamma)\mathbf{Q}(t)\tilde{\mathbf{L}}\right) \otimes \tilde{\Pi}\right)\delta - 2\gamma^*\delta^T\delta + \\ &= 4\delta^T\left(\left((\dot{\gamma} + \gamma)\mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{H}}(t)\right) \otimes \mathbf{I}_n\right)\zeta + \\ &= 2\delta^T((\dot{\gamma}\mathbf{Q}(t)) \otimes \mathbf{I}_n)\delta + 2\delta^T(\gamma \otimes \mathbf{I}_n)\delta + \\ &= \delta^T\left(\left((\dot{\gamma} + 2\gamma)\dot{\mathbf{Q}}(t)\right) \otimes \mathbf{I}_n\right)\delta \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\mathbf{Q}(t) = \text{diag}\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\}$ 如引理 2 所示, 矩阵 \mathbf{A} 的定义在引理 1 中给出, 矩阵 $\tilde{\Pi}$ 和 \mathbf{L} , $\tilde{\mathbf{L}}$ 如式 (14) 和 (15) 所示, $\mathbf{H}(t) = \mathbf{L}(t) + \mathbf{B}(t)$. 在下

面, 将给出式 (18) 右边每一项的估计.

令 $\lambda_1 = \max_{\forall t \geq 0} 2\|Q(t)\|_F$, $\lambda_2 = 2\lambda_1\|A\|_F$, $\nu = \max\{L_1, \dots, L_N\}$, 可得

$$\begin{aligned} & 4\delta^T (((\dot{\gamma} + \gamma) Q(t)L) \otimes A) \delta = \\ & 4\delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma) \otimes I_n) ((Q(t)L) \otimes A) \delta \leq \\ & 2\nu\lambda_1\|A\|_F \|\delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma) \otimes I_n)\| \|\delta\| \leq \\ & \nu\lambda_2 \|\delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma) \otimes I_n)\| \|\delta\| \leq \\ & \frac{\lambda_0}{4} \delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes I_n) \delta + \frac{\nu^2\lambda_2^2}{\lambda_0} \delta^T \delta \end{aligned} \quad (19)$$

其中可取 $\lambda_0 = \min_{\forall t \geq 0} \sigma_{\min}(P(t))$, 矩阵 $P(t) = Q(t)H(t) + H^T(t)Q(t)$ 如引理 2 所示. 进一步基于此, 可得

$$\begin{aligned} & -4\delta^T (((\dot{\gamma} + \gamma) Q(t)H(t)(\dot{\gamma} + \gamma)) \otimes I_n) \delta = \\ & -2\delta^T (((\dot{\gamma} + \gamma) P(t)(\dot{\gamma} + \gamma)) \otimes I_n) \delta \leq \\ & -2\lambda_0\delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes I_n) \delta \end{aligned} \quad (20)$$

为了进行下面的推导, 首先证明在更新律 (7) 下, 动态参数 L_i 始终大于 1. 根据式 (7), 可得对于所有的 $t \geq 0$ 有 $\varsigma_i(1, t) \geq 0$. 因此可选择 L_i 的初始值大于 1 来保证 $L_i > 1$. 因此, 基于假设 1, 根据式 (9) 有 $|\phi_{i,m}| = |(f_m(\bar{x}_{i,m}) - f_m(\bar{x}_0, m))/L_i^{m-1+h}| \leq \alpha\|(\bar{z}_{i,m} - \bar{r}_{i,m})/L_i^{m-1+h}\| \leq \alpha(\|\bar{\eta}_{i,m}\| + \|\bar{\zeta}_{i,m}\|)$, 其中 $\bar{z}_{i,m} = [z_{i,1}, \dots, z_{i,m}]^T$, $\bar{r}_{i,m} = [r_{i,1}, \dots, r_{i,m}]^T$, $\bar{\eta}_{i,m} = [\eta_{i,1}, \dots, \eta_{i,m}]^T$, $\bar{\zeta}_{i,m} = [\zeta_{i,1}, \dots, \zeta_{i,m}]^T$. 进一步, 可得 $\phi_i^T \phi_i \leq 2n\alpha^2(\eta_i^T \eta_i + \zeta_i^T \zeta_i)$. 令 $\lambda_3 = \min_{\forall t \geq 0} \sigma_{\min}(H(t))$, 根据上述 δ 的定义可得 $\delta^T \delta = \zeta^T (H(t) \otimes I_n)^T (H(t) \otimes I_n) \zeta \geq \lambda_3^2 \zeta^T \zeta$. 利用引理 1 中的式 (4), 有 $\eta_i^T \eta_i \leq \frac{1}{\iota_1} \eta_i^T S \eta_i$. 基于此, 可得

$$\begin{aligned} & \phi^T \phi \leq 2n\alpha^2 (\eta^T \eta + \zeta^T \zeta) \leq \\ & \frac{2n\alpha^2}{\iota_1} \eta^T (I_N \otimes S) \eta + \frac{2n\alpha^2}{\lambda_3^2} \delta^T \delta \end{aligned}$$

