

# 高速列车非线性系统的分数阶有限时间控制器设计

戈萌<sup>1</sup> 宋琦<sup>1</sup> 胡鑫睿<sup>1</sup>

**摘要** 针对具有输入非线性, 不确定的气动阻力, 未知的车间力, 外部扰动以及未知的执行器故障等特征的高速列车非线性系统, 结合分数阶稳定性原理以及有限时间控制理论, 本文设计了一种分数阶有限时间控制器以实现高速列车更快速且更高精度的跟踪控制. 该控制器能够直接补偿高速列车的不确定性和非线性以及执行器故障而不需任何“试错”过程, 且稳定时间可由控制参数的不同选择来调整. 仿真研究验证了所设计控制器的有效性和优越性.

**关键词** 分数阶有限时间控制器, 高速列车, 不确定性, 执行器故障, 非线性

**引用格式** 戈萌, 宋琦, 胡鑫睿. 高速列车非线性系统的分数阶有限时间控制器设计. 自动化学报, 2021, 47(7): 1672–1678

**DOI** 10.16383/j.aas.c190208

## Design of a Fractional-order Finite-time Controller for High-speed Train With Uncertain Model and Actuator Failures

GE Meng<sup>1</sup> SONG Qi<sup>1</sup> HU Xin-Rui<sup>1</sup>

**Abstract** This paper focuses on the position/velocity tracking control problem of high speed train (HST) with considering some uncertain and nonlinear characteristics such as input nonlinearity, aerodynamic resistance, in-train force, external disturbance and unknown actuator failures. Aiming at the system characteristics of HST, a fractional-order finite-time controller is designed on the basis of the principle of fractional stability and finite-time control theory to achieve higher tracking accuracy in finite time. It should be pointed out that the designed controller is able to deal with uncertainties and nonlinearities as well as actuator failures without any “trail and error” process, and the settling time can be adjustable by different selection of control parameters. The feasibility and effectiveness of the designed controller is verified by Lyapunov theoretical analysis and numerical simulation studies. Furthermore, compared with traditional PID controller, the designed fractional-order finite-time controller is superior.

**Key words** Fractional-order finite-time controller, high speed train, nonlinearities, actuator failures, uncertainties

**Citation** Ge Meng, Song Qi, Hu Xin-Rui. Design of a fractional-order finite-time controller for high-speed train with uncertain model and actuator failures. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(7): 1672–1678

列车自动运行系统 (Automatic train operation, ATO) 能否产生可靠的牵引与制动控制信号是高速列车安全可靠运行的关键问题之一, 即需要针对 ATO 系统, 建立可靠的牵引与制动控制算法<sup>[1]</sup>. 而高速列车运行过程中的运行阻力, 未知的车间力, 不可预测的执行器故障以及复杂的运行环境<sup>[2]</sup>, 使得高速列车系统具有高度的不确定性和非线性. 因此, 开展高速列车牵引与制动控制算法的研究变得更加重要且更具挑战性.

目前已有学者针对高速列车上述部分特性建立

了牵引与制动控制算法 (如:  $H_\infty$  控制<sup>[3]</sup>、反步控制<sup>[4]</sup>等) 以实现稳定的位移与速度跟踪控制, 但很大部分研究成果多将研究重点放在系统的稳态性能上, 即证明高速列车速度与位移跟踪控制系统是 Lyapunov 渐进稳定的, 这意味着该闭环系统最快的收敛速度是无限时间内的指数收敛, 从而限制了系统获得更好的收敛性能<sup>[5]</sup>. 为适应实际应用的需要, 有限时间稳定性 (Finite-time stability, FTS) 应运而生. 有限时间稳定性指在某一个固定的时间区间内系统的状态轨迹不会超过预先设定的界限, 即着重于固定时间间隔内系统的性能指标和状态轨迹, 并强调系统响应的瞬态行为<sup>[6]</sup>. 近年来, 针对大多数实际系统, 基于 Lyapunov 的有限时间控制算法因其可处理外界扰动和稳定时间可调等优点而得到广泛应用. 例如, 文献 [7] 提出了一种快速终端滑模 (Fast terminal sliding mode, FTSM) 控制算法, 利用切换函数消除了奇异性问题并实现了飞行器姿态的有限时间跟踪控制, 但该控制器限制了控制参数的选取. 文献 [8] 在考虑系统不确定性以及外界干

收稿日期 2019-04-03 录用日期 2019-07-30

Manuscript received April 3, 2019; accepted July 30, 2019

中央高校基本科研业务费专项资金 (2021JBM030), 国家自然科学基金 (61503021) 资助

Supported by Fundamental Research Funds for the Central Universities (2021JBM030) and National Natural Science Foundation of China (61503021)

本文责任编辑 曾志刚

Recommended by Associate Editor ZENG Zhi-Gang

1. 北京交通大学轨道交通控制与安全国家重点实验室 北京 100044

1. State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044

扰的情况下, 提出了一种非奇异快速滑模控制算法以实现不确定动态系统的轨迹跟踪, 同时该控制器扩展了控制参数的选取范围. 分数阶微积分 (Fractional calculus, FC) 将积分和微分扩展到非整数阶算子, 即其包含所有整数阶的理论, 并在传统整数阶的基础上增加了一维 (自由度)<sup>[9]</sup>. 对于相同的控制对象, 基于已有的研究成果, 文献 [10] 指出分数阶控制器会表现出比整数阶控制器更好的控制性能. 分数阶控制器的优越性得益于分数阶积分的遗传衰减特性, 从能量传递的角度来看, 该性质使得能量缓慢释放, 从而抑制抖振现象以提高跟踪控制精度<sup>[11]</sup>. 目前, 针对分数阶控制器的研究已有些成果. 例如: 针对旋转柔性关节轨迹跟踪系统, 文献 [12] 设计了一种分数阶积分控制器并实现了更高的控制精度. 在文献 [13] 中通过设计分数阶 PID 控制器抑制了并联机器人跟踪任务中的外部干扰. 目前, 基于分数阶稳定性原理的分数阶有限时间控制器也已有部分研究成果, 比如: 为实现一类分数阶非线性系统的有限时间控制, 文献 [14] 设计了一种新颖的快速终端滑模控制器. 文献 [15] 设计了状态反馈控制器和输出反馈控制器以实现分数阶正切换系统有限时间稳定.

