

切换网络下时变线性多智能体 系统的指数同步

王兴平¹ 宋艳荣¹ 程兆林²

摘要 研究切换网络下时变连续线性多智能体系统的同步问题. 在智能体动态满足一致完全可控性条件下, 设计出同步协议. 通过将多智能体系统同步问题表示为矩阵无穷乘积形式并论证矩阵无穷乘积指数收敛到0, 给出了多智能体系统指数同步结论. 最后以仿真实例验证本文结论.

关键词 时变线性多智能体系统, 指数同步, 协议, 矩阵无穷乘积

引用格式 王兴平, 宋艳荣, 程兆林. 切换网络下时变线性多智能体系统的指数同步. 自动化学报, 2015, 41(8): 1528–1532

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140912

Exponential Synchronization of Time-varying Linear Multi-agent Systems with Switching Topology

WANG Xing-Ping¹ SONG Yan-Rong¹ CHENG Zhao-Lin²

Abstract The paper considers synchronization of continuous time-varying linear multi-agent systems with switching topology. Under an assumption that agent dynamics is uniformly completely controllable, the synchronizing protocol is designed. By relating the synchronization problem to an infinite matrix product, the exponential synchronization result is obtained by showing the exponential convergence of the infinite product. Finally, the effectiveness of the result is illustrated by a numeric example.

Key words Time-varying linear multi-agent systems, exponential synchronization, protocol, infinite matrix product

Citation Wang Xing-Ping, Song Yan-Rong, Cheng Zhao-Lin. Exponential synchronization of time-varying linear multi-agent systems with switching topology. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(8): 1528–1532

多智能体系统具有广泛的应用背景. 从一般意义上讲, 具有自主输入–输出响应能力的个体都可看作智能体, 这样一群个体经连接组成多智能体系统. 由于智能体之间的相互作用, 多智能体能够形成一个复杂系统. 近年来, 由于控制理论和应用的发展, 多智能体系统已成为控制领域中一个重要的研究对象, 其中一个典型的研究课题就是多智能体系统的同步问题.

自文献 [1] 为 Vicsek 模型的同步现象给出一个近似的理论解释后, 一阶线性多智能体的同步问题首先得到研究^[2–3]. 最近几年, 研究重点开始转向一般线性多智能体同步问题. 这些研究有的面向固定网络^[4–6], 有的面向切换网络^[7–9], 但它们大多针对定常线性多智能体, 只有极少的文献涉及时变线性多智能体. 文献 [10] 研究具有固定网络的时变线

性多智能体的同步问题. 文中对智能体系统提出假设, 要求系统的系数矩阵满足 Lipschitz 条件, 还要求系统的状态转移矩阵是有界的. 在切换网络下, 向领导者的同步问题在文献 [11] 得到研究. 文中对智能体系统提出更强的假设, 要求存在一个正定矩阵 P , 使得对所有 $t \geq 0$ 系数矩阵 $A(t)$ 满足 $A^T(t)P + PA(t) \leq 0$. 这等价于要求所有 $A(t)$ 是临界稳定的, 且共享同一个 Lyapunov 函数. 另外还有一点需要注意, 在上述线性多智能体同步研究文献中, 它们大多采用二次 Lyapunov 函数方法. 特别地, 切换网络下的同步研究多采用共同二次 Lyapunov 函数方法^[9–11]. 由于共同二次 Lyapunov 函数方法的局限性, 依靠这类方法得出的多智能体同步结论难免会有保守性.

本文采用矩阵无穷乘积方法研究具有切换网络的时变连续线性多智能体同步问题. 这一方法在现有文献中主要应用于一阶多智能体同步研究^[1–2], 尚未见其应用于高阶连续多智能体同步问题. 本文在一个常见的一致完全可控性条件下, 给出同步协议的设计方法; 然后利用数学变换将多智能体同步问题转化为一个矩阵无穷乘积的收敛问题; 最后通过证明矩阵无穷乘积指数收敛到 0 给出了多智能体指数同步的结论. 这个方法基于矩阵分析技术, 避免了应用 Lyapunov 函数方法常用的非光滑分析技术^[9, 11].

符号说明: 在本文中, 以 $A \otimes B$ 表示矩阵 A 和 B 的 Kronecker 乘积, 以 $\|x\|$ 表示向量 x 的 Euclid 范数, 以 $\|A\|$ 表示矩阵 A 的由 Euclid 向量范数诱导的矩阵范数.

1 预备知识和问题叙述

1.1 时变线性系统

考虑连续时变线性系统

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (1)$$

其中, $x \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $u \in \mathbf{R}^m$ 是系统输入, $A(t)$, $B(t)$ 是维数适当的矩阵, 其元素是定义在 $t \geq 0$ 上的分段连续函数. 由于 $A(t)$ 的元素是分段连续的, 矩阵方程

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(s) = I \quad (2)$$

存在解 $\Phi(t, s)$, 这个解被称为系统 (1) 的状态转移矩阵^[12]. 系统的可控性格拉姆矩阵 (Controllability Gramian) 定义为

$$G(t, s) = \int_t^s \Phi(t, \sigma)B(\sigma)B^T(\sigma)\Phi^T(t, \sigma)d\sigma \quad (3)$$

时变线性系统 (1) 在区间 $[t_0, t_f]$ 上称为可控的, 是指对任意给定的初始状态 $x(t_0) = x_0$, 存在连续的输入信号 $u(t)$, 使得系统在 t_f 时刻的状态满足 $x(t_f) = 0$. 可控性是控制系统的一个重要性质. 关于时变线性系统 (1) 可控性的重要结论是: 系统 (1) 在区间 $[t_0, t_f]$ 上是可控的, 当且仅当格拉姆矩阵 $G(t_0, t_f)$ 是可逆的^[12].

