

# 证据推理理论及其应用

周志杰<sup>1</sup> 唐帅文<sup>1</sup> 胡昌华<sup>1</sup> 曹友<sup>1</sup> 王杰<sup>1</sup>

**摘要** 证据理论既能够灵活处理不确定信息,包括随机性、模糊性、不准确性和不一致性,又能够有效融合定量信息和定性知识。目前,证据理论已广泛应用于评估与决策等多个领域中,包括多属性决策分析、信息融合、模式识别和专家系统等。本文从 D-S 证据理论出发,针对 Dempster 组合规则存在的“反直觉”问题和组合爆炸,主要围绕置信分布理论系统地梳理了证据理论的发展过程,总结分析了国内外典型文献,最后从实际应用对证据理论进行了简要的评述和展望。

**关键词** 证据理论, 证据推理, 不确定性, 评估与决策

**引用格式** 周志杰, 唐帅文, 胡昌华, 曹友, 王杰. 证据推理理论及其应用. 自动化学报, 2021, 47(5): 970–984

**DOI** 10.16383/j.aas.c190676

## Evidential Reasoning Theory and Its Applications

ZHOU Zhi-Jie<sup>1</sup> TANG Shuai-Wen<sup>1</sup> HU Chang-Hua<sup>1</sup> CAO You<sup>1</sup> WANG Jie<sup>1</sup>

**Abstract** Evidence theory can not only deal with uncertain information flexibly, including randomness, ambiguity, inaccuracy and inconsistency, but can integrate quantitative information and qualitative knowledge effectively. At present, evidence theory has been widely applied in various areas such as assessment and decision, involving multiple-attribute decision analysis, information fusion, pattern recognition, expert systems, and so on. Starting from the D-S evidence theory, this paper is focused on the counter-intuitive problem and the combinational explosion of the Dempster combination rule. The development process of evidence theory is systematically combed from the perspective of belief distribution, and typical literatures both here and abroad are summarized and analyzed. Finally, a brief commentary and outlook on evidence theory is given from its practical applications.

**Key words** Evidence theory, evidential reasoning, uncertainty, assessment and decision

**Citation** Zhou Zhi-Jie, Tang Shuai-Wen, Hu Chang-Hua, Cao You, Wang Jie. Evidential reasoning theory and its applications. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(5): 970–984

1967 年, Dempster 首次提出证据理论并将其用于统计问题的相关研究<sup>[1-2]</sup>。之后, Shafer 于 1976 年发表了证据理论的第一本专著《A Mathematical Theory of Evidence》,通过引入信任函数 (Belief function) 概念,进一步发展和完善了证据理论,即 Dempster-Shafer (D-S) 理论,标志着证据理论的正式诞生<sup>[3]</sup>。在 D-S 框架下,辨识框架 (Frame of discernment, FoD) 是由一组相互排斥且整体完备的命题集组成的,其基本概率质量不仅能赋给任意单个命题集,也能赋给该命题集的任意子集<sup>[4]</sup>。因此,所有的证据都可以被描述为一种定义在幂集辨识框

架下的置信分布 (Belief distribution, BD) 形式。D-S 证据理论从置信分布的角度拓展了传统的概率分布,构成联合概率推理过程,满足证据的交换律和结合律,是传统的贝叶斯理论的推广<sup>[5]</sup>。作为一种强有力的不确定性推理和信息融合方法<sup>[6-7]</sup>, D-S 证据理论具有如下优点:

1) 利用信任函数表达知识的不确定性,克服了传统贝叶斯理论对先验知识或条件概率的依赖,使用限制条件更少,具有强大的证据组合能力。

2) 能够有效处理各类不确定性,如随机性、模糊性、不准确性和不一致性,合理分配基本概率质量。其中,随机性是指同一事件会产生多种不同的结果;模糊性是指同一事件会产生含糊的结果;不准确性是指证据或者数据源由于受到各种干扰的影响而变得不完全可靠;不一致性是指证据或者数据源的多样性。

3) 能够有效区分无知性和等可能性,知识的表示更加灵活准确。在 D-S 证据理论中,证据对命题的部分支持并不意味着将证据的剩余支持分配给该命题的非命题,而是分配给整个辨识框架。

收稿日期 2019-09-24 录用日期 2019-12-15

Manuscript received September 24, 2019; accepted December 15, 2019

国家自然科学基金 (61773388, 61751304, 61833016, 61702142), 海南省重点研发计划 (ZDYF2019007) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61773388, 61751304, 61833016, 61702142) and Key Research and Development Plan of Hainan Province (ZDYF2019007)

本文责任编辑 刘艳军

Recommended by Associate Editor LIU Yan-Jun

1. 火箭军工程大学导弹工程学院 西安 710025

1. Missile Engineering College, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025

随着证据理论的提出,许多学者开始对证据推理的理论模型解释、算法实现及其实际应用进行探索<sup>[8-9]</sup>. D-S 证据理论的核心是 Dempster 组合规则,尽管它具有强大的证据组合能力,在面临冲突证据时却存在着“反直觉”问题,产生违背常理的结论,具体见本文第 1 节.此外,当证据数量庞大时,若采用 Dempster 组合规则对证据进行组合,则会产生组合爆炸问题,计算量呈指数增加.鉴于此,广大学者从输入信息的表达和组合规则的改进等多方面对 D-S 证据理论进行了深入研究,目前主要围绕信任函数和置信分布两大分支展开.其中,信任函数主要从基本概率分配的角度来表达证据的概率特性<sup>[10]</sup>,而置信分布主要从信度的角度来表达证据的概率特性,进而综合证据的权重和可靠度,实现混合式表达<sup>[11]</sup>.从本质上来说,二者是相同的,均可用于证据的表达.

在信任函数层面,Smets 等<sup>[12-13]</sup>将信任函数推广到辨识框架的所有模糊子集上,并提出了 Pignistic 概率和可传递信度模型 (Transferable belief model, TBM).Pawlak<sup>[14]</sup>提出的粗糙集 (Rough sets) 理论为证据理论、模糊集理论和容差理论的发展提供了新的机制,为无限框架上的证据处理向有限框架上的近似转化提供了思路.Voorbraak<sup>[15]</sup>给出了信任函数的贝叶斯近似计算公式,并证明了信任函数的贝叶斯近似的合成等于这些信任函数的合成的贝叶斯近似,从理论层面减少了证据理论的计算量.Cobb 等<sup>[16]</sup>比较了贝叶斯与信任函数推理的异同,并证明了二者在具有确定模型的情况下可以实现合理转换.

在置信分布层面,1994 年, Yang 和 Singh<sup>[5]</sup>首次提出了证据推理 (Evidential reasoning, ER) 方法,并将其应用于摩托车的性能评估中,为有效解决多属性决策 (Multiple-attribute decision making, MADM) 问题提供了思路.在此基础上, Yang<sup>[17]</sup>进一步提出了基于规则/效用的输入信息转化方法,为不确定性条件下的定量和定性信息表达提供了理论支持,提高了 ER 方法解决不确定性的能力.文献 [18] 提出了一种基于模糊规则的证据推理方法 (Fuzzy rule-based evidential reasoning, FURBER),使用模糊语言变量描述用于定义安全级别的参数,对工程系统的安全性进行建模、分析与综合,并成功应用于海洋工程系统 (浮式生产储存卸载系统) 的系统安全建模. Wang 等<sup>[19]</sup>首次将 ER 方法应用于环境影响评估 (Environmental impact assessment, EIA) 问题,并提出了 ER 解析算法,该算法是 ER 方法的显式表达,将有助于解决 ER 的优化

问题. Xu<sup>[20]</sup> 和 Gao 等<sup>[21]</sup>将证据推理算法扩展到区间 ER 算法,进一步提高了 ER 处理区间不确定性的能力.2013 年, Yang 和 Xu<sup>[11]</sup>提出了 ER 规则,首次考虑了证据的可靠度,并证明了 Dempster 组合规则和原始 ER 算法都是 ER 规则的特殊情况,将证据推理理论发展到了一个新高度.

目前,证据推理理论以其在不确定推理方面诸多的优势得到了快速发展,广泛应用于模式识别<sup>[22]</sup>、信息融合<sup>[23-25]</sup>、人工智能<sup>[9, 26]</sup>、专家系统<sup>[27-28]</sup>、故障检测与诊断<sup>[29]</sup>、多属性决策分析<sup>[30-32]</sup>、风险分析<sup>[33-34]</sup>、图像处理<sup>[35]</sup>、回归分析<sup>[36]</sup>、供水系统<sup>[37]</sup>等诸多领域.国际知名学者 Durbach 等<sup>[38]</sup>对证据推理进行了高度评价,指出:“Perhaps the most well-known belief-based method for MCDA is the evidential reasoning rule, which regards as an alternative’s assessment on each attribute as a different source of evidence regarding that alternative’s overall suitability (或许最著名的基于信度的 MCDA 方法是证据推理规则,该规则将评估方法对每个属性的评估视为关于评估方法整体适用性的不同证据源)”.

本文从置信分布的角度出发,对证据推理理论方法进行概述,总结分析了相关典型文献在证据理论发展过程中提出的重要思想,旨在为证据理论的发展和改进提供一定的参考和借鉴,引起广大学者对证据推理的兴趣.本文的整体框架与脉络如图 1 所示.

## 1 经典 D-S 证据理论简介

### 1.1 基本理论描述

假设  $\Theta = \{H_1, \dots, H_N\}$  是由一组相互排斥且构成完备集的命题所组成的集合,即对于任意的  $i, j \in [1, N]$  且  $i \neq j$ , 恒有  $H_i \cap H_j = \emptyset$ . 其中,符号  $\emptyset$  表示空集,  $H_i$  表示第  $i$  个命题,  $\Theta$  表示辨识框架 (也称全集). 定义基本概率质量为一个映射函数,满足如下条件

$$m(\emptyset) = 0, \sum_{i=1}^N m(H_i) = 1 \quad (1)$$

式中,  $m(H_i)$  表示恰好分配给命题  $H_i$  的基本概率质量. 恰好分配给辨识框架的基本概率质量也称为全局无知性,记为  $m(\Theta)$ ; 而恰好分配给辨识框架的非单子集 (如  $\{H_1, H_2\}$ ) 的基本概率质量称为局部无知性. 此外,辨识框架的幂集包含  $2^N$  个子集,记为  $2^\Theta$  或  $P(\Theta)$ , 表示为