事实上, 事关生命财产安全的高速列车牵引与制动控制系统是一个需要较快反应速度的系统, 通常的 Lyapunov 稳定往往不能达到预期的控制效果, 甚至可能会因为多种扰动与不确定因素导致超调量过大, 反应缓慢等影响列车运行安全的现象发生. 同时, 随着列车速度的提高, 其对跟踪精度的要求也越来越高<sup>[16]</sup>. 因此, 有必要为其设计具有高鲁棒性和抗干扰能力的控制器以提高跟踪控制系统的暂态和稳态性能. 受有限时间控制理论和分数阶稳定性原理以及现有研究成果的启发, 本文设计了一种分数阶有限时间控制器以实现高速列车位移与速度有限时间内更高精度的跟踪控制. 该控制器具有以下优点: 1) 可同时改善系统暂态和稳态性能; 2) 独立于模型, 仅需已知列车位移与速度即可, 易于应用且成本不高; 3) 可实时且有效地补偿执行器故障, 实现“故障后被动处理”到“故障前主动预防”的根本转变; 4) 在系统运行工况变化的情况下, 无需重新设计或规划控制参数, 便于应用. 稳定性分析和仿真研究均可证明该控制器的有效性; 相比于传统 PID 控制器的仿真结果, 验证了该控制器的优越性.

## 1 高速列车动态模型

根据牛顿第二定律, 高速列车的纵向动力学模型为<sup>[2]</sup>:  $(I + R)M\dot{\mathbf{X}} = \Lambda\mathbf{F}_u - \mathbf{F}_d + (T - I)\mathbf{F}_{in}$ , 其中  $R = \text{diag}\{r_i\}$  是旋转质量系数构成的矩阵;  $M = \text{diag}\{m_i\}$  是每节车厢质量构成的矩阵;  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$  是

效能分配常数构成的牵引/制动分配矩阵, 用来确定每节车厢贡献的牵引/制动力;  $\mathbf{F}_d = [f_{d1}, f_{d2}, \dots, f_{dn}]^T$  是阻力向量;  $T = [0_{1 \times (n-1)}, 1; I_{(n-1) \times (n-1)}, 0_{(n-1) \times 1}]$  表示各车辆间相互作用力系数的矩阵, 其中  $I$  代表单位矩阵.  $\mathbf{F}_{in} = [f_{in1}, f_{in2}, \dots, f_{in_n}]^T$  是车间力向量;  $\mathbf{X}$  是位移向量;  $\dot{\mathbf{X}}$  是速度向量;  $\ddot{\mathbf{X}}$  是加速度向量;  $\mathbf{F}_u = h(\Re\mathbf{F} + \Delta(\mathbf{F})) + \mathbf{Y}$  是考虑了输入非线性和执行器故障的实际牵引力, 其中  $h = \text{diag}\{h_i\}$  表示每节车厢的执行器健康参数构成的矩阵,  $\Re = \text{diag}\{\rho_i\}$  是斜率矩阵,  $F$  表示需要设计的牵引/制动力,  $\Delta(\mathbf{F}) = [\varepsilon_1(f_1), \varepsilon_2(f_2), \dots, \varepsilon_n(f_n)]^T$  是截距向量,  $\|\Delta(\mathbf{F})\| \leq \varepsilon_0$ , 其中  $\varepsilon_0$  代表未知的正常数,  $\mathbf{Y} = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n]^T$  表示由执行器故障引起的不确定部分, 且  $\nu_i \leq \bar{\nu} < \infty$ , 存在  $\|\mathbf{Y}\| \leq \nu_0 < \infty$ . 在上述描述中  $i = 1, 2, \dots, n$  是高速列车包含的车厢数量. 令  $\bar{M} = (I + R)M$ , 则有

$$\bar{M}\ddot{\mathbf{X}} = \Lambda h \Re \mathbf{F} + \Lambda h \Delta(\mathbf{F}) + \Lambda \mathbf{Y} + [(T - I)\mathbf{F}_{in} - \mathbf{F}_d] \quad (1)$$

本文的控制目标为: 设计控制力  $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$  以保证实际的位移  $\mathbf{X}$  和速度  $\dot{\mathbf{X}}$  分别以较高的精度跟踪期望的位移  $\mathbf{X}_d$  和速度  $\dot{\mathbf{X}}_d$ , 并确保位移和速度的跟踪误差  $\mathbf{E} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_d$  和  $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}_d$  有限时间内一致最终有界.  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  和  $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]^T$  分别表示位移和速度向量;  $\dot{\mathbf{X}}_d$  和  $\mathbf{X}_d$  是期望的速度和位移向量, 假设其光滑且有界.

## 2 分数阶有限时间控制器设计

首先, 为设计分数阶有限时间控制器, 定义滤波变量  $\mathbf{S}_0$  为

$$\mathbf{S}_0 = \dot{\mathbf{E}} + \gamma_1 \mathbf{E} + \gamma_2 \begin{cases} \text{sig}^\nu(\mathbf{E}), & \text{若 } |e_i| \geq \epsilon \\ \mathbf{E}^T \mathbf{E} \text{sign}(\mathbf{E}), & \text{若 } |e_i| < \epsilon \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\gamma_1 = \text{diag}\{\gamma_{1i}\}$ ,  $\gamma_2 = \text{diag}\{\gamma_{2i}\}$ ,  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$  以及  $0 < \nu < 1$  均由设计者选取;  $\epsilon$  为设计者选取的小正常数;  $\text{sig}^\nu(\cdot)$  被定义为  $\text{sig}^\nu(\mathbf{E}) = [|e_1|^\nu \text{sign}(e_1), |e_2|^\nu \text{sign}(e_2), \dots, |e_n|^\nu \text{sign}(e_n)]^T$ .

**定理 1.**  $\mathbf{S}_0$  如式 (2) 中定义, 若  $\mathbf{S}_0$  是有限时间内一致最终有界的, 则位移和速度跟踪误差  $\mathbf{E}$  和  $\dot{\mathbf{E}}$  也是有限时间内一致最终有界的.

**证明.** 由于  $\mathbf{S}_0$  是一致最终有界的, 则可假设其满足  $\|\mathbf{S}_0\| \leq \Delta$ , 结合式 (2), 有  $\mathbf{S}_0 = \phi$ , 其中,  $\|\phi\| \leq \Delta$ ,  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T$  表示位于  $\mathbf{S}_0$  的收敛域中的某个点.