进一步, 令 $\lambda_4 = \max_{\forall t \geq 0} 2\|H(t)\|_F$ 可得

$$\begin{aligned} & -4\delta^T (((\dot{\gamma} + \gamma) Q(t)H(t)) \otimes I_n) \phi \leq \\ & \lambda_1\lambda_4 \|\delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma) \otimes I_n)\| \|\phi\| \leq \\ & \frac{\lambda_0}{4} \delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes I_n) \delta + \frac{\lambda_1^2\lambda_4^2}{\lambda_0} \phi^T \phi \leq \\ & \frac{\lambda_0}{4} \delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes I_n) \delta + \frac{2n\alpha^2\lambda_1^2\lambda_4^2}{\lambda_0\lambda_3^2} \delta^T \delta + \\ & \frac{2n\alpha^2\lambda_1^2\lambda_4^2}{\lambda_0\iota_1} \eta^T (I_n \otimes S) \eta \end{aligned} \quad (21)$$

基于式 (7) 可得,

$$\frac{|\dot{L}_i|}{L_i} = \left| \frac{1}{h} \left(\frac{\iota_0(L_i - 1)}{3} - \hat{\theta}_i \right) \right|$$

因此, 可令 $\chi = \max\{|\dot{L}_i|/L_i, \dots, |\dot{L}_N|/L_N\}$, 并令 $\lambda_5 = 2\lambda_1\|\tilde{\Pi}\|_F$, 其中矩阵 $\tilde{\Pi}$ 在式 (15) 中给出, 结合 $\check{L} = \text{diag}\{\frac{\dot{L}_1}{L_1}, \dots, \frac{\dot{L}_N}{L_N}\}$ 可得

$$\begin{aligned} & -4\delta^T (((\dot{\gamma} + \gamma) Q(t)\check{L}) \otimes \tilde{\Pi}) \delta \leq \\ & \lambda_5\chi \|\delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma) \otimes I_n)\| \|\delta\| \leq \\ & \frac{\lambda_0}{4} \delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes I_n) \delta + \frac{\chi^2\lambda_5^2}{\lambda_0} \delta^T \delta \end{aligned} \quad (22)$$

令

$$\lambda_6 = \max_{\forall t \geq 0} 2\|\dot{H}(t)\|_F, \lambda_7 = \max_{\forall t \geq 0} \|H^{-1}(t)\|_F$$

有

$$\begin{aligned} & 4\delta^T (((\dot{\gamma} + \gamma) Q(t)\dot{H}(t)) \otimes I_n) \zeta = \\ & 4\delta^T (((\dot{\gamma} + \gamma) Q(t)\dot{H}(t)H^{-1}(t)) \otimes I_n) \delta \leq \\ & \lambda_1\lambda_6\lambda_7 \|\delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma) \otimes I_n)\| \|\delta\| \leq \\ & \frac{\lambda_0}{4} \delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes I_n) \delta + \frac{\lambda_1^2\lambda_6^2\lambda_7^2}{\lambda_0} \delta^T \delta \end{aligned} \quad (23)$$

此外, 可得

$$\begin{aligned} & 2\delta^T ((\dot{\gamma} Q(t)) \otimes I_n) \delta + 2\delta^T (\gamma \otimes I_n) \delta \leq \\ & \lambda_1 \|\delta^T (\dot{\gamma} \otimes I_n)\| \|\delta\| + 2 \|\delta^T (\gamma \otimes I_n)\| \|\delta\| \leq \\ & \frac{\lambda_0}{4} \delta^T (\dot{\gamma}^2 \otimes I_n) \delta + \frac{\lambda_0}{4} \delta^T (\gamma^2 \otimes I_n) \delta + \\ & \frac{4 + \lambda_1^2}{\lambda_0} \delta^T \delta \leq \\ & \frac{\lambda_0}{4} \delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes I_n) \delta + \frac{4 + \lambda_1^2}{\lambda_0} \delta^T \delta \end{aligned} \quad (24)$$

令 $\lambda_8 = \max_{\forall t \geq 0} \|\dot{Q}(t)\|_F$, 那么可得

$$\begin{aligned} & \delta^T (((\dot{\gamma} + 2\gamma) \dot{Q}(t)) \otimes I_n) \delta \leq \\ & \lambda_8 \|\delta^T ((\dot{\gamma} + 2\gamma) \otimes I_n)\| \|\delta\| \leq \\ & \frac{\lambda_0}{16} \delta^T ((\dot{\gamma} + 2\gamma)^2 \otimes I_n) \delta + \frac{4\lambda_8^2}{\lambda_0} \delta^T \delta \leq \\ & \frac{\lambda_0}{4} \delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes I_n) \delta + \frac{4\lambda_8^2}{\lambda_0} \delta^T \delta \end{aligned} \quad (25)$$