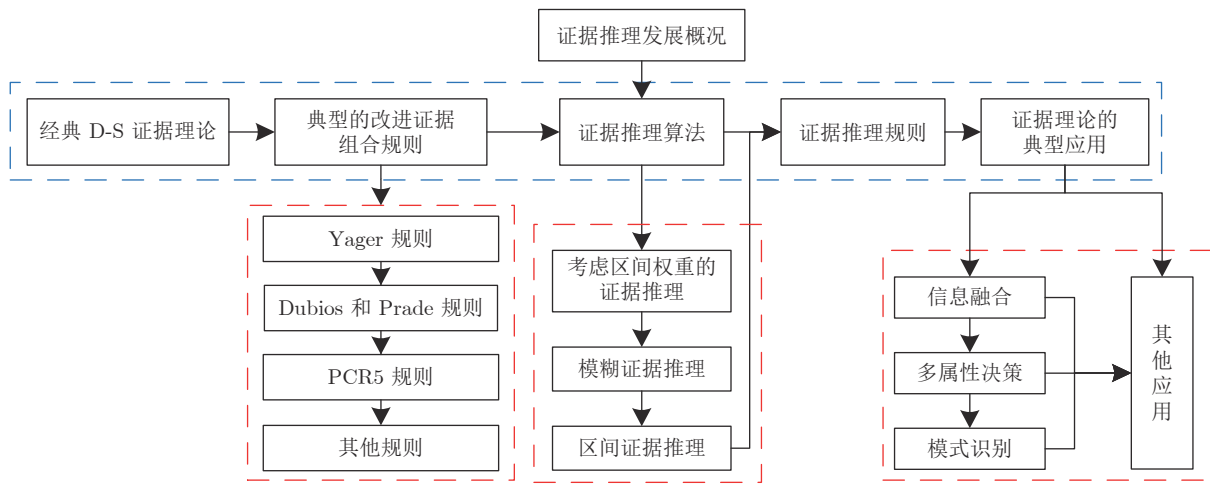


图 1 论文的整体框架

Fig.1 The overall framework of this paper

$$2^\Theta = P(\Theta) = \{\emptyset, H_1, \dots, H_N, \{H_1, H_2\}, \dots, \{H_1, H_N\}, \dots, \{H_1, \dots, H_{N-1}\}, \Theta\} \quad (2)$$

在 D-S 证据理论中有两个基本概念, 用来对证据的置信度进行衡量, 即信任函数  $Bel(A)$  和似然函数  $Pl(A)$ , 它们分别由下式确定:

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (3)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (4)$$

在式 (3) 和式 (4) 中,  $Bel(A)$  表示命题  $A$  的全部子集的 BPA 之和, 即命题  $A$  一定成立; 而  $Pl(A)$  表示所有与命题  $A$  相交的子集的 BPA 之和, 即不否认命题  $A$  的信任度.  $Bel(A)$  和  $Pl(A)$  存在如下关系:

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A}) \quad (5)$$

其中,  $\bar{A}$  表示  $A$  的否命题.  $Bel(A)$  和  $Pl(A)$  恰好构成命题  $A$  的置信区间, 即  $[Bel(A), Pl(A)]$ , 用以表示对命题  $A$  的确认程度.

假设有两条相互独立且完全可靠的证据, 相应的 BPA 为  $m_1$  和  $m_2$ , 对于任意的  $A \subseteq \Theta$ , Dempster 合成规则可表示为

$$m(A) = [m_1 \oplus m_2](A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B)m_2(C)}{1 - \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B)m_2(C)}, & A \neq \emptyset \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $\oplus$  表示正交和算子.

### 1.2 证据的获取及表达

作为一种不确定性推理方法, D-S 证据理论可以有效描述带有不确定性的输入信息, 并实现证据的定量表达<sup>[27]</sup>. 给定输入  $x_i$ , 可以将其等价转化为如下置信分布形式:

$$S(x_i) = \{(H_n, \beta_{n,i}), n=1, \dots, N; i=1, \dots, L\} \quad (7)$$

其中,  $x_i$  既可以是定性知识, 也可以是定量信息, 还可以是符号信息<sup>[27, 39]</sup>.  $(H_n, \beta_{n,i})$  表示第  $i$  个输入被评估为等级  $H_n$  的置信度为  $\beta_{n,i}$ ,  $N$  表示评估等级的数量,  $L$  表示输入信息的数量. 下面给出不同形式的输入向  $\beta_{n,i}$  转化的方法<sup>[17, 39]</sup>.

#### 1) 基于语义参考值的定量输入转化方法

##### a) 基于规则/效用的输入信息转化方法

若输入定量信息为  $x_i$ , 相应的参考值为  $h_{i,j}$ ,  $i=1, \dots, L, j=1, \dots, J$ , 其中  $J$  表示参考值的个数. 此时, 决策者或专家可以将  $x_i$  的数值量  $x_{i,j}$  与其参考值  $h_{i,j}$  建立起映射关系, 即

$$x_{i,j} \text{ means } h_{i,j} \quad (8)$$

不失一般性, 假设相对于参考值  $h_{i,j}$  而言, 决策者更偏向于参考值  $h_{i,j+1}$ . 令  $h_{i,j}$  和  $h_{i,j+1}$  分别为最大和最小的参考值, 那么,  $x_i$  可以等价转化为类似于式 (7) 所示的置信分布形式:

$$S(x_i) = \{(h_{i,j}, \beta_{i,j}), i=1, \dots, L; j=1, \dots, J\} \quad (9)$$

$\beta_{i,j}$  的计算式为

$$\begin{cases} \beta_{i,j} = \frac{h_{i,j+1} - x_{i,j}}{h_{i,j+1} - h_{i,j}}, \beta_{i,j+1} = 1 - \beta_{i,j}, \\ h_{i,j} \leq x_{i,j} \leq h_{i,j+1}, j = 1, \dots, J-1 \\ \beta_{i,k} = 0, & k = 1, \dots, J, k \neq j, j+1 \end{cases} \quad (10)$$

**注 1.** 基于规则/效用的输入信息转化方法并不局限于式 (10), 具体取决于实际决策场景中输入与输出的关系, 计算表达式可以是线性的 (如三角函数、梯形函数等), 也可以是非线性的 (如指数函数、对数函数、复合函数等).

#### b) 基于模糊语义值的输入转化方法

此种转化方法将输入信息的参考值设置为模糊形式的语义值, 而输入信息可以是形如确定性数值、闭区间、三角形模糊数、梯形模糊数等的定量信息. 采用基于隶属度函数的方法求解定量输入  $x_i$  相对于模糊参考值  $h_{i,j}$  的置信度, 其核心是选取合适的匹配函数.

#### 2) 基于区间的定量输入转化方法

此种转化方法的输入信息为区间形式, 转化方法和基于语义参考值的定量输入转化方法类同, 主要区别在于匹配函数的不同, 选取方法可参考文献 [40–41].

#### 3) 基于主观决策的定性输入转化方法

此种转化方法的输入为定性信息, 通常由决策者或专家根据领域知识进行主观判断, 给出输入相对于参考值  $h_{i,j}$  的置信度.

#### 4) 基于主观决策的符号输入转化方法

此种转化方法的输入为符号信息, 通常由决策者或专家根据领域知识进行主观判断, 给出输入相对于参考值  $h_{i,j}$  的置信度. 该方法和基于主观决策的定性输入转化方法类同.

### 1.3 D-S 证据理论的突出问题

Zadeh 在研究 D-S 证据理过程中首次发现了 Dempster 规则在处理冲突证据上存在的不足, 国内外学者也对其融合悖论问题进行了广泛而深入的探讨与分析<sup>[42–43]</sup>. “Zadeh 悖论”可用如下案例进行说明.

在某宗“谋杀案”中, 根据两个目击证人 ( $e_1$  和  $e_2$ ) 来判定三个犯罪嫌疑人 (Peter, Paul, Mary) 中究竟谁是真正的凶手. 两条证据的基本概率质量如表 1 所示.

表 1 证据的基本概率分配

Table 1 Basic probability assignment of evidence

基本概率质量	犯罪嫌疑人		
	Peter	Paul	Mary
$m_1$	0.99	0.01	0
$m_2$	0	0.01	0.99

采用式 (6) 所示的 Dempster 合成规则进行证据组合. 首先, 计算证据冲突系数  $K$  (该系数反映了

两条证据的冲突度, 即它们没有共同支持的命题的程度)

$$K = \sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A)m_2(B) = m_1(\text{Peter})m_2(\text{Paul}) + m_1(\text{Peter})m_2(\text{Mary}) + m_1(\text{Paul})m_2(\text{Mary}) + m_1(\text{Paul})m_2(\text{Peter}) + m_1(\text{Mary})m_2(\text{Paul}) + m_1(\text{Mary})m_2(\text{Peter}) = 0.9999 \quad (11)$$

其次, 分别计算 Peter、Paul 和 Mary 的组合概率质量

$$m_1 \oplus m_2\{\text{Peter}\} = \frac{1}{1-K} \sum_{A \cap B = \{\text{Peter}\}} m_1(A)m_2(B) = \frac{1}{1-0.9999} m_1(\text{Peter})m_2(\text{Peter}) = \frac{1}{1-0.9999} \times 0.99 \times 0 = 0 \quad (12)$$

$$m_1 \oplus m_2\{\text{Paul}\} = \frac{1}{1-K} \sum_{A \cap B = \{\text{Paul}\}} m_1(A)m_2(B) = \frac{1}{1-0.9999} m_1(\text{Paul})m_2(\text{Paul}) = \frac{1}{1-0.9999} \times 0.01 \times 0.01 = 1 \quad (13)$$

$$m_1 \oplus m_2\{\text{Mary}\} = \frac{1}{1-K} \sum_{A \cap B = \{\text{Mary}\}} m_1(A)m_2(B) = \frac{1}{1-0.9999} m_1(\text{Mary})m_2(\text{Mary}) = \frac{1}{1-0.9999} \times 0 \times 0.99 = 0 \quad (14)$$

最后, 得到组合概率质量为

$$m_1 \oplus m_2 = \{m(\text{Peter})=0, m(\text{Paul})=1, m(\text{Mary})=0\} \quad (15)$$

上述结果认定 Paul 是凶手, 显然违背了人的常识推理结果. 因此, Dempster 组合规则在冲突证据面前存在明显的缺陷.

## 2 典型的改进证据组合规则

目前, 解决 D-S 证据理论的冲突问题和组合爆炸问题主要有两大途径: 一是从证据源出发, 修改证据的信任函数, 如 Shafer 提出的折扣系数法<sup>[11]</sup>. 胡昌华等<sup>[44]</sup>通过 Pignistic 变换, 提出一种基于新的折扣率的 D-S 改进算法, 有效降低了决策风险, 提高了证据冲突情况下融合结果的可靠性. 韩德强等<sup>[45]</sup>提出了一种新的基于证据方差的序贯式加权证据组合方法, 对冲突证据进行了修正. 二是从合成规则

出发,把证据冲突度作为全局无知性分配给辨识框架或者作为局部无知性分配给相关命题的子集.具有代表性的改进规则有 Yager 规则<sup>[46]</sup>、Dubois 和 Prade 规则<sup>[47]</sup>、PCR5 规则<sup>[48]</sup>等.

Yager 合成规则描述如式 (16) 所示.

$$m(\theta) = \begin{cases} \sum_{A \cap B = \theta} m_1(A)m_2(B), & \theta \subset \Theta, \theta \neq \emptyset \\ 0, & \theta = \emptyset \\ m_1(\theta)m_2(\theta) + \sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A)m_2(B), & \theta = \Theta \end{cases} \quad (16)$$

根据式 (16) 可知, Yager 合成规则直接将冲突信度  $\sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A)m_2(B)$  分配给了辨识框架  $\Theta$ . 这虽然避免了 Dempster 组合规则的“反直觉”问题,但是当两条证据完全冲突时,  $\sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A)m_2(B) = 0$ . 此时, 辨识框架的信度为 1, 即这两条证据完全没有起作用. 显然, 这种情况是不符合常理的. 另外, 由于 Yager 合成规则把冲突信度赋给了辨识框架, 它并不构成联合概率推理过程.