下述证明以标量形式开展以便于理解, 包括以下两种情况:

**情况 1.** 考虑  $|e_i| \geq \epsilon$  成立, 且  $|S_{0i}| = |\phi_i| \leq \Delta$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则结合式 (2) 有

$$\dot{e}_i + \gamma_{1i}e_i + \gamma_{2i}|e_i|^\nu \text{sign}(e_i) = \phi_i, \quad |\phi_i| \leq \Delta \quad (3)$$

整理上式可得

$$\dot{e}_i = -\theta_{1i}e_i - \theta_{2i}|e_i|^\nu \text{sign}(e_i) \quad (4)$$

其中,  $\theta_{1i} = \gamma_{1i} - \frac{\phi_i}{2e_i}$ ,  $\theta_{2i} = \gamma_{2i} - \frac{\phi_i}{2|e_i|^\nu \text{sign}(e_i)}$ .

选取 Lyapunov 候选函数

$$V_1 = \frac{e_i^2}{2} \quad (5)$$

根据式 (4),  $V_1$  对时间的导数可表示为

$$\dot{V}_1 = -\theta_{1i}e_i^2 - \theta_{2i}|e_i|^{\nu+1} \quad (6)$$

若  $\theta_{1i} > 0$  和  $\theta_{2i} > 0$  成立, 则有

$$\dot{V}_1 \leq -2\min(\theta_{1i})V_1 - 2^{\frac{\nu+1}{2}}\min(\theta_{2i})V_1^{\frac{\nu+1}{2}} \quad (7)$$

根据文献 [17] 中定义 1, 若  $\theta_{1i} > 0$  和  $\theta_{2i} > 0$  成立, 则位移跟踪误差  $e_i$  是一致最终有界稳定的, 且稳定时间满足

$$T_1 \leq \frac{1}{\theta'_{1i}(1-\nu)} \ln \frac{\theta'_{1i}V_1^{\frac{\nu-1}{2}}(e_i(0)) + 2^{\frac{\nu-1}{2}}\theta'_{2i}}{2^{\frac{\nu-1}{2}}\theta'_{2i}}$$

其中,  $e_i(0)$  为位移跟踪误差初值,  $\theta'_{1i} = \min(\theta_{1i})$ ,  $\theta'_{2i} = \min(\theta_{2i})$ . 由  $\gamma_{1i} - \frac{\phi_i}{2e_i} > 0$  和  $\gamma_{2i} - \frac{\phi_i}{2|e_i|^\nu \text{sign}(e_i)} > 0$ , 可得  $|e_i| > \Delta/2\gamma_{1i}$ ,  $|e_i| > (\Delta/2\gamma_{2i})^{1/\nu}$ . 结合  $|e_i| \geq \epsilon$ , 可知位移跟踪误差  $e_i$  可在有限时间内收敛到  $\Delta_e := \max(\epsilon, \Delta/2\gamma_{1i}, (\Delta/2\gamma_{2i})^{1/\nu})$ , 根据式 (3), 速度跟踪误差  $\dot{e}_i$  可在有限时间内收敛到  $|\dot{e}_i| \leq |\phi_i| + \gamma_{1i}|e_i| + \gamma_{2i}|e_i|^\nu \leq \Delta + \max\{\gamma_{1i}\}\Delta_e + \max\{\gamma_{2i}\}\Delta_e^\nu = \Delta_\infty$ .

**情况 2.** 考虑  $|e_i| < \epsilon$ , 此时, 位移跟踪误差  $e_i$  已在区域  $\Delta'_e = \{|e_i| < \epsilon\}$  中. 基于式 (2), 有  $\dot{e}_i + \gamma_{1i}e_i + \gamma_{2i}e_i^2 \text{sign}(e_i) = \phi_i$ ,  $|\phi_i| \leq \Delta$ , 则速度跟踪误差  $\dot{e}_i$  可收敛到  $|\dot{e}_i| \leq \gamma_{1i}\epsilon + \gamma_{2i}\epsilon^2 + \Delta = \Delta'_\infty$ .

综合以上两种情况, 可知若  $\mathbf{S}_0$  是有限时间内一致最终有界的, 则位移跟踪误差  $\mathbf{E}$  将会在有限时间内收敛到区域  $\Delta_E := \max\{\epsilon, \Delta/2\|\gamma_1\|, (\Delta/2\|\gamma_2\|)^{1/\nu}\}$  中, 同时, 速度跟踪误差  $\dot{\mathbf{E}}$  也是有限时间内一致最终有界的.  $\square$

其次, 为引入分数阶积分算子以提高控制器的控制精度, 定义滤波变量  $\mathbf{S}$  为

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \gamma_3 {}_0^C D_t^{-r} \mathbf{S}_0 + \gamma_4 {}_0^C D_t^{-r} (\text{sig}^\nu(\mathbf{S}_0)) \quad (8)$$

其中,  $\gamma_3 = \text{diag}\{\gamma_{3i}\}$ ,  $\gamma_4 = \text{diag}\{\gamma_{4i}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\gamma_3 > 0$ ,  $\gamma_4 > 0$  以及  $0 < \nu < 1$  均由设计者选取.

根据定理 1, 为确保位移和速度误差  $\mathbf{E}$  和  $\dot{\mathbf{E}}$  有限时间内一致最终有界, 需证明  $\mathbf{S}_0$  的有限时间稳定性. 因此, 结合  $\mathbf{S}$  的定义提出以下定理.

**定理 2.**  $\mathbf{S}$  如式 (8) 中定义, 若  $\mathbf{S}$  有限时间内一致最终有界, 则当  $t > T_2$  时,  $\mathbf{S}_0$  一致最终有界.

**证明.** 若  $\mathbf{S}$  是一致最终有界的, 则可假设其收敛于  $\Delta_1$ , 即  $\|\mathbf{S}\| \leq \Delta_1$  成立, 有  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\psi}$ , 其中  $\|\boldsymbol{\psi}\| \leq \Delta_1$  且  $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]^T$  代表位于  $\mathbf{S}$  的收敛域中的某个点.