最后, 将式 (19) ~ (25) 代入式 (18) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{\lambda_0}{2} \delta^T ((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes I_n) \delta - 2\gamma^* \delta^T \delta + \\ & \left(\frac{\nu^2\lambda_2^2}{\lambda_0} + \frac{\chi^2\lambda_5^2}{\lambda_0} + \frac{\lambda_1^2\lambda_6^2\lambda_7^2}{\lambda_0} + \frac{4\lambda_8^2}{\lambda_0} \right) \delta^T \delta + \\ & \left(\frac{4 + \lambda_1^2}{\lambda_0} + \frac{2n\alpha^2\lambda_1^2\lambda_4^2}{\lambda_0\lambda_3^2} \right) \delta^T \delta + \end{aligned}$$

$$\frac{2n\alpha^2\lambda_1^2\lambda_4^2}{\lambda_0\iota_1}\boldsymbol{\eta}^T(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{S})\boldsymbol{\eta} \quad (26)$$

对于闭环系统 (13) 构造 Lyapunov 函数 V_2 为

$$V_2 = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i + \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i^2 \quad (27)$$

其中 \mathbf{S} 为正定矩阵如引理 1 所示. $\hat{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$, $\hat{\theta}_i$ 为自适应律满足式 (7) 的动态参数, 其中 $\theta_i > 0$ 是一个正常数, 其具体数值将在下面的分析过程中给出. 进一步基于式 (7) 可得 V_2 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \sum_{i=1}^N 2\boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \\ &\sum_{i=1}^N (2L_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}^T) \boldsymbol{\eta}_i) - \sum_{i=1}^N \tilde{\theta}_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i - \\ &\sum_{i=1}^N (2\boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} (\dot{\gamma}_i + \gamma_i) \boldsymbol{\delta}_i) \tilde{\boldsymbol{\Pi}} \boldsymbol{\eta}_i \end{aligned} \quad (28)$$

在后面, 将给出式 (28) 右边每一项的估计. 基于引理 1 中的不等式 (3) 和 (4) 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N (2L_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}^T) \boldsymbol{\eta}_i - 2\boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} (\dot{\gamma}_i + \gamma_i) \boldsymbol{\delta}_i) \leq \\ &\sum_{i=1}^N \left(-\iota_0 L_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i + \frac{4\iota_2}{\lambda_0} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \right) + \\ &\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_0}{4} \boldsymbol{\delta}_i^T (\dot{\gamma}_i + \gamma_i)^2 \boldsymbol{\delta}_i \end{aligned} \quad (29)$$

根据式 (4) 和 (15) 对矩阵 $\tilde{\boldsymbol{\Pi}}$ 和 $\boldsymbol{\Pi}$ 的定义, 可得 $\tilde{\boldsymbol{\Pi}} = \boldsymbol{\Pi} + h\mathbf{I}_n$, 进一步结合式 (4) 中的不等式 $-h\mathbf{S} \leq \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \boldsymbol{\Pi} \leq h\mathbf{S}$ 可得

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^N 2\frac{\dot{L}_i}{L_i} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \tilde{\boldsymbol{\Pi}} \boldsymbol{\eta}_i = \\ &\sum_{i=1}^N \left(-2h\frac{\dot{L}_i}{L_i} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i - 2\frac{\dot{L}_i}{L_i} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\eta}_i \right) \leq \\ &\sum_{i=1}^N -h \left(2\frac{\dot{L}_i}{L_i} - \frac{|\dot{L}_i|}{L_i} \right) \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \end{aligned}$$

根据式 (7) 可得如果 $\dot{L}_i \geq 0$ ($L_i \geq 1$), 有

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^N 2\frac{\dot{L}_i}{L_i} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \tilde{\boldsymbol{\Pi}} \boldsymbol{\eta}_i \leq \sum_{i=1}^N -h\frac{\dot{L}_i}{L_i} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \leq \\ &\sum_{i=1}^N \left(\frac{\iota_0 L_i}{3} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i - \frac{\iota_0}{3} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i - \hat{\theta}_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \right) \end{aligned} \quad (30)$$

否则如果 $\dot{L}_i < 0$ ($L_i \geq 1$), 可得

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^N 2\frac{\dot{L}_i}{L_i} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \tilde{\boldsymbol{\Pi}} \boldsymbol{\eta}_i \leq \sum_{i=1}^N -3h\frac{\dot{L}_i}{L_i} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \leq \\ &\sum_{i=1}^N \left(\iota_0 L_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i - \iota_0 \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i - 3\hat{\theta}_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \right) \end{aligned} \quad (31)$$