Dubois 和 Prade<sup>[47]</sup> 提出一种局部分配冲突的合成规则, 如式 (17) 所示.

$$m(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = \emptyset \\ \sum_{A \cap B = \theta} m_1(A)m_2(B) + \sum_{\substack{A \cup B = \theta \\ A \cap B = \emptyset}} m_1(A)m_2(B), & \theta \neq \emptyset \end{cases} \quad (17)$$

根据式 (17) 可知, Dubois 和 Prade 合成规则将冲突信度作为局部无知性直接分配给命题的子集, 这样能够避免“反直觉”问题. 与式 (16) 相比, 式 (17) 显得更为合理. 但在式 (17) 中, 由于  $\sum_{\substack{A \cup B = \theta \\ A \cap B = \emptyset}} m_1(A)m_2(B)$  缺乏合理性证明, Dubois 和 Prade 合成规则不构成联合概率推理过程.

Smarandache 等<sup>[48]</sup> 提出一系列比例冲突重分配 (Proportional conflict redistribution, PCR) 规则, 其中 PCR5 效果最为良好, 如式 (18) 所示.

$$m(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = \emptyset \\ \sum_{A \cap B = \theta} m_1(A)m_2(B) + \sum_{\theta \cap A = \emptyset} \left[ \frac{m_1(\theta)^2 m_2(A)}{m_1(\theta) + m_2(A)} + \frac{m_2(\theta)^2 m_1(A)}{m_2(\theta) + m_1(A)} \right], & \theta \neq \emptyset \end{cases} \quad (18)$$

根据式 (18), 相比于上述两种规则, 在处理冲突证据时, PCR5 能够更为合理地局部分配冲突信度. 然而, PCR5 仍然不构成联合概率推理过程, 也不构成贝叶斯推理过程, 其合理性有待进一步证明.

在合成规则改进上, Simard 等<sup>[49]</sup> 提出一种修剪的 D-S 算法, 有效减少了证据合成的计算量, 且算法具有自适应性, 但是不满足证据的交换律. Lefevre 等<sup>[50]</sup> 采用专家主观法和权重因子自适应学习方法来确定证据的权重系数, 通过权重折扣来解决证据冲突问题, 并证明了该方法是 Dempster 合成规则、Dubois 和 Prade 合成规则的一般化方法. 文献 [51] 通过构造可靠性判断矩阵以获得每个证据源的权重, 采用 Dempster 合成规则组合加权后的证据以识别目标, 提高了 D-S 证据理论处理高度冲突证据的能力和识别速度. Jiang 和 Zhan<sup>[52]</sup> 在 D-S 证据理论的基础上, 提出了一种改进的广义证据组合规则, 进一步明确了证据组合规则的几何与物理意义.

上述改进方法或新的规则解决了冲突证据存在的部分问题, 但部分方法不再满足 Dempster 合成规则的基本性质, 如交换律和结合律等. 此外, 许多方法都不是一个严格的概率推理过程, 也不是贝叶斯推理过程, 更没有解决组合爆炸的问题.

### 3 证据推理方法

#### 3.1 证据推理算法

为了克服传统 Dempster 组合规则的“反直觉”和组合爆炸问题, 在满足传统贝叶斯的联合概率推理的基础上, ER 算法应运而生, 并得到了深入发展<sup>[4-5, 17, 30-31]</sup>.

假设某个评估方案可以由  $L$  条独立证据  $e_i$  ( $i = 1, \dots, L$ ) 评估得到, 辨识框架由  $N$  个评估等级  $\theta_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) 组成, 即  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ . 一条证据可以表示为如下置信分布形式:

$$e_i = \{(\theta_n, p_{n,i}), n = 1, \dots, N; (\Theta, p_{\Theta,i})\} \quad (19)$$

其中,  $p_{n,i}$  表示该评估方案在证据  $e_i$  下被评估为等级  $\theta_n$  的置信度, 且满足  $0 \leq p_{n,i} \leq 1$ ,  $\sum_{n=1}^N p_{n,i} \leq 1$ .  $p_{\Theta,i}$  表示全局无知性. 对于任意  $p_{n,i} > 0$ ,  $(\theta_n, p_{n,i})$  称为  $e_i$  的一个焦元.

假设证据的权重为  $w_i$  ( $i = 1, \dots, L$ ), 归一化后满足  $0 \leq w_i \leq 1$ , 且  $\sum_{i=1}^L w_i = 1$ . 对于证据  $e_1$  和  $e_2$ , 其基本概率质量可表示为

$$\begin{cases} m_{n,i} = w_i p_{n,i}, \\ m_{\Theta,i} = w_i p_{\Theta,i}, \\ m_{P(\Theta),i} = 1 - w_i, \end{cases} \quad \forall n \in [1, N], i = 1, 2 \quad (20)$$

则  $e_1$  和  $e_2$  的组合概率质量由式 (21)~(24) 确定:

$$m_{n,e(2)} = K_0[m_{n,1}m_{n,2} + m_{n,1}(m_{\Theta,2} + m_{P(\Theta),2}) + m_{n,2}(m_{\Theta,1} + m_{P(\Theta),1})] \quad (21)$$

$$m_{\Theta,e(2)} = K_0(m_{\Theta,1}m_{\Theta,2} + m_{\Theta,1}m_{P(\Theta),2} + m_{P(\Theta),1}m_{\Theta,2}) \quad (22)$$

$$m_{P(\Theta),e(2)} = K_0m_{P(\Theta),1}m_{P(\Theta),2} \quad (23)$$

$$K_0 = \left(1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N m_{n,1}m_{n,2}\right)^{-1} \quad (24)$$

其中,  $m_{n,e(2)}$  表示  $e_1$  和  $e_2$  组合后分配给命题  $\theta_n$  的联合概率质量,  $m_{\Theta,e(2)}$  表示  $e_1$  和  $e_2$  组合后分配给辨识框架的联合概率质量,  $m_{P(\Theta),e(2)}$  表示  $e_1$  和  $e_2$  组合后分配给幂集的联合概率质量.  $K_0$  表示两条证据组合时的归一化系数, 以确保组合后的概率质量之和为 1. 相应的组合置信度可表示为式 (25) 和式 (26).

$$p_{n,e(2)} = \frac{m_{n,e(2)}}{1 - m_{P(\Theta),e(2)}}, \quad n = 1, \dots, N \quad (25)$$

$$p_{\Theta,e(2)} = \frac{m_{\Theta,e(2)}}{1 - m_{P(\Theta),e(2)}} \quad (26)$$

两条证据对应的评估结果可以表示为如下置信分布形式:

$$e(2) = \{(\theta_n, p_{n,e(2)}), n = 1, \dots, N; (\Theta, p_{\Theta,e(2)})\} \quad (27)$$

对于  $L$  条独立证据  $e_i, i = 1, \dots, L$ , 可重复式 (21)~(26), 将之前组合得到的基本概率质量与第 3 条证据的基本概率质量进行组合, 依次循环, 即可得到评估方案的最终评估结果

$$e(L) = \{(\theta_n, p_{n,e(L)}), n = 1, \dots, N; (\Theta, p_{\Theta,e(L)})\} \quad (28)$$

文献 [11] 已证明, 式 (21)~(26) 所示的 ER 算法可等价描述为

$$p_{n,e(2)} = K_1 \hat{m}_{n,e(2)}, \quad n = 1, \dots, N \quad (29)$$

$$p_{\Theta,e(2)} = K_1 \hat{m}_{\Theta,e(2)} \quad (30)$$

$$K_1 = \left(\sum_{n=1}^N m_{n,e(2)} + \hat{m}_{\Theta,e(2)}\right)^{-1} \quad (31)$$

$$\hat{m}_{n,e(2)} = [(1-w_1)m_{n,2} + (1-w_2)m_{n,1}] + [m_{n,1}m_{n,2} + m_{n,1}m_{\Theta,2} + m_{n,2}m_{\Theta,1}] \quad (32)$$

$$\hat{m}_{\Theta,e(2)} = [(1-w_1)m_{\Theta,2} + (1-w_2)m_{\Theta,1}] + m_{\Theta,1}m_{\Theta,2} \quad (33)$$

显然, 当证据的权重均为 1 时, 式 (29)~(33) 等价于式 (6), 即 ER 算法退化成 Dempster 组合规

则, 说明 Dempster 组合规则是 ER 算法的特例. 不同于 Dempster 组合规则, ER 算法将剩余信度分配给了各个单集, 把无知性分配给了辨识框架, 而 Dempster 组合规则将剩余信度直接全部分配给了辨识框架, 把它当作全局无知性来处理, 没有把剩余信度和无知性区分处理. 显然, ER 算法更为合理<sup>[11]</sup>.

在融合证据过程中, 式 (32) 中的第 1 项  $[(1-w_1)m_{n,2} + (1-w_2)m_{n,1}]$  表示证据个体支持的有界和, 第 2 项  $[m_{n,1}m_{n,2} + m_{n,1}m_{\Theta,2} + m_{n,2}m_{\Theta,1}]$  表示证据整体支持的正交和. 文献 [53] 对这两项在证据组合过程中的作用以及它们与证据权重的关系进行了深入的探讨和分析.

假设评估等级  $\theta_n$  的效用为  $u(\theta_n)$ , 那么该评估方案的期望效用计算如下<sup>[17]</sup>

$$u = \sum_{n=1}^N u(\theta_n)p_{n,e(L)} \quad (34)$$

**注 2.** 效用的概念在概率论中相当于数学期望. 式 (34) 进一步可以理解为离散型随机变量的数学期望, 表示对评估方案的评价的最终有效性, 其中  $u(\theta_n)$  相当于离散点的值,  $p_{n,e(L)}$  相当于离散点的概率.

ER 算法通过合理分配证据的权重和可靠度, 使得证据在不同的决策场景中具有与之相适应的特性, 从而保证了高冲突证据之间的准确融合, 避免了“反直觉”问题. 同时, 采用正交和算子进行证据组合, 通过迭代计算, 大大减小了传统证据组合的计算量, 在一定程度上克服了组合爆炸问题.