根据分数阶性质: 若存在两个常数满足  $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ , 则  ${}_0^C D_t^{\alpha_1} {}_0^C D_t^{-\alpha_2} f(t) = {}_0^C D_t^{\alpha_1 - \alpha_2} f(t)$  成立. 根据式 (8) 两边同取  $r$  阶导数得

$${}_0^C D_t^r \mathbf{S}_0 + \gamma_3 \mathbf{S}_0 + \gamma_4 \text{sig}^\nu(\mathbf{S}_0) = {}_0^C D_t^r \boldsymbol{\psi} \quad (9)$$

其中,  $r$  满足  $0 < r = r_1/r_2 < 1$ ,  $r_2$  为奇数, 以使  ${}_0^C D_t^r \boldsymbol{\psi}$  存在且满足  $\|{}_0^C D_t^r \boldsymbol{\psi}\| \leq \Delta_2$ .

相似地, 下述证明仍以标量形式展开:

**情况 1.** 考虑  $s_{0i}$  满足  $|s_{0i}| \geq \epsilon$ , 其中  $\epsilon > 0$  是一个小正常数, 且  $|{}_0^C D_t^r s_{0i}| \leq \Delta_2$  成立, 则有

$${}_0^C D_t^r s_{0i} = -\bar{\gamma}_{3i}s_{0i} - \gamma_{4i} \text{sig}^\nu(s_{0i}) \quad (10)$$

其中,  $\bar{\gamma}_{3i} = \gamma_{3i} - {}_0^C D_t^r \psi_i/s_{0i}$ .

选取 Lyapunov 候选函数

$$V_2 = \frac{s_{0i}^2}{2} \quad (11)$$

根据分数阶性质: 当  $0 < r < 1$  且  $x(t)$  是连续可微时,  $\frac{1}{2} {}_0^C D_t^r x^2(t) \leq x(t) {}_0^C D_t^r x(t)$ , 结合式 (10) 得

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^r V_2 &= {}_0^C D_t^r (s_{0i}^2)/2 \leq s_{0i} {}_0^C D_t^r s_{0i} = \\ &-\bar{\gamma}_{3i}s_{0i}^2 - \gamma_{6i}|s_{0i}|^{\nu+1} \end{aligned} \quad (12)$$

因此, 若  $\gamma_{4i} > 0$  和  $\bar{\gamma}_{3i} > 0$  成立, 则基于分数阶 Lyapunov 稳定性理论,  $s_{0i}$  将会渐近地收敛到区域  $\Delta_{s_{0i}} := \max\{\epsilon, \Delta_2/\gamma_{3i}\}$ .

**情况 2.** 考虑  $s_{0i}$  满足  $|s_{0i}| \leq \epsilon$ . 显然,  $s_{0i}$  已在区域  $\Delta_{s_{0i}}$  中.

至此, 可证明出当  $t \rightarrow \infty$  时,  $s_{0i}$  是一致最终有界的. 为证明  $s_{0i}$  的有限时间稳定性, 开展以下分析.

基于文献 [18] 定理 3 以及  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 1$ , 有

$${}_0^C D_t^r \left( \int_0^t \dot{V}_2 d\tau \right) \leq -\alpha V_2^{\frac{1}{\beta}} \quad (13)$$

由于 Riemann-Liouville 分数阶积分  ${}_0 D_t^r$  是一个单调算子, 则上式两边同时取  $r$  阶积分, 可得

$${}_0 D_t^{-r} {}_0^C D_t^r \left( \int_0^t \dot{V}_2 d\tau \right) \leq -\alpha {}_0 D_t^{-r} V_2^{\frac{1}{\beta}} \quad (14)$$

根据分数阶性质: 若  $0 < r < 1$ ,  $f(t) \in L_p(a, b)$  且满足初始条件  $f(t) = f(t_0) = 0$ , 则  ${}_0 D_t^{-r} ({}_0^C D_t^r f(t)) = f(t)$  在  $[a, b]$  上成立. 结合  $\int_0^t \dot{V}_2 d\tau|_{t=0} = 0$ , 可得

$$\int_0^t \dot{V}_2 d\tau \leq -\alpha {}_0 D_t^{-r} V_2^{\frac{1}{\beta}} \quad (15)$$

基于 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义, 上述不等式可重写为

$$\int_0^t \dot{V}_2 d\tau \leq -\frac{\alpha}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-\tau)^{r-1} V_2^{\frac{1}{\beta}} d\tau \quad (16)$$

为求稳定时间, 整理上式为  $\int_0^t \frac{1}{V_2^{1/\beta}} dV_2 \leq -\alpha \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-\tau)^{r-1} d\tau$ , 则稳定时间

$$T_2 \leq \left[ \frac{\beta\Gamma(1+r)}{\alpha(\beta-1)} \times \left( V_2^{\frac{\beta-1}{\beta}}(0, s_{oi}(0)) - V_2^{\frac{\beta-1}{\beta}}(t, s_{oi}(t)) \right)^{\frac{1}{1-r}} \right]$$

因此,  $S_0$  有限时间内一致最终有界.  $\square$

至此, 结合定理 1 和定理 2, 为确保位移和速度跟踪误差  $E$  和  $\dot{E}$  有限时间内一致最终有界, 需设计合适的控制器以确保  $S$  在有限时间内一致最终有界. 为设计分数阶有限时间控制器, 结合  $S$  和  $S_0$  的定义和系统模型 (1), 可得

$$\bar{M}\dot{S} = \Lambda h\Re F + \Lambda h\delta(F) + \Lambda Y + [(T-I)F_{in} - F_d] + L(\cdot)$$

其中,

$$L(\cdot) = \bar{M}(\gamma_3 {}^C D_t^{1-r} S_0 + \gamma_4 {}^C D_t^{1-r} \text{sig}^\nu(S_0) - \ddot{X}_d + \gamma_1 \dot{E}) + \gamma_2 \bar{M} \begin{cases} \nu \text{diag}(\dot{E}) \text{sig}^{\nu-1}(E), & \text{若 } |e_i| \geq \epsilon \\ E^T \dot{E} \text{sign}(E), & \text{若 } |e_i| < \epsilon \end{cases}$$