根据式 (7) 中 $\hat{\theta}_i$ 的自适应更新律可知动态参数 $\hat{\theta}_i > 0$. 另外由于式 (3) 中给出的参数 $\iota_0 > 0$, 综合不等式 (30) 和 (31) 可得

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^N 2\frac{\dot{L}_i}{L_i} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \tilde{\boldsymbol{\Pi}} \boldsymbol{\eta}_i \leq \sum_{i=1}^N -3h\frac{\dot{L}_i}{L_i} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \leq \\ &\sum_{i=1}^N \left(\iota_0 L_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i - \frac{\iota_0}{3} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i - \hat{\theta}_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \right) \end{aligned} \quad (32)$$

将式 (29) 和 (32) 代入 (28) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\iota_0}{3} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i + \frac{4\iota_2}{\lambda_0} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \right) - \\ &\sum_{i=1}^N \theta_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i + \frac{\lambda_0}{4} \boldsymbol{\delta}^T \left((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes \mathbf{I}_n \right) \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \quad (33)$$

选取最终的 Lyapunov 函数为

$$V = V_1 + V_2 \quad (34)$$

结合式 (26) 和 (33), 可得 V 的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\lambda_0}{4} \boldsymbol{\delta}^T \left((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes \mathbf{I}_n \right) \boldsymbol{\delta} + \rho \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta} - \\ &2\gamma^* \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{2n\alpha^2\lambda_1^2\lambda_4^2}{\lambda_0\iota_1} + \frac{4\iota_2}{\lambda_0} \right) \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i - \\ &\sum_{i=1}^N \theta_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \sum_{i=1}^N \frac{\iota_0}{3} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \leq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

其中常数 $\rho = 2n\alpha^2\lambda_1^2\lambda_4^2/(\lambda_0\lambda_3^2) + \nu^2\lambda_2^2/\lambda_0 + \chi^2\lambda_5^2/\lambda_0 + \lambda_1^2\lambda_6^2\lambda_7^2/\lambda_0 + (4 + \lambda_1^2)/\lambda_0 + 4\lambda_8^2/\lambda_0$. 令 $\gamma^* \geq \rho/2$, $\theta_i > 4\iota_2/\lambda_0 + 2n\alpha^2\lambda_1^2\lambda_4^2/(\lambda_0\iota_1)$, 进一步可得

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_0}{4} \boldsymbol{\delta}^T \left((\dot{\gamma} + \gamma)^2 \otimes \mathbf{I}_n \right) \boldsymbol{\delta} - \sum_{i=1}^N \frac{\iota_0}{3} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}_i \quad (36)$$

因此, 结合式 (17), (27), (34) 和 (36) 并利用 $\boldsymbol{\eta}_i = [\eta_{i,1}, \dots, \eta_{i,n}]^T$, $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \dots, \delta_N]^T$ 和 $\boldsymbol{\delta}_i = [\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,n}]^T$ 可得 V 是有界的, 并且 $\delta_{i,m}$, $\eta_{i,m}$, γ_i 和 $\hat{\theta}_i$ ($i = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, n$) 也是有界的. 通过观察式 (7) 可知 γ_i 和 $\hat{\theta}_i$ 单调递增, 因此可得动态参数 γ_i 和 $\hat{\theta}_i$ 将最终收敛至某一正常数. 根据式 (36), 由 $\dot{V} \equiv 0$ 可得 $\delta_{i,m} = 0$ 和 $\eta_{i,m} = 0$. 因此, 利用 LaSalle 不变集原理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{i,m} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta_{i,m} = 0$. 此外, 根据式 (7) 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} L_i$ 的上界为正常

数 $3\hat{\theta}_i/\iota_0 + 1$. 在假设 2 条件下, 可得矩阵 $\mathbf{H}(t) = \mathbf{L}(t) + \mathbf{B}(t)$ 为非奇异矩阵. 因此根据 $\delta = (\mathbf{H}(t) \otimes \mathbf{I}_n) \zeta$, 由 $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{i,m} = 0$ 可推出 $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_{i,m} = 0$. 又因为 $\zeta_{i,m} = r_{i,m}/L_i^{m-1+h}$ 和 $\eta_{i,m} = z_{i,m}/L_i^{m-1+h}$, 进一步可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} r_{i,m} = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_{i,m} = 0$. 基于 $\tilde{x}_{i,m} = z_{i,m} - r_{i,m}$, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,m} = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_{i,m} - x_{0,m}| = 0$. 至此完成了通信故障 (2) 下高阶非匹配非线性多智能体系统 (1) 的领导跟随渐近一致性证明. \square