### 3.2 考虑区间权重的证据推理

作为证据理论的关键参数之一, 证据权重反映了决策者对证据的偏好程度, 并在很大程度上影响了证据组合结果. 以市场和商业制造为例, 顾客对产品的偏好往往决定了此类产品的市场销量. 因此, 如何确定证据权重成为了证据理论发展的一个重点<sup>[54]</sup>. Deng 等<sup>[55]</sup> 提出了一种客观赋权方法, 通过量化多准则决策中的对比强度和评估准则的冲突特征来得到属性权重, 为公司、企业的比较提供了借鉴. 文献 [56] 也提出了一种客观的权重求取方法, 用于解决竞争公司的业绩排名问题, 其中属性权重由给定方案生成的平均内在信息来衡量. 然而, 当所有的评估方案具有相似的绩效评级时, 即证据之间的相似性较强, 上述方法往往会将各证据的权重分配为基本相等, 导致权重偏低. 对于某些特定的场合, 如面向任务的决策, 证据权重可以通过决策者给出的一些模糊规则进行估计得到<sup>[57]</sup>. Deng 等<sup>[58]</sup> 提出了一种考虑区间权重的证据推理方法, 通过决策者

对基本属性的评估以及对评估方案的偏好程度来估计每个属性的权重区间. 结果表明, 决策者给出的偏好程度越高, 权重的估计结果就越准确. 该方法为市场上分析客户潜在需求和开发新产品提供了思路.

### 3.3 模糊证据推理

证据理论在工程系统的安全风险分析和信息融合应用过程中, 有时存在系统信息缺乏、历史经验不足、参数定义不明确、信息难以量化等问题, 单一的证据融合方法无法满足实际需要. 而模糊集理论提供了一种在决策过程中描述语义变量的方法, 无需专家提供存在风险因素的精确描述, 可以有效处理模糊信息, 是传统概率统计方法的有力补充<sup>[59]</sup>. 为了弥补证据理论的不足, Ishizuka 等<sup>[60]</sup>提出将模糊集理论和证据理论结合起来, 用于复杂问题决策.

模糊证据推理通常按照模糊隶属度函数的选择、基于证据理论的目标信息融合和评判准则的选取三个步骤实施. Liu 等<sup>[18]</sup>在模糊逻辑和 ER 方法的基础上, 提出了一种基于模糊规则的分层多专家安全分析与基于 ER 方法的融合框架, 为解决工程系统安全性评估中的混合不确定性问题提供了框架. FURBER 方法将传统的“IF-THEN”规则扩展到了具有置信结构的规则库, 其最突出的特点在于, 匹配函数的输入是数值形式, 语义值使用模糊隶属度函数进行表征, 同时适用于定量和定性属性. 该方法为规则库中的规则训练与更新提供了思路, 在工程和管理系统的安全性评估和设计决策支持方面, 特别是在最初的概念设计阶段潜力巨大. 周谥<sup>[61]</sup>针对模糊环境下的 MADM 问题, 将三角模糊权重引入到证据推理中, 研究了基于区间效用表达的证据推理 MADM 方法, 有效地解决了模糊信息与证据的融合问题. 宋亚飞等<sup>[62]</sup>从 Dempster 组合规则出发, 提出了一种基于复合可靠度的时域证据组合方法, 提高了识别系统的抗干扰能力. Yang 等<sup>[63]</sup>采用模糊证据推理对不充分和模糊的多准则信息进行处理, 并对油轮的选择过程进行了改进.

### 3.4 区间证据推理

最初的 D-S 证据理论只能用来组合确定的证据, 却无法有效处理不确定证据, 而决策者在决策过程中往往更倾向于给出区间形式的评价结果. Lee 等<sup>[64]</sup>最早开始研究具有区间置信结构的证据的组合, 并定义了一种广义的证据加和、乘法运算规则, 但也存在权重分配过于主观随意、证据组合前和组合后的非标准化等问题. Dencœux<sup>[65-66]</sup>系统地研究了区间证据的组合及归一化问题, 指出区间算

法并不适用于证据的组合概率质量计算, 也证明了区间证据组合不满足结合律, 并提出了一种新的区间证据组合及归一化方法. 但是该方法隔离了区间证据的组合和归一化过程, 反而增加了归一化后的区间证据的不确定性. 之后, Yager<sup>[67]</sup>也进行了相关研究, 但仍然存在区间证据的组合概率质量计算和归一化不当的问题. Wang 等<sup>[68]</sup>在 Dencœux 的研究基础上, 提出了一种用于组合和归一化区间置信结构的最优方法, 即区间证据推理 (Interval evidential reasoning, IER) 算法, 其中证据的组合和归一化同时进行而非单独进行.

在多属性决策分析 (Multiple attribute decision analysis, MADA) 问题中, 假设  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$  表示  $M$  个决策方案的集合,  $a_i$  表示第  $i$  个决策方案;  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_L\}$  表示每个决策方案可由  $L$  条独立证据进行评估得到; 若  $H = \{H_1, H_2, \dots, H_N\}$  为辨识框架, 那么证据  $e_i$  的区间置信结构可以表示为

$$S(e_i(a_j)) = \{(H_n, [\beta_{n,i}^-(a_j), \beta_{n,i}^+(a_j)]), n = 1, \dots, N\} \quad (35)$$

其中,  $i = 1, \dots, L$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,  $0 \leq \beta_{n,i}^-(a_j) \leq \beta_{n,i}^+(a_j)$ .  $[\beta_{n,i}^-(a_j), \beta_{n,i}^+(a_j)]$  表示决策方案  $a_j$  在证据  $e_i$  下被评估为等级  $H_n$  的置信度介于  $\beta_{n,i}^-(a_j)$  和  $\beta_{n,i}^+(a_j)$  之间. 显然, 当  $\beta_{n,i}^-(a_j) \equiv \beta_{n,i}^+(a_j)$  时, 区间置信结构等价于数值形式的置信结构. 因此, 当证据的置信结构均为数值形式时, IER 算法就退化成原始的 ER 算法, 即原始 ER 算法是 IER 算法的特例. 区间置信结构需满足的条件及组合优化过程详见文献 [68].

注 3. 第 3.1 节的辨识框架  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$  和本节的辨识框架  $H = \{H_1, H_2, \dots, H_N\}$  本质上是相同的, 二者可以互换, 具体描述形式取决于决策者.

### 3.5 证据推理规则

原始的 ER 算法只考虑了证据的归一化权重, 认为证据是完全可靠的. 但是, 由于不同的证据获取的方式不同, 且在获取过程中可能受到各种干扰的影响, 证据不一定完全可靠. 若此时仍采用 ER 算法组合证据, 组合结果将与实际结果存在较大误差. 因此, 考虑证据的可靠度, 进而增加证据的客观性就显得尤为重要了. 证据的可靠度和权重的区别在于, 可靠度反映了证据源为解决给定问题提供正确评估或解决问题的能力, 是证据的固有属性, 属于客观概念; 而权重反映了证据之间的相对重要性, 代表了决策者对证据的偏好程度, 随决策者的主观意志而改变, 属于主观概念<sup>[69-70]</sup>. ER 规则有效区分了证据的可靠度和权重, 并将二者融入到证据的置信分布中.

假设辨识框架为  $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ , 证据  $e_i$  可以表示为如式 (19) 所示的置信分布形式,  $e_i$  的权重和可靠度分别为  $w_i$  和  $r_i$ , 那么带有可靠度的证据的加权置信分布定义为

$$m_i = \{(\theta, \tilde{m}_{\theta,i}), \forall \theta \subseteq \Theta; (P(\Theta), \tilde{m}_{P(\Theta),i})\} \quad (36)$$

其中,

$$\tilde{m}_{\theta,i} = \begin{cases} 0, & \theta = \emptyset \\ c_{rw,i} m_{\theta,i}, & \theta \subseteq \Theta, \theta \neq \emptyset \\ c_{rw,i}(1 - r_i), & \theta = P(\Theta) \end{cases} \quad (37)$$

在式 (37) 中,  $c_{rw,i} = 1/(1 + w_i - r_i)$  表示归一化系数, 使  $\sum_{\theta \subseteq \Theta} \tilde{m}_{\theta,i} + \tilde{m}_{P(\Theta),i} = 1$ . 对于任意两条独立证据  $e_i$  和  $e_j$ , 假设其置信分布形式可由式 (36) 表达, 则  $e_i$  和  $e_j$  对命题  $\theta$  的联合支持  $p_{\theta,e(2)}$  由下式确定

$$p_{\theta,e(2)} = \begin{cases} 0, & \theta = \emptyset \\ \frac{\hat{m}_{\theta,e(2)}}{\sum_{A \subseteq \Theta} \hat{m}_{A,e(2)}}, & \theta \subseteq \Theta, \theta \neq \emptyset \end{cases} \quad (38)$$

$$\hat{m}_{\theta,e(2)} = [(1 - r_i)m_{\theta,j} + (1 - r_j)m_{\theta,i}] + \sum_{A \cap B = \theta} m_{A,i} m_{B,j}, \quad \forall \theta \subseteq \Theta \quad (39)$$

不失一般性, 对于  $L$  条独立证据  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_L\}$ , 它们对命题  $\theta$  的联合支持  $p_{\theta,e(L)}$  可通过不断迭代下式得到

$$\hat{m}_{\theta,e(k)} = [(1 - r_k)m_{\theta,e(k-1)} + m_{P(\Theta),e(k-1)}m_{\theta,k}] + \sum_{A \cap B = \theta} m_{A,e(k-1)}m_{B,k}, \quad \forall \theta \subseteq \Theta \quad (40)$$

$$\hat{m}_{P(\Theta),e(k)} = (1 - r_k)m_{P(\Theta),e(k-1)} \quad (41)$$

$$m_{\theta,e(k)} = \begin{cases} 0, & \theta = \emptyset \\ \frac{\hat{m}_{\theta,e(k)}}{\sum_{A \subseteq \Theta} \hat{m}_{A,e(k)} + \hat{m}_{P(\Theta),e(k)}}, & \theta \neq \emptyset \end{cases} \quad (42)$$

$$p_{\theta,e(k)} = \begin{cases} 0, & \theta = \emptyset \\ \frac{\hat{m}_{\theta,e(k)}}{\sum_{A \subseteq \Theta} \hat{m}_{A,e(k)}}, & \theta \subseteq \Theta, \theta \neq \emptyset \end{cases} \quad (43)$$

其中,  $k = 3, \dots, L$ .  $m_{\theta,e(k)}$  反映了前  $k$  条证据组合后对命题  $\theta$  的联合支持程度, 且有  $m_{\theta,e(1)} = m_{\theta,1}$ ,  $m_{P(\Theta),e(1)} = m_{P(\Theta),1}$ . 显然, 当  $r_k \equiv w_k$  时, 式 (40)~(43) 等价于式 (29)~(33), 即 ER 规则退化成原始的 ER 算法, 说明原始 ER 算法是 ER 规则的特例. 当  $r_k \equiv 1$  时, 式 (40)~(43) 等价于式 (6), 即 ER 规则退化成 Dempster 组合规则, 说明 Dempster 组

合规则也是 ER 规则的特例.

假设  $L$  条独立证据组合后的总体可靠度为  $r_{e(L)}$ , 组合权重为  $w_{e(L)}$ , 由式 (37) 可得  $m_{P(\Theta),e(L)} = (1 - r_{e(L)})/(1 + w_{e(L)} - r_{e(L)})$ . 因此,  $r_{e(L)}$  可由下式确定

$$r_{e(L)} = \frac{1 - m_{P(\Theta),e(L)}(1 + w_{e(L)})}{1 - m_{P(\Theta),e(L)}} \quad (44)$$

在式 (44) 中,  $w_{e(L)}$  的取值应该介于  $L$  条独立证据的最大权重  $\max\{w_i\}$  和 1 之间, 故有  $r_{e(L)}(w_{e(L)}) \in [r_{e(L)}(1), r_{e(L)}(\max\{w_i\})]$ .