令  $G(\cdot) = \Lambda h\delta(F) + \Lambda Y + [(T-I)F_{in} - F_d] + L(\cdot)$  则系统可描述为

$$\bar{M}\dot{S} = \Lambda h\Re F + G(\cdot) \quad (17)$$

$G(\cdot)$  是一个矢量非线性函数. 若利用神经网络直接逼近, 则可能会陷入代数循环. 因此, 标量化处理  $G(\cdot): \|G(\cdot)\| \leq \|\Lambda h\|\epsilon_0 + \|\Lambda\|\nu_0 + \|L(\cdot)\| + \|(T-I) \times F_{in} - F_d\| = \sigma(\cdot)$ , 进而, 可转化为逼近标量函数  $\sigma(\cdot)$ . 径向基神经网络 (Radial basis function neural network, RBFNN) 因其简单、快速学习和可广泛逼近的特性而广受欢迎<sup>[19]</sup>. 所以, 利用 RBFNN 逼近  $\sigma(\cdot)$ , 即  $\sigma(\cdot) = W^T \Phi(Z) + \delta(Z)$ , 其中,  $\Phi(Z) = [\phi_1(Z), \phi_2(Z), \dots, \phi_N(Z)]^T \in \mathbf{R}^N$  是关于  $Z = [X, X_d]^T$  的基函数, 且  $W \in \mathbf{R}^N$  是最优的常数向量.  $\phi_k(\cdot) = \exp(-\sum_{j=1}^q (z_j - c_{kj})^2 / 2b_{kj}^2)$ , 其中,  $k=1, \dots, N$ ,  $Z = [z_1, \dots, z_q]$  是 RBFNN 的输入向量.  $C_{kj} = [c_{k1}, \dots, c_{kq}]$ ,  $B_{kj} = [b_{k1}, \dots, b_{kq}]$  分别是与输入向量每个元素均相关的高斯分布函数的中心状态和标准偏差, 其中,  $j=1, 2, \dots, q$ ,  $q$  是第  $k$  层的神经元数量,  $N$  代表隐藏层的数量. 根据通用的逼近理论, 神经网络的重构误差可合理的假设为  $\|\delta(Z)\| \leq \delta_{\max} < \infty$ .

为分析分数阶有限时间控制器的稳定性,  $\sigma$  的上界可表示为

$$\sigma(\cdot) \leq \rho(1 + \Phi) \quad (18)$$

其中,  $\rho = \max\{\|W^T\|, \delta_{\max}\}$  是一个非负常数且  $\Phi = \|\Phi(Z)\|$  (下同).

**定理 3.** 基于式 (1) 中描述的列车系统, 若建立下列控制律

$$F = -\Lambda^T (kS + \eta \text{sig}^\nu(S)) \quad (19)$$

$$k = c_1 + c_2 \hat{\rho}(1 + \Phi)^2 \quad (20)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -c_3 \hat{\rho} + c_2(1 + \Phi)^2 \|S\|^2 \quad (21)$$

其中,  $S$  如式 (8) 中所定义,  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,  $c_3 > 0$ ,  $0 < \nu < 1$  以及  $\eta = \text{diag}\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$  ( $\eta_i > 0$ ) 均由设计者选取.  $\hat{\rho}$  是  $\rho$  的估计. 则当  $t > T_3$  时,  $S$  是一致最终有界的, 进而可保证位移和速度跟踪误差  $E$  和  $\dot{E}$  也是有限时间一致最终有界的.

**证明.** 选取 Lyapunov 候选函数

$$V_3 = \frac{S^T \bar{M} S}{2} + \frac{(\rho - \lambda \hat{\rho})^2}{2\lambda} \quad (22)$$

依据式 (17) 以及上述控制律,  $V_3$  对于时间的导数为

$$\dot{V}_3 = -c_1 S^T (\Lambda h\Re \Lambda^T) S - \eta S^T (\Lambda h\Re \Lambda^T) \text{sig}^\nu(S) - S^T (\Lambda h\Re \Lambda^T) S c_2 \hat{\rho}(1 + \Phi)^2 + S^T G - (\rho - \lambda \hat{\rho}) \dot{\hat{\rho}} \quad (23)$$

根据  $\Lambda h\Re \Lambda^T$  中各量的定义可知,  $\Lambda h\Re \Lambda^T$  是一个  $n$  维方阵, 则其最小特征值可假设为  $\lambda_{\min}$ . 利用  $0 < \lambda < \lambda_{\min}(\Lambda h\Re \Lambda^T)$ , 可得

$$\dot{V}_3 \leq -c_1 \lambda \|S\|^2 - c_2 \lambda \hat{\rho}(1 + \Phi)^2 \|S\|^2 + \rho(1 + \Phi) \|S\| - (\rho - \lambda \hat{\rho}) \dot{\hat{\rho}} \quad (24)$$

其中,  $S^T (\Lambda h\Re \Lambda^T) \text{sig}^\nu(S) > \lambda \sum_{i=1}^n |s_i|^{\nu+1} > 0$ .

基于  $(1 + \Phi) \|S\| \leq c_2(1 + \Phi)^2 \|S\|^2 + 1/(4c_2)$ , 化简上式得

$$\dot{V}_3 \leq -c_1 \lambda \|S\|^2 + c_2(\rho - \lambda \hat{\rho})(1 + \Phi)^2 \|S\|^2 + \frac{\rho}{4c_2} - (\rho - \lambda \hat{\rho}) \dot{\hat{\rho}} \quad (25)$$

将  $\hat{\rho}$  的更新算法式 (21) 代入上式, 可得

$$\dot{V}_3 \leq -2c_1 \frac{\lambda \|S\|^2}{2} - \frac{c_3(\rho - \lambda \hat{\rho})^2}{2\lambda} + \frac{c_3 \rho^2}{2\lambda} + \frac{\rho}{4c_2} \quad (26)$$

其中, 利用了不等式  $\hat{\rho}(\rho - \lambda \hat{\rho}) \leq \frac{\rho^2 - (\rho - \lambda \hat{\rho})^2}{2\lambda}$ .

依据  $\|\bar{M}\|$  的实际物理意义, 可合理地假设  $\|\bar{M}\| \neq 0$ , 易得

$$\dot{V}_3 \leq -\frac{2c_1 \lambda \|\bar{M}\| \|S\|^2}{\|\bar{M}\|} - c_3 \frac{(\rho - \lambda \hat{\rho})^2}{2\lambda} + \iota_2 \leq -\iota_1 V_3 + \iota_2 \quad (27)$$

其中,  $\iota_1 = \min\{2c_1 \lambda / \|\bar{M}\|, c_3\} > 0$ ,  $\iota_2 = (c_3 \rho^2) / (2\lambda) + \rho / (4c_2) < \infty$ .