注 2. 在实际应用中, 一些系统的动力学特性可以由满足假设 1 的系统模型 (1) 来描述. 例如, 单链机器人系统的模型可以用式 (1) 来描述^[23], 其对应于假设 1 中的 Lipschitz 常数为 $\alpha = 10$; 倒立摆系统的模型也可以用式 (1) 来描述^[24], 其对应于假设 1 中的 Lipschitz 常数为 $\alpha = 4.9\sqrt{2}$. 值得注意的是, 在文献 [23–24] 所给出的单链机器人系统和倒立摆系统中, 这些实际系统对应的非线性项所满足的假设 1 中的 Lipschitz 常数是已知的. 对于这些实际系统, 可以进一步考虑其 Lipschitz 常数为未知的情形, 并利用本文给出的动态参数 $\hat{\theta}_i$ (见式 (7)) 去估计包含有未知 Lipschitz 常数 α 的未知常数. 在本文中, 基于定理 1 的推导过程, 结合式 (35) 可知, 只有动态参数 γ_i 的收敛上界 γ^* 和动态参数 $\hat{\theta}_i$ 的估计真值 θ_i 与 Lipschitz 常数 α 有关. 对于控制器 (6) 的设计及其动态参数更新律 (7) 的设计均未用到 Lipschitz 常数 α . 因此, 本文所提出的基于三个在线调节动态参数的补偿器来设计分布式一致性控制器的方法可以处理假设 1 中的 Lipschitz 常数为未知的情形.

注 3. 本文的控制目标是使得所有跟随智能体系统的状态 $x_{i,m}$, $m = 1, \dots, n$ 都能最终跟踪上领导智能体系统的状态 $x_{0,m}$, $m = 1, \dots, n$, 即对于 $i = 1, \dots, N$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_{i,m} - x_{0,m}| = 0$. 多智能体系统图论反映了智能体间的通信关系, $a_{ij} > 0$ 表示智能体 i 能收到智能体 j 的通信信息, 否则 $a_{ij} = 0$. $b_i > 0$ 表示智能体 i 能收到领导智能体的通信信息. 此外, 由于智能体无自连接, 有 $a_{ii} = 0$. 因此, 一致性误差 $e_{i,m}(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \bar{a}_{ij}(t)(x_{i,m} - x_{j,m}) + \bar{b}_i(t)(x_{i,m} - x_{0,m})$ 描述了智能体 i 能接收到的其所有邻居智能体包括领导智能体的通信信息. 跟踪误差 $\tilde{x}_{i,m} = x_{i,m} - x_{0,m}$ 则描述了智能体 i 的状态信息和领导智能体的状态信息之间的差值. 在本文中, 将基于一致性误差 $e_{i,m}(t)$ 来设计智能体 i 的控制器, 最终使得跟踪误差 $\tilde{x}_{i,m}$ 趋于 0, 即达到了本文的控制目标 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_{i,m} - x_{0,m}| = 0$.

注 4. 在设计的一致性控制器 (6) 中, 引入了由

更新律 (7) 决定的动态参数 L_i 和 γ_i . 动态参数 L_i 的引入是用来处理通信故障和智能体系统的非匹配非线性及其网络化耦合. L_i 的更新律中内嵌设计了一个新的自适应估计参数 $\hat{\theta}_i$. 这个自适应参数的引入使得 L_i 在处理通信故障和非线性及其耦合的同时保证了构造的 Lyapunov 函数 V 的导数为负. 此外, 由式 (7) 更新的动态参数 γ_i 是找到正定 Lyapunov 函数 V 和使得 V 的导数为负的重要因素, 从而可以利用 Lyapunov 稳定性定理获得领导跟随一致性结论.

注 5. 基于定理 1 的推导过程可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta_{i,m} = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_{i,m} = 0$. 结合更新律 (7) 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}}_i = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\gamma}_i = 0$. 因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 动态参数 $\hat{\theta}_i$ 和 γ_i 都将以单调递增的趋势最终收敛于某一常数. 此外, 根据更新律 (7) 可得当 $\dot{L}_i = 0$ 时, 有 $L_i = 3\hat{\theta}_i/\iota_0 + 1$. 因此, 动态参数 L_i 的值将最终趋于 $3\hat{\theta}_i/\iota_0 + 1$. 由于 $\hat{\theta}_i$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时收敛于某一常数, 可得 L_i 将最终趋于某一常数.

3 仿真

本节给出一个仿真例子证明本文所提方法的有效性. 考虑由 1 个领导智能体和 4 个跟随智能体组成的多智能体系统, 智能体系统间的通信关系如通信拓扑图 1 所示, 其中节点 1、2、3、4 表示跟随智能体, 节点 0 表示领导智能体. 同时, 考虑在智能体系统间的通信存在由式 (2) 描述的通信故障, 其中对于 $i = 1, 2, 3, 4$ 有 $\omega_{ij}^a(t) = 0.6 \sin(t) \times \text{rand}$, $\omega_i^b(t) = 0.4 \cos(t) \times \text{rand}$, 其中 rand 是从 [0, 1] 中选取的随机信号.