### 3.6 数值仿真

为了进一步阐述 Dempster 组合规则、原始 ER 算法和 ER 规则之间的关系, 下面以文献 [71] 中的两条独立证据的组合为例进行说明. 假设辨识框架为  $\Theta = \{A, B\}$ , 证据  $e_1$  和  $e_2$  的置信分布如表 2 所示.

表 2 证据的置信分布  
Table 2 Belief distribution of evidence

证据	命题	
	A	B
$e_1$	0.8	0.2
$e_2$	0.4	0.6

假设  $e_1$  和  $e_2$  的权重及可靠度分别为  $w_1 = 0.2$ ,  $w_2 = 0.8$ ,  $r_1 = 0.8$ ,  $r_2 = 0.7$ , 根据式 (6)、式 (29)~(33) 和式 (40)~(43), 分别采用 Dempster 组合规则、原始 ER 算法和 ER 规则对证据进行组合, 得到结果如表 3 所示.

在表 3 中, 证据  $e_1$  和  $e_2$  不存在无知性, 且证据权重已经满足了归一化要求, 那么 Dempster 组合规则和原始 ER 算法的组合结果应当一致. 但是, Dempster 组合规则将全局无知性分配给了辨识框架  $\Theta$ , 导致  $m(\Theta) = m(P(\Theta))$ . 若将  $m(P(\Theta))$  重新分配给命题  $A$  和  $B$ , 那么  $p_{A,e(2)} = m_{A,e(2)}/(1 - m_{\Theta,e(2)}) = 0.452$ ,  $p_{B,e(2)} = m_{B,e(2)}/(1 - m_{\Theta,e(2)}) = 0.548$ , 该结果与原始 ER 算法的结果完全一致, 这也说明了证据的权重均为 1 时, ER 算法退化为 Dempster 组合规则.

同时, 若将证据的可靠度设置为  $r_1 = 0.2$ ,  $r_2 = 0.8$ , 基于式 (40)~(43) 所示的 ER 规则, 得到证据的组合结果如下所示

$$p_{\theta,e(2)} = \{(\emptyset, 0), (A, 0.4520), (B, 0.5480), (\Theta, 0)\} \quad (45)$$

显然, 式 (45) 与表 3 中原始 ER 算法的组合结果完全一致, 这也说明了证据的可靠度等于归一化权重时, ER 规则退化为原始 ER 算法.

表 3 证据组合结果的比较  
Table 3 Comparison of evidence combination results

组合规则	概率质量	$\emptyset$	$A$	$B$	$\Theta$	$P(\Theta)$
Dempster 组合规则	$m_1$	0	0.1600	0.0400	0.8000	0
	$m_2$	0	0.3200	0.4800	0.2000	0
	$\sum_{C \cap D = \emptyset} m_1(C)m_2(D)$	0.0896	0.3392	0.4112	0.1600	0
	$m$	0	0.3726	0.4517	0.1757	0
原始 ER 算法	$m_1$	0	0.1600	0.0400	0	0.8000
	$m_2$	0	0.3200	0.4800	0	0.2000
	$m_{\theta, e(2)}$	0	0.3726	0.4517	0	0.1757
	$p_{\theta, e(2)}$	0	0.4520	0.5480	0	0
ER 规则	$\tilde{m}_1$	0	0.4000	0.1000	0	0.5000
	$\tilde{m}_2$	0	0.2909	0.4364	0	0.2727
	$\hat{m}_{\theta, e(2)}$	0	0.1632	0.1272	0	0.0600
	$m_{\theta, e(2)}$	0	0.4658	0.3630	0	0.1712
	$p_{\theta, e(2)}$	0	0.5620	0.4380	0	0

## 4 证据理论的典型应用

证据推理已广泛用于评估决策等多个领域中,有效解决了多源不确定性问题. 本节主要从信息融合、多属性决策、模式识别等方面介绍证据推理的典型应用.

### 4.1 信息融合

信息融合早在 20 世纪 70 年代被称为数据融合,源于美国的声纳信号处理系统,后来在军事领域中受到广泛关注. 证据推理以其强大的证据融合能力,在信息融合中得到了深入发展.

文献 [72] 采用推广的 D-S 证据理论对距离图象和彩色图象进行融合,提高了融合结果的准确性与可靠性. 文献 [73] 将 D-S 证据理论用于解决海上识别和属性融合问题,围绕两种识别信息融合体系结构,对命题的生成和管理进行了详细讨论. Liu 等 [74] 针对异构遥感图像的检测和融合问题,提出了一种动态证据推理 (Dynamic evidential reasoning, DER) 方法,用于多时相图像的顺序融合. Paksoy 和 Göktürk [75] 采用不同的信息融合技术进行软件缺陷预测,通过实验验证了 D-S 证据理论的良好预测效果. Quost 等 [76] 针对分类器组合时证据不独立的问题,提出了一种基于  $t$  范数的改进 Dempster 组合规则,并通过实际数据集证明了所提方法的有效性. Li 等 [77] 提出了一种不确定条件下总生产计划 (Aggregate production planning, APP) 的分层置信规则库 (Belief rule base, BRB) 推理方法,为 APP 提供了一种高性能的解决方案. Zhou 等 [33] 提出了一种新的使用故障数据和专家知识的基于

BRB 和 ER 的模型,将异步多源信息转换到同一标准框架下并进行融合,用于预测和评估航空装备的寿命. Kong 等 [78] 采用 ER 方法融合客观质量指标、主观专家判断和患者反馈,对医院的整体质量进行系统全面的评估,为医学质量评估提供了新的融合框架. Zhu 等 [79] 为了提高证券分析师预测信息的利用率,提出了一种二维渐进框架下的证据推理算法和证据组合方法,对证券分析师的股票评级信息进行融合,提高了融合结果的准确性. Li 等 [80] 针对滑坡坝灾害评估中的数据不完整和不准确问题,提出了一种基于多尺度临近语义术语和证据推理的灾害评估方法,并以 2008 年汶川地震为背景,对 7 座滑坡坝进行灾害评估,验证了所提方法的有效性和合理性.

### 4.2 多属性决策

MADM 早在 20 世纪 90 年代得到研究,也称为有限方案多目标决策,主要涉及离散、有限个决策方案的决策问题 [81]. 证据推理最早是在 MADM 背景下提出来的,并为解决不确定多属性决策问题提供了思路.

Yang 和 Sen [82] 对 ER 方法在复杂工程产品改造设计中的应用进行了梳理和总结,并采用 ER 方法对近海渡轮的改装设计进行了方案筛选. 文献 [83] 针对传统数学决策方法在定性知识和定量信息建模中的不足,提出了一种基于近似推理和证据推理的复合决策方法,用于海洋工程产品在初始设计阶段的性能评估. Wang 和 Elhag [84] 提出了一种基于证据推理的桥梁安全性评估方法,实现了桥梁整体安

全性的分布式评估, 克服了决策者的主观意志带来的不确定性. 付艳华等<sup>[85]</sup>采用证据推理对 MADM 问题中的不确定性进行建模, 为供应商绩效评估和选择中的定性知识和定量信息的表达提供了统一的框架. Shintemirov 等<sup>[86]</sup>提出了一种基于证据推理的变压器绕组评估方法, 将频率响应分析法 (Frequency response analysis, FRA) 评估过程转换为 ER 框架下的 MADM 问题, 克服了传统的 FRA 在处理不确定性方面的不足. 沈江等<sup>[87]</sup>针对 MADM 中的异构数据融合与决策问题, 提出了一种基于 D-S 证据理论的证据链融合推理方法, 并在心脏病诊断案例中验证了所提方法的有效性. 刘佳俊等<sup>[88]</sup>提出了一种基于 BRB 和 ER 的装备寿命评估方法, 提高了 BRB 专家系统的评估能力, 有效解决了航天产品试验样本少、寿命评估难等问题. Li 等<sup>[89]</sup>提出了一种基于条件广义最小方差和置信规则库的复杂系统安全性评估模型, 采用 ER 方法进行模型推理, 并对 WD615 型柴油机的安全性进行评估, 提高了评估结果的准确性, 降低了计算复杂度. Bao 等<sup>[90]</sup>提出了一种基于期望理论和 ER 方法的直观模糊决策方法, 并在权重不完整和未知的情况下对属性权重进行了优化, 并将其应用于解决 MADM 中的决策方案排序问题. Zhou 等<sup>[91]</sup>将 ER 规则推广至群决策环境下的 MADM 问题, 充分考虑了专家和证据的区间权重和可靠度, 并对电动汽车的使用寿命进行了评估.

### 4.3 模式识别

模式识别又称为模式分类, 是指通过计算机用数学技术方法来研究模式的自动处理和判读, 是机器学习领域的一个新热点<sup>[92]</sup>. 证据推理作为一种强大的不确定性推理方式, 在模式识别领域受到了广泛关注.

Van Cleynenbreugel 等<sup>[93]</sup>通过对同一场景的多时间 SPOT 图像进行信息提取, 获取各道路段的证据, 并采用 D-S 证据理论进行道路网络的路段识别, 提高了识别的准确率. 文献 [94] 采用 ER 方法对遥感多源数据进行分类, 将证据的置信度表示为区间概率形式以表达不确定性, 并对 201 波段高分辨率成像光谱仪数据进行了有效分类. 司小胜等<sup>[95]</sup>提出了一种基于证据推理的故障预报模型, 通过非线性优化来确定预测模型的参数, 有效解决了定量与定性不确定性信息下的非线性系统故障预报问题, 并探索了该方法在工程实际中的应用潜力. Liu 等<sup>[96]</sup>提出了一种基于原型的信用分类方法来处理不完整模式的分类问题, 根据训练本来估计数据

的缺失值, 通过证据的组合获得了不完整模式的分类结果, 在实验测试中证明了所提方法的有效性. 文献 [97] 从证据的内部冲突和外部冲突出发计算证据的相似性测度, 对证据进行修正, 基于聚类分析和 Dempster 组合规则, 有效解决了冲突证据合成的“反直觉”问题. Wang 等<sup>[98]</sup>针对离散模糊集和传统匹配度方法存在的信息丢失问题, 提出了一种新的基于直觉梯形模糊数和包含度量的直觉模糊证据推理方法, 提高了证据表示和推理的准确性, 所提方法在中风诊断中得到了验证. 周志杰等<sup>[99]</sup>提出了一种基于三阶 Volterra 级数和 ER 算法的航天继电器故障预测方法, 为有效预防航天继电器发生故障提供了辅助支持. 袁杰等<sup>[100]</sup>针对过程知识类型多样和运行数据不准确的复杂工业流程, 采用 D-S 证据理论融合混合专家知识系统来进行故障诊断, 提高了专家知识的利用率和专家系统的智能化程度. Xu 等<sup>[101]</sup>提出了一种基于 ER 规则的分类方法, 充分考虑了证据的权重和可靠度, 并利用 UCI 机器学习数据库中的 5 个流行的 Benchmark 数据库证明了所提分类方法具有较高的准确性. Yang 等<sup>[102]</sup>针对客户投诉中存在的信息不准确和不一致的问题, 开发了一种基于 ER 规则的分类器, 以作为决策支持系统的核心组件, 为电信公司提供了信息化和数据驱动的方法.