从上式可得, 若  $S$  在区域  $\Omega_1 = \{\|S\| \leq \sqrt{\iota_2 / c_1 \lambda}\}$  外, 则  $\dot{V}_3 \leq -c_1 \lambda \|S\|^2 + \iota_2 < 0$  成立. 基于 Lyapunov 稳定性理论,  $S$  会渐近地收敛到区域  $\Omega_1$  中, 即  $S$

一致最终有界. 此外, 求解式 (27) 易得  $V_3 \leq e^{-\iota_1 t} V_3(0) + \iota_2/\iota_1 \in \ell_\infty$ . 结合式 (22), 可知  $(\rho - \lambda\hat{\rho})$  也是一致最终有界的. 因此, 可合理假设存在一个小正常数  $\zeta$  满足  $(\rho - \lambda\hat{\rho}) \leq \zeta$ .

至此, 可证明当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{S}$  一致最终有界. 为证明  $\mathbf{S}$  的有限时间稳定性, 选择新的 Lyapunov 候选函数为

$$V_4 = \frac{\mathbf{S}^T \bar{M} \mathbf{S}}{2} \tag{28}$$

应用与式 (23)~(25) 相似的处理,  $V_4$  对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 \leq & -c_1 \lambda \|\mathbf{S}\|^2 - \eta \lambda \sum_{i=1}^n |s_i|^{\nu+1} + \\ & c_2 (\rho - \lambda\hat{\rho}) (1 + \Phi)^2 \|\mathbf{S}\|^2 + \frac{\rho}{4c_2} \end{aligned} \tag{29}$$

其中,  $0 < \mathbf{S}^T (\Lambda h \mathfrak{R} \Lambda^T) \text{sig}^\nu(\mathbf{S}) < \lambda \sum_{i=1}^n |s_i|^{\nu+1}$ .

基于假设  $(\rho - \lambda\hat{\rho}) \leq \zeta$ , 上式可改写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 \leq & -c_1 \lambda \|\mathbf{S}\|^2 - \min\{\eta_i\} \lambda \sum_{i=1}^n |s_i|^{\nu+1} + \\ & c_2 \zeta (1 + \Phi)^2 \|\mathbf{S}\|^2 + \rho / (4c_2) \leq \\ & -\iota_3 V_4 - \iota_4 V_4^{\frac{\nu+1}{2}} \end{aligned} \tag{30}$$

其中,  $\iota_3 = -2(c_1 - c_2 \zeta (1 + \Phi)^2) / \|\bar{M}\|$ ,  $\iota_4 = -(2 / \|\bar{M}\|)^{(\nu+1)/2} (\min\{\eta_i\} \lambda - \frac{\rho}{4c_2 (\|\mathbf{S}\|^2)^{(\nu+1)/2}})$ .

根据文献 [17] 中定义 1, 若  $\iota_3 > 0$  和  $\iota_4 > 0$  成立, 则  $\mathbf{S}$  是有限时间稳定的. 即, 若  $c_1 > c_2 \zeta (1 + \Phi)^2$  成立, 则当  $t > T_3$  时,  $\mathbf{S}$  将会收敛到  $\Omega_2 = \{\|\mathbf{S}\| \leq (\frac{\rho}{4c_2 \lambda \min\{\eta_i\}})^{1/(\nu+1)}\}$ , 且稳定时间  $T_3$  满足  $T_3 \leq 2 / (\iota_3 (1 - \nu)) \ln((\iota_3 V_2^{(1-\nu)/2}(\mathbf{S}(0)) + \iota_4) / \iota_4)$ .

综上所述, 当  $t > T_3$  时,  $\mathbf{S}$  将会收敛到区域  $\Omega_S = \max\{\Omega_1, \Omega_2\}$ . 结合定理 1 和定理 2, 可确保位移和速度跟踪误差  $\mathbf{E}$  和  $\dot{\mathbf{E}}$  有限时间一致最终有界.  $\square$

### 3 仿真研究

为验证所设计控制器的有效性和优越性, 选取具有 5 节动车 3 节拖车的 CRH-5A 型列车进行仿

真验证. 每节车厢的相关参数如表 1 所示. 需要说明的是这些参数仅用于仿真模型的建立, 而在所提出的控制器中是不需要的, 即选择其他合理的参数值同样可行. 列车运行工况包括两个牵引加速阶段, 四个巡航阶段以及三个减速制动阶段. 最后, 为验证所设计控制器的容错性能, 车辆 2, 车辆 5 和车辆 6 的执行器设置为部分故障, 并以执行器健康参数  $h_2, h_5$  和  $h_6$  的取值来表征. 本仿真研究的控制目标是让实际的速度  $\dot{\mathbf{X}}$  和位移  $\mathbf{X}$  在有限时间内跟踪上期望的速度  $\dot{\mathbf{X}}_d$  和位移  $\mathbf{X}_d$ .

为验证所设计控制器的优越性, 选取传统的 PID 控制器作为比较对象, 两控制器的控制参数选择如下:

1) 所设计控制器的控制参数:  $r = 4/9$ ,  $\nu = 0.8$ ,  $c_1 = 2 \times 10^5$ ,  $c_2 = 10$ ,  $c_3 = 0.01$ ,  $\eta_i = 2 \times 10^5$ ,  $\eta = \text{diag}\{\eta_i\}$ ,  $\gamma_{1i} = 0.1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \text{diag}\{\gamma_{1i}\}$ ,  $\gamma_{2i} = 1$ ,  $\gamma_3 = \gamma_4 = \text{diag}\{\gamma_{2i}\}$

2) 传统 PID 控制器的控制参数:  $k_P = 2 \times 10^5$ ,  $k_D = 2 \times 10^5$ ,  $k_I = 2 \times 10^6$ .

3) 径向基神经网络关于  $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{X}_d]^T$  的基本函数  $\Phi(\mathbf{Z})$  可通过中心状态  $C_1 = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4]$  和偏差  $B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \text{ones}(10, 1)$  以及实际的速度  $\dot{\mathbf{X}}$  和位移  $\mathbf{X}$  和期望的速度  $\dot{\mathbf{X}}_d$  和位移  $\mathbf{X}_d$  计算获得;  $q = 10$  代表隐藏层神经元数量,  $N = 1$  代表隐藏层数量;  $\rho$  的估计可有自适应更新算法 (21) 获得, 而不需要“试错”过程, 且满足  $\hat{\rho}(0) = 0$ .