考虑第 i ($i = 0, \dots, 4$) 个非匹配非线性智能体系统的模型如下

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,1} &= x_{i,2} + f_1(x_{i,1}) \\ \dot{x}_{i,2} &= u_i + f_2(\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

其中 $f_1(x_{i,1}) = 0.5 \sin(x_{i,1})$, $f_2(\mathbf{x}_i) = 0.5 \sin(x_{i,1}) + 0.5 \cos(x_{i,2})$. 根据定理 1 的结果, 构造了基于补偿器的分布式动态一致性控制器 (6), 并且其中动态参数 L_i , γ_i 和 $\hat{\theta}_i$ 的更新律由式 (7) 决定, 其中 $\kappa_1 =$

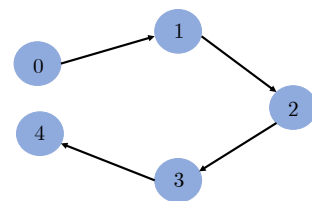


图 1 通信拓扑图

Fig. 1 Communication topology

-0.36 , $\kappa_2 = -1.1$, $\iota_0 = 2.9$, $h = 3.65$ 和矩阵 $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. 那么, 选取系统状态的初始值为 $x_{0,1}(0) = 1$, $x_{0,2}(0) = 0$, $x_{1,1}(0) = 5$, $x_{1,2}(0) = 4$, $x_{2,1}(0) = 2$, $x_{2,2}(0) = 3$, $x_{3,1}(0) = 3$, $x_{3,2}(0) = 1$, $x_{4,1}(0) = 6$, $x_{4,2}(0) = 7$, 选取动态参数初始值为 $\hat{\theta}_i(0) = 0.2$, $\gamma_i(0) = 0.1$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 选取 $L_1(0) = 7$, $L_2(0) = 8$, $L_3(0) = 5$, $L_4(0) = 6$, 则通信故障下多智能体系统领导跟随一致性的仿真结果如图 2 ~ 5 所示.

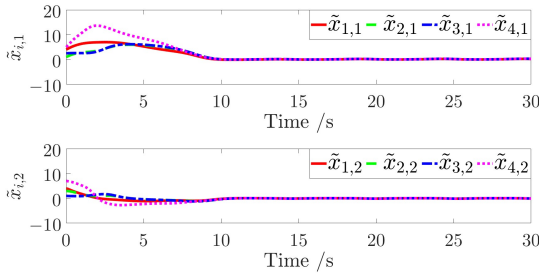


图 2 跟踪误差 $\tilde{x}_{i,m}$, $m = 1, 2$
Fig.2 Tracking errors $\tilde{x}_{i,m}$, $m = 1, 2$

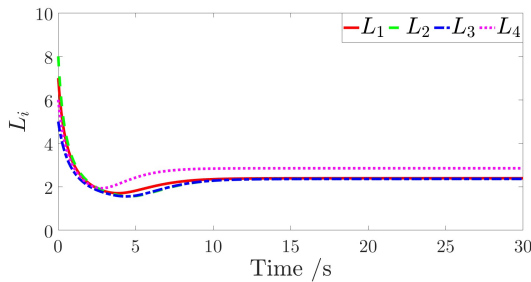


图 3 动态参数 L_i
Fig.3 Dynamic parameter L_i

图 2 给出了所考虑的高阶非匹配非线性多智能体系统在通信链路故障下的跟踪误差 $\tilde{x}_{i,m}$, $m = 1, 2$ 随时间变化的轨迹曲线. 从图 2 可以看出, 跟踪误差最终收敛于 0, 表明所有的跟随智能体状态最终都能跟踪上领导智能体. 图 3 ~ 5 给出了动态参数 L_i , γ_i , $\hat{\theta}_i$, $i = 1, \dots, 4$ 随时间变化的轨迹曲线. 从图 3 ~ 5 中可以看出, 动态参数 L_i , γ_i , $\hat{\theta}_i$ 最终都收敛于某一有限常数, 这意味着多智能体系统状态达到一致后, 这些动态参数的值将不再发生变化.