### 4.4 其他应用

Sönmez 等<sup>[103]</sup>采用证据推理方法来解决承包商资格预审问题, 为解决决策者因信息缺乏、时间紧张和专业知识的匮乏等而需要进行不确定、不完整或不精确评估的问题提供了有效的评估机制. Yang 等<sup>[104]</sup>研究了递归 ER 算法的非线性特征, 并将其应用于汽车发动机质量的评估和船舶设计的评估问题, 证明了 ER 方法在处理一般决策问题方面的潜力. 文献 [105] 以大肠杆菌群和异养板数为证据源, 采用 D-S 证据理论进行证据组合, 对供水网络的微生物水质进行评估, 为决策者提供了辅助决策. Xu 等<sup>[106]</sup>将 ER 方法作为 BRB 专家系统的推理机, 探讨了 BRB 的训练方法, 将其应用于管道泄漏检测. Zhou 等<sup>[107]</sup>提出了一种专家干预下的基于 BRB 专家系统的在线更新算法, 实现了管道泄漏的有效检测. 为了进一步提高预测精度, Zhou 等<sup>[108]</sup>又提出了一种由两个 BRB 组成的系统行为预测模型, 充分融合专家知识, 并提出了预测模型的递推更新算法, 分别用于处理判断输出和数值输出. Hu 等<sup>[109]</sup>提出了一种新的基于 ER 算法的系统可靠性预测技术, 并对涡轮增压器发动机系统的可靠性进行预测,

提高了预测性能和速度. Chen 等<sup>[110]</sup>提出了两种优化方法,应用 BRB 系统求解了一个非线性现金流约束下的高维非线性投资组合优化问题,对 RiskMetrics WealthBench 系统进行了有效的补充. Fu 等<sup>[111]</sup>针对多属性群决策分析中存在的专家不可靠问题,在考虑专家可靠度的基础上提出了一种新的基于 ER 规则的决策方法,并对安徽省芜湖市进行了行业评价. Chen 等<sup>[112]</sup>针对离散置信结构的组合问题,将传统的证据推理扩展至具有离散结构的证据推理,为非冲突离散证据的组合提供了合理方案,同时有效解决了内部或外部冲突证据组合产生的“反直觉”问题.

## 5 结论

本文总结分析了证据推理理论的发展过程,系统梳理了国内外典型相关文献的主要工作,为证据推理的发展和改进提供了一定的参考和借鉴.作为一种强大的不确定性推理方法,证据推理为不确定信息的表达和传递提供了一个良好的框架,在评估与决策中发挥了重要作用,其主要特征总结如下:

1) 证据推理构成联合概率推理过程,是传统贝叶斯理论的一般化,其推理过程清晰透明,具有可解释性.证据推理采用正交和算子对证据的加权置信分布进行运算,通过严格的概率推理,保证了证据组合过程的可追溯,推理结果为置信分布形式,保证了可解释性,同时满足证据组合的可交换性和可结合性.

2) 证据的三要素包括置信分布、权重和可靠度,其中权重和可靠度可通过历史数据进行训练以优化系统的性能.证据的置信分布是证据的基本表达形式,是一种广义的概率表达,既能够表征局部无知性,也能够表征全局无知性.由于证据的权重和可靠度在大多数情况下是由专家依据领域经验而给出的,带有一定的主观性和不确定性,因此有必要对其进行优化更新,以获取更精确的权重和可靠度,保证融合结果的准确性.

3) 证据推理可以是纯数据驱动型,也可以融合定量信息和定性知识.通过一定的规则,证据推理能够将各种形式的输入转化至统一的置信框架,并进行证据的组合,而这也恰恰是证据推理相比于决策理论、模糊理论和传统贝叶斯理论的优势所在.

4) 证据推理可以对多种不确定性进行表达、建模和分析,如随机性、模糊性和无知性等.证据推理提供了一种强有力的信息表达方式,不确定性能够通过一定的规则转化为概率,并通过置信分布形式进行表达,并在证据组合的过程中无损失地传递,

直至组合结果.此外,证据推理可以有效表达区间形式的不确定性,这也进一步提高了其表达不确定性的能力<sup>[113]</sup>.

5) 证据推理满足不支持原则、一致性原则、局部性原则和非支配性原则.其中,不支持原则是指如果没有任何证据支持某个假设,则合成之后的结果也将不支持该假设;一致性原则是指如果所有证据完全支持某个假设,则合成之后的结果也将完全支持该假设;局部性原则是指如果所有证据支持相同的假设子集,则合成之后的结果也将支持该假设子集,而不支持该假设子集之外的假设和假设子集;非支配性原则是指如果至少一条证据支持某个假设,且没有任何证据起支配作用,则合成之后的结果也将部分支持该假设.

证据推理的未来发展可分为以下几个方面:

1) 互斥证据组合的合理性证明.尽管目前学术界普遍认为两条互斥证据的组合应该是加性的,但仍需要从概率统计的角度给出严格证明.因此,给出互斥证据组合的合理性证明是支撑证据推理理论发展的核心之一.

2) 不独立证据的组合.证据推理理论的前提条件是每条证据相互独立,而在实际应用背景中,证据之间会存在相关性,难以保证相互独立.因此,研究一种新的不依赖于证据独立的证据组合规则是证据推理理论发展的方向之一.

3) 证据权重与可靠度的确定.作为证据的两大关键参数,证据权重和可靠度在学术界得到了广泛研究.典型的权重求取方法有变异系数法,离差最大化法,客观赋权法,专家打分法等;而典型的可靠度求取方法有基于距离的方法,基于概率统计的方法,面向任务的方法,基于复杂度的方法等.但所提方法大多只适用于一定的工程背景,不具有普适性.因此,研究一种通用的证据权重及可靠度确定方法是证据推理理论发展的重点之一.

4) 证据的扰动分析.在工程实践中,复杂系统往往会受到各种扰动因素的影响,如何定量表征扰动对证据源的影响程度、确保证据在获取过程中不会受到损失、缓解并消除扰动的作用,是证据推理鲁棒性研究的关键所在.

5) 可解释的深度证据推理.证据推理在低维系统建模方面的效果较为理想,但在高维复杂系统中的建模能力仍有待进一步检验.深度学习是目前人工智能领域较受欢迎的方法,具有强大的数据挖掘和学习能力,但缺乏可解释性.因此,如何在保证证据推理可解释性的前提下,将证据推理和深度学习相结合,以提高证据推理的建模学习能力,是证据推理理论未来向深入拓展的立足点之一.

6) 基于证据推理的数据分析与可解释机器学习

习. 在大数据和人工智能盛行的背景下, 机器学习以其拟合性能好、算法精度和运行效率高等特点脱颖而出. 然而, 机器学习无法综合考虑专家系统存在的各类不确定性, 存在可解释性难以保持的不足. 作为专家系统的强大引擎和信息融合机制, 证据推理可以较好地弥补这些不足, 实现有效的数据分析和可解释机器学习, 这也是证据推理未来的发展趋势之一.

## References

- 1 Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, **38**(2): 325–339
- 2 Dempster A P. A generalization of Bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1968, **30**(2): 205–247
- 3 Shafer G. *A Mathematical Theory of Evidence*. London: Princeton University Press, 1976.
- 4 Yang J B, Sen P. A general multi-level evaluation process for hybrid MADM with uncertainty. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1994, **24**(10): 1458–1473
- 5 Yang J B, Singh M G. An evidential reasoning approach for multiple-attribute decision making with uncertainty. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1994, **24**(1): 1–18
- 6 Pal N R, Bezdek J C, Hemasinha R. Uncertainty measures for evidential reasoning I: A review. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1992, **7**(3–4): 165–183
- 7 Kang Yao-Hong. *Theory and Application of Data Fusion*. Xi'an: Xidian University Press, 1997.  
(康耀红. 数据融合理论与应用. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1997.)
- 8 Zadeh L A. *On the Validity of Dempster's Rule of Combination of Evidence*. ERL Memo M79/24, University of California, USA, 1979.
- 9 Gordon J, Shortliffe E H. A method for managing evidential reasoning in a hierarchical hypothesis space. *Artificial Intelligence*, 1985, **26**(3): 323–357
- 10 Jiang W. A correlation coefficient for belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2018, **103**: 94–106
- 11 Yang J B, Xu D L. Evidential reasoning rule for evidence combination. *Artificial Intelligence*, 2013, **205**: 1–29
- 12 Smets P. The degree of belief in a fuzzy event. *Information Sciences*, 1981, **25**(1): 1–19
- 13 Smets P, Kennes R. The transferable belief model. *Artificial Intelligence*, 1994, **66**(2): 191–234
- 14 Pawlak Z. Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 1982, **11**(5): 341–356
- 15 Voorbraak F. A computationally efficient approximation of Dempster-Shafer theory. *International Journal of Man-Machine Studies*, 1988, **30**(5): 525–536
- 16 Cobb B R, Shenoy P P. A comparison of Bayesian and belief function reasoning. *Information Systems Frontiers*, 2003, **5**(4): 345–358
- 17 Yang J B. Rule and utility based evidential reasoning approach for multiattribute decision analysis under uncertainties. *European Journal of Operational Research*, 2001, **131**(1): 31–61
- 18 Liu J, Yang J B, Wang J, Sii H S. Engineering system safety analysis and synthesis using the fuzzy rule-based evidential reasoning approach. *Quality and Reliability Engineering International*, 2005, **21**(4): 387–411
- 19 Wang Y M, Yang J B, Xu D L. Environmental impact assessment using the evidential reasoning approach. *European Journal of Operational Research*, 2006, **174**(3): 1885–1913
- 20 Xu D L, Yang J B, Wang Y M. The evidential reasoning approach for multi-attribute decision analysis under interval uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 2006, **174**(3): 1914–1943
- 21 Gao B, Ni M F. A note on article “The evidential reasoning approach for multiple attribute decision analysis using interval belief degrees”. *European Journal of Operational Research*, 2009, **197**(2): 809–812
- 22 Deneoux T, Zouhal L M. Handling possibilistic labels in pattern classification using evidential reasoning. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **122**(3): 409–424
- 23 Liu Zhun-Ga, Pan Quan, Dezert J, Zhou Kuang, Jiao Lian-Meng. *Classification and Fusion of Uncertain Data Trust*. Beijing: Science Press, 2016.  
(刘准钊, 潘泉, Dezert J, 周旷, 焦连猛. 不确定数据信任分类与融合. 北京: 科学出版社, 2016.)
- 24 Florea M C, Josselme A L, Bossé É, Grenier D. Robust combination rules for evidence theory. *Information Fusion*, 2009, **10**(2): 183–197
- 25 Smets P. Analyzing the combination of conflicting belief functions. *Information Fusion*, 2007, **8**(4): 387–412
- 26 Barnett J A. Computational methods for a mathematical theory of evidence. In: Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Vancouver, Canada: William Kaufmann, 1981. 868–875
- 27 Yang J B, Liu J, Wang J, Sii H S, Wang H W. Belief rule-based inference methodology using the evidential reasoning approach-RIMER. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 2006, **36**(2): 266–285
- 28 Zhou Zhi-Jie, Chen Yu-Wang, Hu Chang-Hua, Zhang Bang-Cheng, Chang Lei-Lei. *Evidential Reasoning, Belief Rule Base and Complex System Modeling*. Beijing: Science Press, 2017.  
(周志杰, 陈玉旺, 胡昌华, 张邦成, 常雷雷. 证据推理、置信规则库与复杂系统建模. 北京: 科学出版社, 2017.)
- 29 Xu Xiao-Bin, Wen Cheng-Lin, Sun Xin-Ya, Ji Yin-Dong. *Evidence Fusion and Decision-making Methods in Equipment Fault Diagnosis*. Beijing: Science Press, 2017.  
(徐晓滨, 文成林, 孙新亚, 吉吟东. 设备故障诊断中的证据融合与决策方法. 北京: 科学出版社, 2017.)
- 30 Yang J B, Xu D L. On the evidential reasoning algorithm for multiple attribute decision analysis under uncertainty. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics — Part A: Systems and Humans*, 2002, **32**(3): 289–304
- 31 Yang J B, Wang Y M, Xu D L, Chin K S. The evidential reasoning approach for MADA under both probabilistic and fuzzy uncertainties. *European Journal of Operational Research*, 2006, **171**(1): 309–343
- 32 Guo M, Yang J B, Chin K S, Wang H W. Evidential reasoning based preference programming for multiple attribute decision analysis under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 2007, **182**(3): 1294–1312
- 33 Zhou Z J, Chang L L, Hu C H, Han X X, Zhou Z G. A new BRB-ER-based model for assessing the lives of products using both failure data and expert knowledge. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, **46**(11): 1529–1543
- 34 Hu Guan-Yu. Study on Network Security Situation Awareness Based on Belief Rule Base [Ph.D. dissertation], Harbin University of Science and Technology, China, 2016.  
(胡冠宇. 基于置信规则库的网络安全态势感知技术研究 [博士学位论文], 哈尔滨理工大学, 中国, 2016.)
- 35 Huber R. Scene classification of SAR images acquired from anti-parallel tracks using evidential and rule-based fusion. *Image and Vision Computing*, 2001, **19**(13): 1001–1010
- 36 Wang Y M, Elhag T M S. A comparison of neural network, evidential reasoning and multiple regression analysis in modeling bridge risks. *Expert Systems with Applications*, 2007, **32**(2): 336–348