4) 所设计的控制器的控制参数是以让跟踪误差收敛到可接受的误差范围内的标准选取的, 位移和速度的初始跟踪误差值选择了 0.005 以便于更明显地描述稳定时间.

从图 1 易知, 基于分数阶有限时间控制器的高速列车位移和速度可稳定的跟踪期望的位移和速度; 且相比于传统的 PID 控制器, 分数阶有限时间控制器可减小高速列车位移和速度跟踪控制误差, 尤其是在列车运行工况转换时. 为更详细的描述在所设计控制器下的位移与速度跟踪误差的稳定时间, 对  $t \in (0, 200)$  阶段进行了单独仿真, 如图 2 所

表 1 列车相关参数  
Table 1 Parameters of the vehicles

变量	参数含义	仿真值
$\varrho_i$	第 $i$ 节车厢的旋转质量系数	$\varrho_i \in [0.08, 0.11]$
$m_i$	第 $i$ 节车厢的总体质量	$m_i = (50 + \Delta m_i)$ $\Delta m_i \in [-6, 13]$
$a_{0i}, a_{1i}, a_{2i}$	第 $i$ 节车厢的阻力系数	$a_{0i} \in [50, 85]$ , $a_{1i} \in [30, 100]$ , $a_{2i} = [0.1, 6.5]$
$\Lambda$	牵引/制动分配矩阵	$\Lambda = \text{diag}\{0.5, 0.3, 0.5, 0.3, 0.6, 0.4, 0.6, 0.4\}$
$r$	分数阶阶次	$0 < r = r_1/r_2 < 1$ 且 $r_2$ 为奇数
$h$	执行器健康参数	$h_2, h_5, h_6$

示, 位移和速度的跟踪误差可在 10 s 内收敛到可接受的误差范围内. 在此仿真中可接受的位移和速度的误差范围分别是  $\pm 0.012$  m 和  $\pm 0.0025$  m/s.

因此, 相比于传统的 PID 控制器, 分数阶有限时间控制器不仅具有更高的跟踪精度 (稳态性能), 而且可实现有限时间内的收敛 (暂态性能). 同时,

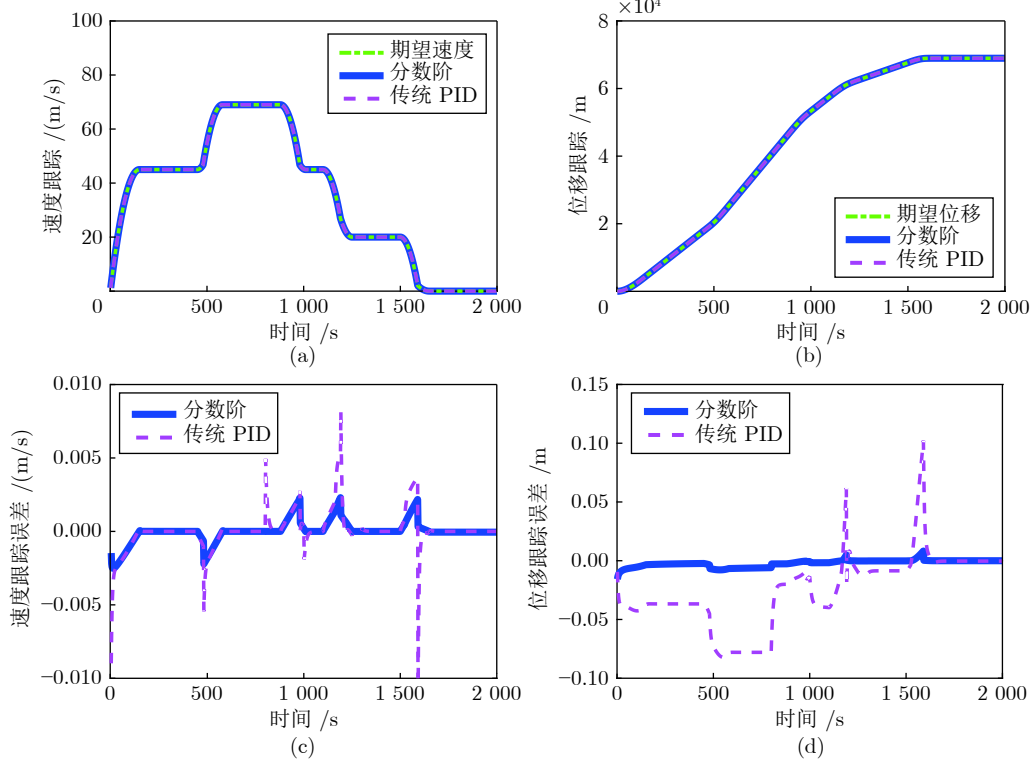


图 1 基于分数阶与传统 PID 控制器的跟踪过程和误差

Fig.1 The tracking process and errors of the fractional-order or PID controller

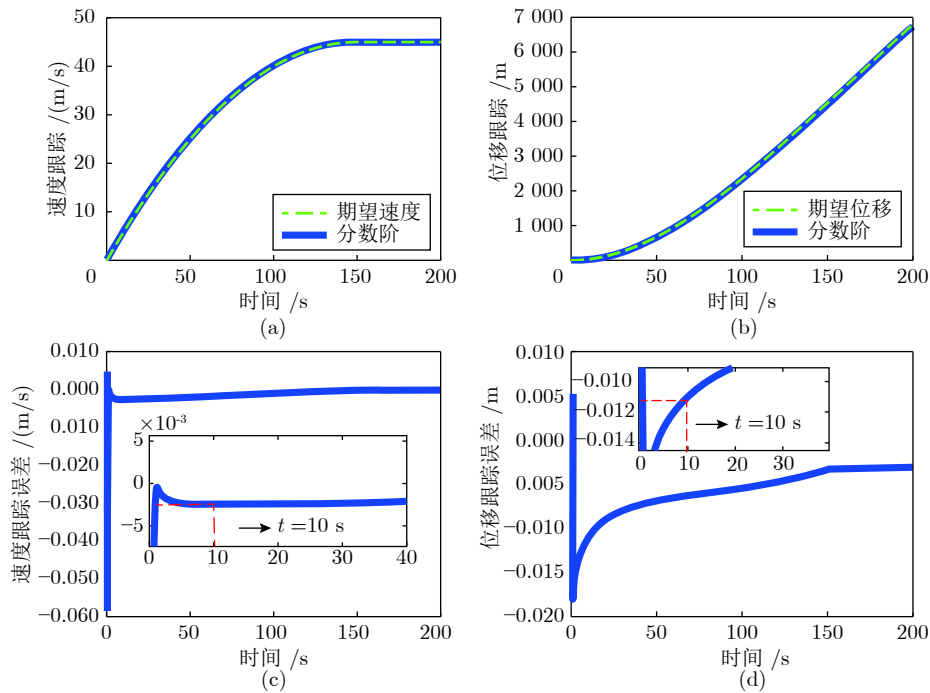


图 2 分数阶控制器在  $t \in (0, 200)$  的跟踪过程和误差

Fig.2 The tracking process and errors of the designed controller in  $t \in (0, 200)$