4 结束语

本文研究了存在通信链路故障情况下, 高阶非匹配非线性多智能体系统的领导跟随一致性问题. 通过引入一种具有三个动态参数的补偿器, 设计了一种完全分布式控制器以确保多智能体系统的领导跟随一致性. 所提出的控制器的一个重要优势是,

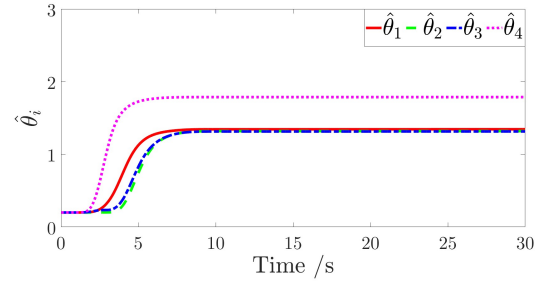


图 4 动态参数 $\hat{\theta}_i$
Fig.4 Dynamic parameter $\hat{\theta}_i$

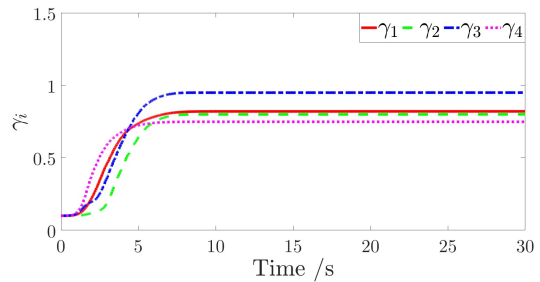


图 5 动态参数 γ_i
Fig.5 Dynamic parameter γ_i

它不需要假设每个跟随智能体内置的补偿器必须与其邻居共享信息, 并且它独立于全局通信拓扑图信息, 因此是完全分布式的. 从理论上证明了多智能体系统的渐近领导跟随一致性是可实现的, 并且可以通过矩阵不等式获得控制器增益和补偿器参数. 最后给出了一个仿真示例说明了所提结论的有效性.

到目前为止, 在通信链路故障下, 基于输出反馈的高阶非匹配非线性多智能体系统的领导跟随一致性问题仍然是一个有待解决的问题. 对这个问题的研究需要仅根据输出信息来处理通信链路故障, 同时处理完全依赖于全状态信息的非匹配非线性及其复杂耦合. 因此, 在未来工作中将考虑把状态反馈结果扩展至输出反馈.

References

- 1 Wu J, Yuan S F, Ji S, Zhou G Y, Wang Y, Wang Z L. Multi-agent system design and evaluation for collaborative wireless sensor network in large structure health monitoring. *Expert Systems With Applications*, 2010, **37**(3): 2028–2036
- 2 Zheng Zhi, Jiang Tao, Yang Yue, Su Xiao-Jie. Distributed multi-mobile robot anti-oscillation safety formation control with nested motion saturation. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(3): 658–668
(郑志, 江涛, 杨玥, 苏晓杰. 嵌套运动饱和下分布式多移动机器人反振荡安全编队控制. *自动化学报*, 2025, **51**(3): 658–668)
- 3 Liu Pei-Ming, Guo Xiang-Gui. Observer-based prescribed performance bipartite consensus for human-in-the-loop multi-manipulator systems. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(9): 1761–1771
(刘沛明, 郭祥贵. 基于观测器的人在环多机械臂系统预设性能二分一致性. *自动化学报*, 2024, **50**(9): 1761–1771)