- 37 Bazargan-Lari R M. An evidential reasoning approach to optimal monitoring of drinking water distribution systems for detecting deliberate contamination events. *Journal of Cleaner Production*, 2014, **78**: 1–14
- 38 Durbach I N, Stewart T J. Modeling uncertainty in multi-criteria decision analysis. *European Journal of Operational Research*, 2012, **223**(1): 1–14
- 39 Zhou Zhi-Jie, Yang Jian-Bo, Hu Chang-Hua, Xu Dong-Ling. *Belief Rule Base Expert System and Complex System Modeling*. Beijing: Science Press, 2011.  
(周志杰, 杨剑波, 胡昌华, 徐冬玲. 置信规则库专家系统与复杂系统建模. 北京: 科学出版社, 2011.)
- 40 Bustince H, Burillo P. Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations: Application to approximate reasoning. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, **113**(2): 205–219
- 41 Chen S M, Hsiao W H. Bidirectional approximate reasoning for rule-based systems using interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, **113**(2): 185–203
- 42 Haenni R. Shedding new light on Zadeh's criticism of Dempster's rule of combination. In: Proceedings of the 7th International Conference on Information Fusion. Philadelphia, SUA: IEEE, 2005.
- 43 Huynh V N, Nakamori Y, Ho T B, Murai T. Multiple-attribute decision making under uncertainty: The evidential reasoning approach revisited. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics — Part A: Systems and Humans*, 2006, **36**(4): 804–822
- 44 Hu Chang-Hua, Si Xiao-Sheng, Zhou Zhi-Jie, Wang Peng. An improved D-S algorithm under the new measure criteria of evidence conflict. *Acta Electronica Sinica*, 2009, **37**(7): 1578–1583  
(胡昌华, 司小胜, 周志杰, 王鹏. 新的证据冲突衡量标准下的 D-S 改进算法. 电子学报, 2009, **37**(7): 1578–1583)
- 45 Han De-Qiang, Han Chong-Zhao, Deng Yong, Yang Yi. Weighted combination of conflicting evidence based on evidence variance. *Acta Electronica Sinica*, 2011, **39**(3A): 153–157  
(韩德强, 韩崇昭, 邓勇, 杨艺. 基于证据方差的加权证据组合. 电子学报, 2011, **39**(3A): 153–157)
- 46 Yager R R. On the Dempster-Shafer framework and new combination rules. *Information Sciences*, 1987, **41**(2): 93–137
- 47 Dubois D, Prade H. Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures. *Computational Intelligence*, 1988, **4**(3): 244–264
- 48 Smarandache F, Dezert J. Proportional conflict redistribution rules for information fusion. *Advances and Applications of DSmT for Information Fusion (Collected Works)*. Rehoboth: American Research Press, 2006. 3–68
- 49 Simard M A, Couture J, Bosse E. Data fusion of multiple-sensors attribute information for target-identity estimation using a Dempster-Shafer evidential combination algorithm. In: Proceedings of the SPIE 2759, Signal and Data Processing of Small Targets 1996. Orlando, USA: SPIE, 1996. 577–588
- 50 Lefevre E, Colot O, Vannoorenberghe P. Belief function combination and conflict management. *Information Fusion*, 2002, **3**(2): 149–162
- 51 Chen T L, Que P W. Target recognition based on modified combination rule. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2006, **17**(2): 279–283
- 52 Jiang W, Zhan J. A modified combination rule in generalized evidence theory. *Applied Intelligence*, 2017, **46**(3): 630–640
- 53 Chen Y, Chen Y W, Xu X B, Pan C C, Yang J B, Yang G K. A data-driven approximate causal inference model using the evidential reasoning rule. *Knowledge-Based Systems*, 2015, **88**: 264–272
- 54 Keeney R L, Raiffa H. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. New York: Cambridge University Press, 1993.
- 55 Deng H P, Yeh C H, Willis R J. Inter-company comparison using modified TOPSIS with objective weights. *Computers and Operations Research*, 2000, **27**(10): 963–973
- 56 Diakoulaki D, Mavrotas G, Papayannakis L. Determining objective weights in multiple criteria problems: The CRITIC method. *Computers and Operations Research*, 1995, **22**(7): 763–770
- 57 Yeh C H, Willis R J, Deng H P, Pan H Q. Task oriented weighting in multi-criteria analysis. *European Journal of Operational Research*, 1999, **119**(1): 130–146
- 58 Deng M R, Xu W X, Yang J B. Estimating the attribute weights through evidential reasoning and mathematical programming. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 2004, **3**(3): 419–428
- 59 Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, **8**(3): 338–353
- 60 Ishizuka M, Fu K S, Yao J T P. Inference procedures under uncertainty for the problem-reduction method. *Information Sciences*, 1982, **28**(3): 179–206
- 61 Zhou Mi. Research on Some Problems in the Multiple Attribute Decision Making Based on Evidential Reasoning Approach [Ph.D. dissertation], Hefei University of Technology, China, 2009.  
(周谧. 基于证据推理的多属性决策中若干问题的研究 [博士学位论文], 合肥工业大学, 中国, 2009.)
- 62 Song Ya-Fei, Wang Xiao-Dan, Lei Lei. Combination of temporal evidence sources based on intuitionistic fuzzy sets. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(9): 1322–1338  
(宋亚飞, 王晓丹, 雷蕾. 基于直觉模糊集的时域证据组合方法研究. 自动化学报, 2016, **42**(9): 1322–1338)
- 63 Yang Z L, Maistralis L, Bonsall S, Wang J. Use of fuzzy evidential reasoning for vessel selection under uncertainty. *Multi-Criteria Decision Making in Maritime Studies and Logistics*. Cham: Springer, 2018. 105–121
- 64 Lee E S, Zhu Q. An interval Dempster-Shafer approach. *Computers and Mathematics with Applications*, 1992, **24**(7): 89–95
- 65 Deneux T. Reasoning with imprecise belief structures. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1999, **20**(1): 79–111
- 66 Deneux T. Modeling vague beliefs using fuzzy-valued belief structures. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, **116**(2): 167–199
- 67 Yager R R. Dempster-Shafer belief structures with interval valued focal weights. *International Journal of Intelligent Systems*, 2001, **16**(4): 497–512
- 68 Wang Y M, Yang J B, Xu D L, Chin K S. On the combination and normalization of interval-valued belief structures. *Information Sciences*, 2007, **177**(5): 1230–1247
- 69 Xu Xiao-Bin, Zheng Jin, Xu Dong-Ling, Yang Jian-Bo. Information fusion method for fault diagnosis based on evidential reasoning rule. *Control Theory and Applications*, 2015, **32**(9): 1170–1182  
(徐晓滨, 郑进, 徐冬玲, 杨剑波. 基于证据推理规则的信息融合故障诊断方法. 控制理论与应用, 2015, **32**(9): 1170–1182)
- 70 Zhao F J, Zhou Z J, Hu C H, Chang L L, Zhou Z G, Li G L. A new evidential reasoning-based method for online safety assessment of complex systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, **48**(6): 954–966
- 71 Smarandache F, Dezert J, Tacnet J M. Fusion of sources of evidence with different importances and reliabilities. In: Proceedings of the 13th International Conference on Information Fusion. Edinburgh, UK: IEEE, 2010. 1–8
- 72 Wu Yong-Ge, Huang Jiong, Yang Jing-Yu. Mobile robot obstacle detection and environment modeling with sensor fusion. *Acta Automatica Sinica*, 1997, **23**(5): 641–648  
(邬永革, 黄炯, 杨静宇. 基于多传感器信息融合的机器人障碍检测和环境建模. 自动化学报, 1997, **23**(5): 641–648)
- 73 Bosse E, Simard M A. Managing evidential reasoning for identity information fusion. *Optical Engineering*, 1998, **37**(2): 391–400
- 74 Liu Z G, Dezert J, Mercier G, Pan Q. Dynamic evidential reasoning for change detection in remote sensing images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2012, **50**(5): 1955–1967
- 75 Paksoy A, Göktürk M. Information fusion with Dempster-Shafer evidence theory for software defect prediction. *Procedia Computer Science*, 2011, **3**: 600–605