该控制器具有更强的鲁棒性和抗干扰能力。

## 4 结论

本文针对具有高度不确定性和非线性特征的高速列车非线性系统, 结合有限时间控制理论和分数阶稳定性原理, 设计了一种分数阶有限时间控制器以实现高速列车位移与速度的更高精度且更快速的跟踪控制. 该控制器不仅可利用分数阶积分的遗传衰减特性提高稳态性能, 而且可利用含有的分数幂项使控制器具有更强的鲁棒性和抗干扰能力. 同时, 该控制器因具有有限时间稳定性而使系统能够具有更好的暂态性能. 此外, 该控制器不需要系统参数的详细信息, 只需已知期望的速度和位移以及当前实际的位移和速度即可, 因此其易于实现且应用成本不高. 而且, 该控制器能够实时有效补偿执行器故障, 并实现了“故障后被动处理”到“故障前主动预防”的根本转变. 特别地, 该控制器的稳定时间可通过选取不同的控制参数以实现一定程度上的调整和估计. 最后, 仿真结果验证了所设计控制器的有效性和优越性.

## References

- Lin X, Dong H R, Yao X M, Chai B G. Adaptive active fault-tolerant controller design for high-speed trains subject to unknown actuator faults. *Vehicle System Dynamic*, 2018, **56**(11): 1717–1733
- Song Q, Song Y D. Data-based fault-tolerant control of high-speed trains with traction/braking notch nonlinearities and actuator failures. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, **22**(12): 2250–2261
- Tang H Y, Wang Q Y, Feng X Y. Robust stochastic control for high-speed trains with nonlinearity, parametric uncertainty, and multiple time-varying delays. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2018, **19**(4): 1027–1037
- Mao Z H, Tao G, Jiang B, Yan X G. Adaptive actuator compensation of position tracking for high-speed trains with disturbances. *IEEE Transactions Vehicular Technology*, 2018, **67**(7): 5706–5717
- Hu Q L, Shao X D. Smooth finite-time fault-tolerant attitude tracking control for rigid spacecraft. *Aerospace Science and Technology*, 2016, **55**(2016): 144–157
- Amato F, Ambrosino R, Ariola M, Cosentino C, De Tommasi G. *Finite-Time Stability and Control*. London: Springer Verlag, 2014. 1–9
- Cheng P, Gao Z F, Qian M S, Lin J X. Active fault tolerant control design for uav using nonsingular fast terminal sliding mode approach. In: Proceedings of the 30th Chinese Control and Decision Conference. Shenyang, China: IEEE, 2018. 292–297
- Boukattaya M, Mezghani N, Damak T. Adaptive nonsingular fast terminal sliding mode control for the tracking problem of uncertain dynamical systems. *ISA Transactions*, 2018, **77**(2018): 1–19
- Chen Y Q, Ionescu C. Special issue: Applied fractional calculus in modelling, analysis and design of control systems. *International Journal of Control*, 2017, **90**(6): 1155–1156
- Chen Y Q, Petras I, Xue D Y. Fractional order control—A tutorial. In: Proceedings of the 2009 American Control Conference. St. Louis, USA: IEEE, 2009. 1397–1411
- Podlubny I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2001, **5**(4): 230–237
- Al-Saggaf U M, Mehedi I M, Mansouri R. Rotary flexible joint control by fractional order controllers. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2017, **15**(59): 1–9
- Angel L, Viola J. Fractional order PID for tracking control of a parallel robotic manipulator type delta. *ISA Transactions*, 2018, **79**(2018): 172–188
- Wang B, Ding J L, Wu F J, Zhu D L. Robust finite-time control of fractional-order nonlinear systems via frequency distributed model. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **85**(4): 2133–2142
- Liang J X, Wu B W, Wang Y E, Niu B, Xie X J. Input-output finite-time stability of fractional-order positive switched systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2019, **38**(4): 1619–1638
- Li D Y, Li P, Cai W C, Ma X P, Liu B, Dong H H. Neural adaptive fault tolerant control for high speed trains considering actuation notches and antiskid constraints. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2018, **20**(5): 1706–1718
- Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, Man Z H. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 2005, **41**(11): 1957–1964
- Zhao Y G, Wang Y Z, Liu Z B. Finite time stability analysis for nonlinear fractional order differential systems. In: Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference. Xi'an, China: IEEE, 2013. 487–492
- Yang H J, Liu J K. An adaptive RBF neural network control method for a class of nonlinear systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, **5**(2): 457–462



戈 萌 北京交通大学电子信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为分数阶控制、有限时间控制以及交通系统. E-mail: 17120222@bjtu.edu.cn

(GE Meng Master student at the State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety, Beijing



Jiaotong University. Her research interest covers transportation systems and intelligent control method.)

宋 琦 北京交通大学轨道交通控制与安全国家重点实验室副教授. 2014年获得北京交通大学博士学位. 主要研究方向为人工智能与交通系统. 本文通信作者.

E-mail: qsong@bjtu.edu.cn

(SONG Qi Received the Ph.D. degree from Beijing Jiaotong University, in 2014. She was a Visiting Researcher at California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, from 2011 to 2013. She is currently with the State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety, Beijing Jiaotong University. Her research interest covers artificial intelligence and transportation systems. Corresponding author this paper.)



胡鑫睿 北京交通大学电子信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为交通系统与人工智能.

E-mail: 17120231@bjtu.edu.cn

(HU Xin-Rui Master student at the State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety, Beijing Jiaotong University. Her research interest covers transportation systems and artificial intelligence.)