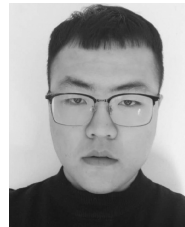
- 4 Liu Jian, Gu Yang, Cheng Yu-Hu, Wang Xue-Song. Prediction of breast cancer pathogenic genes based on multi-agent reinforcement learning. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(5): 1246–1258
(刘健, 顾扬, 程玉虎, 王雪松. 基于多智能体强化学习的乳腺癌致病基因预测. 自动化学报, 2022, **48**(5): 1246–1258)
- 5 Wang Hao-Liang, Chai Ya-Xing, Wang Dan, Liu Lu, Wang An-Qing, Peng Zhou-Hua. Event-triggered cooperative path following of multiple autonomous underwater vehicles. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(5): 1024–1034
(王浩亮, 柴亚星, 王丹, 刘陆, 王安青, 彭周华. 基于事件触发机制的多自主水下航行器协同路径跟踪控制. 自动化学报, 2024, **50**(5): 1024–1034)
- 6 You Xing-Xing, Yang Dao-Wen, Guo Bin, Liu Kai, Dian Song-Yi, Zhu Yu-Qi. Event-triggered tracking control for a class of nonlinear systems with observer and prescribed performance. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(9): 1747–1760
(游星星, 杨道文, 郭斌, 刘凯, 佃松宜, 朱雨琪. 基于观测器和指定性能的非线性系统事件触发跟踪控制. 自动化学报, 2024, **50**(9): 1747–1760)
- 7 Zhu J H, Wen G X, Veluvolu K C. Optimized backstepping consensus control using adaptive observer-critic-actor reinforcement learning for strict-feedback multi-agent systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2024, **361**(6): Article No. 106693
- 8 Wu Wen-Qiang, Wang Qing-Ling. Optimal consensus for strict-feedback multi-agent systems based on proportional-integral regulation. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(3): 577–589
(武文强, 王庆领. 基于比例积分调节的严格反馈多智能体系统最优一致性. 自动化学报, 2025, **51**(3): 577–589)
- 9 Pan W H, Fan D B, Li H F, Zhang X F. Event-triggered impulsive tracking control for uncertain strict-feedback nonlinear systems via the neural-network-based backstepping technique. *Neurocomputing*, 2024, **601**: Article No. 128240
- 10 Tian C C, Mei J, Ma G F. A high-order fully actuated consensus approach for strict-feedback nonlinear multi-agent systems. In: Proceedings of 2024 3rd Conference on Fully Actuated System Theory and Applications (FASTA). Shenzhen, China: IEEE, 2024. 506–510
- 11 Wang W, Wen C Y, Huang J S. Distributed adaptive asymptotically consensus tracking control of nonlinear multi-agent systems with unknown parameters and uncertain disturbances. *Automatica*, 2017, **77**: 133–142
- 12 Huang J S, Wang W, Wen C Y, Zhou J, Li G Q. Distributed adaptive leader-follower and leaderless consensus control of a class of strict-feedback nonlinear systems: A unified approach. *Automatica*, 2020, **118**: Article No. 109021
- 13 Zhang H W, Lewis F L. Adaptive cooperative tracking control of higher-order nonlinear systems with unknown dynamics. *Automatica*, 2012, **48**(7): 1432–1439
- 14 Yoo S J. Distributed consensus tracking for multiple uncertain nonlinear strict-feedback systems under a directed Graph. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, **24**(4): 666–672
- 15 Sujil A, Verma J, Kumar R. Multi agent system: Concepts, platforms and applications in power systems. *Artificial Intelligence Review*, 2018, **49**(2): 153–182
- 16 Zheng L Y, Zhou Y M. Output feedback consensus control of nonlinear multi-agent system under communication faults and actuator faults. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2024, **22**(11): 3482–3498
- 17 Rezaee H, Parisini T, Polycarpou M M. Almost sure resilient consensus under stochastic interaction: Links failure and noisy channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **66**(12): 5727–5741
- 18 Li H Q, Liao X F, Huang T W, Zhu W, Liu Y B. Second-order global consensus in multiagent networks with random directional link failure. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, **26**(3): 565–575
- 19 Firouzmand E, Babahaji M, Talebi H A, Aghdam A G. Distributed control of multi-agent systems with uncertain communication links. *IEEE Journal of Radio Frequency Identification*, 2023, **7**: 415–423
- 20 Li Z K, Chen J. Robust consensus for multi-agent systems communicating over stochastic uncertain networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2019, **57**(5): 3553–3570
- 21 Chen C, Xie K, Lewis F L, Xie S L, Fierro R. Adaptive synchronization of multi-agent systems with resilience to communication link faults. *Automatica*, 2020, **111**: Article No. 108636
- 22 Fu Q L, Shen Q K, Jia Z Y. Cooperative adaptive tracking control for unknown nonlinear multi-agent systems with signal transmission faults. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2020, **39**(3): 1335–1352
- 23 Wang W, Li Y M. Observer-based event-triggered adaptive fuzzy control for leader-following consensus of nonlinear strict-feedback systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, **51**(4): 2131–2141
- 24 You X, Hua C C, Guan X P. Self-triggered leader-following consensus for high-order nonlinear multiagent systems via dynamic output feedback control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(6): 2002–2010



游 秀 山西大学计算机与信息技术学院副教授。2018 年获得燕山大学控制科学与工程专业博士学位。主要研究方向为多智能体系统协同控制和强化学习。本文通信作者。

E-mail: youxiu@sxu.edu.cn

(YOU Xiu Associate professor at the School of Computer and Information Technology, Shanxi University. She received her Ph.D. degree in control science and engineering from Yanshan University in 2018. Her research interest covers cooperative control for multi-agent systems and reinforcement learning. Corresponding author of this paper.)



张 红 山西大学计算机与信息技术学院硕士研究生。2022 年获得长治学院数据科学与大数据技术专业学士学位。主要研究方向为多智能体系统协同控制。E-mail: zh140428@126.com

(ZHANG Hong Master student at the School of Computer and Information Technology, Shanxi University. He received his bachelor degree in data science and big data technology from Changzhi University in 2022. His research interest covers cooperative control for multi-agent systems.)



梁吉业 山西大学计算机与信息技术学院教授。2001 年获得西安交通大学博士学位。主要研究方向为数据挖掘与机器学习, 大数据分析技术, 人工智能。E-mail: ljiy@sxu.edu.cn

(LIANG Ji-Ye Professor at the School of Computer and Information Technology, Shanxi University. He received his Ph.D. degree from Xi'an Jiaotong University in 2001. His research interest covers data mining and machine learning, big data analysis technology and artificial intelligence.)