- 76 Quost B, Masson M H, Denœux T. Classifier fusion in the Dempster-Shafer framework using optimized  $t$ -norm based combination rules. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2011, **52**(3): 353–374
- 77 Li B, Wang H W, Yang J B, Guo M, Qi C. A belief-rule-based inference method for aggregate production planning under uncertainty. *International Journal of Production Research*, 2013, **51**(1): 83–105
- 78 Kong G L, Xu D L, Yang J B, Ma X M. Combined medical quality assessment using the evidential reasoning approach. *Expert Systems with Applications*, 2015, **42**(13): 5522–5530
- 79 Zhu W D, Wang Y L, Wu Y, Sun Y B. A fusion model for securities analysts' stock rating information based on the evidential reasoning algorithm under two-dimensional progressive recognition framework. *International Journal of Security and Its Applications*, 2016, **10**(7): 213–228
- 80 Li F J, Qian Y H, Wang J T, Liang J Y. Multigranulation information fusion: A Dempster-Shafer evidence theory-based clustering ensemble method. *Information Sciences*, 2017, **378**: 389–409
- 81 Von Winterfeldt D, Edwards W. *Decision Analysis and Behavioral Research*. New York: Cambridge University Press, 1986. 6–8
- 82 Yang J B, Sen P. Multiple attribute design evaluation of complex engineering products using the evidential reasoning approach. *Journal of Engineering Design*, 1997, **8**(3): 211–230
- 83 Sii H S, Wang J. A design-decision support framework for evaluation of design options/proposals using a composite structure methodology based on the approximate reasoning approach and the evidential reasoning method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 2003, **217**(1): 59–76
- 84 Wang Y M, Elhag T. M S. Evidential reasoning approach for bridge condition assessment. *Expert Systems with Applications*, 2008, **34**(1): 689–699
- 85 Fu Yan-Hua, Zhang Hua-Guang, Tang Jia-Fu. Performance evaluation for selection of supplier and decision-making based on evidential reasoning. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2009, **30**(11): 1546–1549 (付艳华, 张化光, 唐加福. 基于证据推理的供应商绩效评价与决策. 东北大学学报(自然科学版), 2009, **30**(11): 1546–1549)
- 86 Shintemirov A, Tang W H, Wu Q H. Transformer winding condition assessment using frequency response analysis and evidential reasoning. *IET Electric Power Applications*, 2010, **4**(3): 198–212
- 87 Shen Jiang, Yu Hai-Yan, Xu Man. Heterogeneous evidence chains based fusion reasoning for multi-attribute group decision making. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(4): 832–842 (沈江, 余海燕, 徐曼. 实体异构性下证据链融合推理的多属性群决策. 自动化学报, 2015, **41**(4): 832–842)
- 88 Liu Jia-Jun, Hu Chang-Hua, Zhou Zhi-Jie, Zhang Xin, Wang Peng. Life assessment approach of equipment based on belief-rule-base and evidential reasoning. *Control Theory and Applications*, 2015, **32**(2): 231–238 (刘佳俊, 胡昌华, 周志杰, 张鑫, 王鹏. 基于证据推理和置信规则库的装备寿命评估. 控制理论与应用, 2015, **32**(2): 231–238)
- 89 Li G L, Zhou Z J, Hu C H, Chang L L, Zhou Z G, Zhao F J. A new safety assessment model for complex system based on the conditional generalized minimum variance and the belief rule base. *Safety Science*, 2017, **93**: 108–120
- 90 Bao T T, Xie X L, Long P Y, Wei Z K. MADM method based on prospect theory and evidential reasoning approach with unknown attribute weights under intuitionistic fuzzy environment. *Expert Systems with Applications*, 2017, **88**: 305–317
- 91 Zhou M, Liu X B, Chen Y W, Yang J B. Evidential reasoning rule for MADM with both weights and reliabilities in group decision making. *Knowledge-Based Systems*, 2018, **143**: 142–161
- 92 Wang Hong-Qiao, Sun Fu-Chun, Cai Yan-Ning, Chen Ning, Ding Lin-Ge. On multiple kernel learning methods. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(8): 1037–1050 (汪洪桥, 孙富春, 蔡艳宁, 陈宁, 丁林阁. 多核学习方法. 自动化学报, 2010, **36**(8): 1037–1050)
- 93 Van Cleynenbreugel J, Osinga S A, Fierens F, Suetens P, Oosterlinck A. Road extraction from multi-temporal satellite images by an evidential reasoning approach. *Pattern Recognition Letters*, 1991, **12**(6): 371–380
- 94 Kim H, Swain P H. Evidential reasoning approach to multi-source-data classification in remote sensing. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1995, **25**(8): 1257–1265
- 95 Si Xiao-Sheng, Hu Chang-Hua, Zhou Zhi-Jie. Fault prediction model based on evidential reasoning approach. *Science China Information Sciences*, 2010, **40**(7): 954–967 (司小胜, 胡昌华, 周志杰. 基于证据推理的故障预报模型. 中国科学: 信息科学, 2010, **40**(7): 954–967)
- 96 Liu Z G, Pan Q, Mercier G, Dezert J. A new incomplete pattern classification method based on evidential reasoning. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, **45**(4): 635–646
- 97 Li Xin-De, Wang Feng-Yu. A method of evidence reasoning based on ISODATA clustering and improved similarity measure. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(3): 575–590 (李新德, 王丰羽. 一种基于 ISODATA 聚类和改进相似度的证据推理方法. 自动化学报, 2015, **41**(3): 575–590)
- 98 Wang Y N, Dai Y P, Chen Y W, Meng F C. The evidential reasoning approach to medical diagnosis using intuitionistic fuzzy Dempster-Shafer theory. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 2015, **8**(1): 75–94
- 99 Zhou Zhi-Jie, Zhao Fu-Jun, Hu Chang-Hua, Wang Li, Feng Zhi-Chao, Liu Tao-Yuan. Failure prognosis method based on evidential reasoning for aerospace relay. *Journal of Shandong University (Engineering Science)*, 2017, **47**(5): 22–29 (周志杰, 赵福均, 胡昌华, 王力, 冯志超, 刘涛源. 基于证据推理的航天继电器故障预测方法. 山东大学学报(工学版), 2017, **47**(5): 22–29)
- 100 Yuan Jie, Wang Fu-Li, Wang Shu, Zhao Lu-Ping. A fault diagnosis approach by D-S fusion theory and hybrid expert knowledge system. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(9): 1580–1587 (袁杰, 王福利, 王姝, 赵露平. 基于 D-S 融合的混合专家知识系统故障诊断方法. 自动化学报, 2017, **43**(9): 1580–1587)
- 101 Xu X B, Zheng J, Yang J B, Xu D L, Chen Y W. Data classification using evidence reasoning rule. *Knowledge-Based Systems*, 2017, **116**: 144–151
- 102 Yang Y, Xu D L, Yang J B, Chen Y W. An evidential reasoning-based decision support system for handling customer complaints in mobile telecommunications. *Knowledge-Based Systems*, 2018, **162**: 202–210
- 103 Sönmez M, Holt G D, Yang J B, Graham G. Applying evidential reasoning to prequalifying construction contractors. *Journal of Management in Engineering*, 2002, **18**(3): 111–119
- 104 Yang J B, Xu D L. Nonlinear information aggregation via evidential reasoning in multiattribute decision analysis under uncertainty. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 2002, **32**(3): 376–393
- 105 Sadiq R, Najjaran H, Kleiner Y. Investigating evidential reasoning for the interpretation of microbial water quality in a distribution network. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2006, **21**(1): 63–73
- 106 Xu D L, Liu J, Yang J B, Liu G P, Wang J, Jenkinson I, Ren J. Inference and learning methodology of belief-rule-based expert system for pipeline leak detection. *Expert Systems with Applications*, 2007, **32**(1): 103–113
- 107 Zhou Z J, Hu C H, Yang J B, Xu D L, Zhou D H. Online updating belief rule based system for pipeline leak detection under expert intervention. *Expert Systems with Applications*, 2009, **36**(4): 7700–7709
- 108 Zhou Z J, Hu C H, Xu D L, Yang J B, Zhou D H. New model for system behavior prediction based on belief rule based systems. *Information Sciences*, 2010, **180**(24): 4834–4864
- 109 Hu C H, Si X S, Yang J B. System reliability prediction model based on evidential reasoning algorithm with nonlinear optimization. *Expert Systems with Applications*, 2010, **37**(3): 2550–2562

- 110 Chen Y W, Poon S H, Yang J B, Xu D L, Zhang D X, Acomb S. Belief rule-based system for portfolio optimisation with non-linear cash-flows and constraints. *European Journal of Operational Research*, 2012, **223**(3): 775–784
- 111 Fu C, Yang J B, Yang S L. A group evidential reasoning approach based on expert reliability. *European Journal of Operational Research*, 2015, **246**(3): 886–893
- 112 Chen S Q, Wang Y M, Shi H L, Zhang M J, Lin Y. Evidential reasoning with discrete belief structures. *Information Fusion*, 2018, **41**: 91–104
- 113 Guo M, Chen Y W, Wang H W, Yang J B, Zhang K Y. The single-period (newsvendor) problem under interval grade uncertainties. *European Journal of Operational Research*, 2019, **273**(1): 198–216



**周志杰** 火箭军工程大学教授. 2010 年获得清华大学博士学位. 主要研究方向为证据推理, 置信规则库, 故障诊断, 安全性评估.

E-mail: zhouzj04@tsinghua.org.cn  
(**ZHOU Zhi-Jie** Professor at Rocket Force University of Engineering.

He received his Ph.D. degree from Tsinghua University in 2010. His research interest covers evidential reasoning, belief rule base, fault diagnosis, and safety assessment.)



**唐帅文** 火箭军工程大学博士研究生. 2017 年获得火箭军工程大学学士学位. 主要研究方向为证据推理, 故障诊断, 安全性评估.

E-mail: tsw631845201@163.com  
(**TANG Shuai-Wen** Ph.D. candidate at Rocket Force University of

Engineering. He received his bachelor degree from Rocket Force University of Engineering in 2017. His research interest covers evidential reasoning, fault diagnosis, and safety assessment.)



**胡昌华** 火箭军工程大学教授, 长江学者. 1996 年获得西北工业大学博士学位. 主要研究方向为故障诊断, 寿命预测. 本文通信作者.

E-mail: hch66603@163.com

(**HU Chang-Hua** Professor at Rocket Force University of Engineering, Cheung Kong Scholar. He received his Ph.D. degree from Northwestern Polytechnical University in 1996. His research interest covers fault diagnosis and life prediction. Corresponding author of this paper.)



**曹友** 火箭军工程大学博士研究生. 2017 年获得哈尔滨理工大学学士学位. 主要研究方向为证据推理, 置信规则库, 安全性评估.

E-mail: cy936756268@163.com

(**CAO You** Ph.D. candidate at Rocket Force University of Engineering. He received his bachelor degree from Harbin University of Science and Technology in 2017. His research interest covers evidential reasoning, belief rule base, and safety assessment.)



**王杰** 火箭军工程大学博士研究生. 2018 年获得合肥工业大学学士学位. 主要研究方向为证据推理, 故障诊断, 安全性评估.

E-mail: wj2802877478@163.com

(**WANG Jie** Ph.D. candidate at Rocket Force University of Engineering. He received his bachelor degree from Hefei University of Technology in 2018. His research interest covers evidential reasoning, fault diagnosis, and safety assessment.)