1.2 代数图论

一个无向图 $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 由节点集合 $\mathcal{V}$ 和边集合 $\mathcal{E}$ 组成, 其中 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$ 是有限集, $\mathcal{E}$ 由 $\mathcal{V}$ 中一些相异元素构成的无序对组成. 对节点 u , 如边 $\{u, v\} \in \mathcal{E}$, 则称 v 是 u 的一个邻居, u 的所有邻居构成 u 的邻居集, 记为 $\mathcal{N}_G(u)$. 在图 G 中, 连接顶点 v_i 和 v_j 的路径是一个如下形式的边序列 $\{v_i, v_{j_1}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}, \dots, \{v_{j_k}, v_j\}$. 如果任何两个不同节点都存在一条连接它们的路径, 图 G 称为是连通的. 图 G 的

收稿日期 2014-12-30 录用日期 2015-03-31
Manuscript received December 30, 2014; accepted March 31, 2015
本文责任编辑 吕金虎

Recommended by Associate Editor LV Jin-Hu

1. 海军航空工程学院系统科学与数学研究所 烟台 264001 2. 山东大学数学学院 济南 250100

1. Institute of Systems Science and Mathematics, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001 2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100

邻接矩阵 $A(\mathcal{G}) = [a_{ij}]$ 是一个 N 阶方阵, 其元素定义为: 当 $\{v_i, v_j\} \in \mathcal{E}$ 时, $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$. 图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵 (Laplacian matrix, 简称拉氏矩阵) $L(\mathcal{G}) = [\ell_{ij}]$ 定义为: 当 $i \neq j$ 时, $\ell_{ij} = -a_{ij}$; 当 $i = j$ 时, $\ell_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$.

1.3 问题叙述

考虑由 N 个时变线性系统组成的多智能体系统. 以 $1, 2, \dots, N$ 标记这 N 个智能体, 第 i 个智能体的动态方程为时变线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = A(t)\mathbf{x}_i(t) + B(t)\mathbf{u}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

其中, $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{R}^m$, 矩阵 $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbf{R}^{n \times m}$, 其元素是定义在 $[0, \infty)$ 上的分段连续函数. 将每个智能体看作一个节点, 智能体间的通信网络以切换无向图 $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(t))$ 描述, 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$. 本文假设智能体系统 (4) 满足如下假设:

假设 1. 存在 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots$, 在每个区间 $[t_k, t_{k+1})$ 中, $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(t_k)$, 并且

$$\tau = \inf\{t_{k+1} - t_k : k = 0, 1, 2, \dots\} > 0$$

这里, τ 称为切换网络 $\mathcal{G}(t)$ 的驻留时间.

假设 2. 存在 $0 < \delta < \tau$ 和 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$, 对任意 $t \geq 0$, 格拉姆矩阵 $G(t, s)$ 满足

$$\varepsilon_1 I \leq G(t, t + \delta) \leq \varepsilon_2 I \quad (5)$$

假设 1 是多智能体系统研究中常见的条件. 假设 2 保证智能体在每个区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上都是可控的. 条件 (5) 与时变线性系统的一致完全可控性概念有关^[13], 它常见于时变线性系统的控制研究中^[12-13]. 假设 2 成立的一个充分条件在文献 [14] 中给出.

如果多智能体系统 (4) 满足假设 1 和假设 2, 对任意 $\alpha \geq 0$, 定义

$$G_\alpha(t, t + \delta) = \int_t^{t+\delta} 2e^{4\alpha(t-\sigma)} \Phi(t, \sigma) B(\sigma) B^T(\sigma) \Phi^T(t, \sigma) d\sigma \quad (6)$$

由假设 2, 对任意 $t \geq 0$, $G_\alpha(t, t + \delta) > 0$ 是可逆的. 设计多智能体系统同步协议

$$\mathbf{u}_i(t) = \kappa \sum_{j \in \mathcal{N}_t(i)} B^T(t) G_\alpha^{-1}(t, t + \delta) (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)) \quad (7)$$

其中, $\kappa = 4^{-1}N(N-1)$, $\mathcal{N}_t(i)$ 表示 t 时刻节点 i 在 $\mathcal{G}(t)$ 上的邻居集. 本文研究时变线性多智能体系统 (4) 的同步问题, 主要结论是下面的定理 1.

定理 1. 假设时变线性多智能体系统 (4) 满足假设 1 和假设 2, 并且 $\mathcal{G}(t)$ 在任一时刻 t 都是连通的. 对任意给定的 $\gamma > 0$, 取 α 满足不等式 $2\alpha > \gamma$ 和

$$(\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{-2\alpha[\tau-\delta]} e^{\gamma\tau} < 1 \quad (8)$$

则在同步协议 (7) 的作用下, 存在 $C > 0$, 使智能体状态满足 $\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| \leq Ce^{-\gamma t} \|\mathbf{x}(0)\|$

其中, $i, j = 1, 2, \dots, N$, $\mathbf{x}(0) = (\mathbf{x}_1^T(0), \dots, \mathbf{x}_N^T(0))^T$. 此即闭环系统 (4)~(7) 是指数同步的.

2 定理证明

根据拉氏矩阵定义, 阶数为 N 的无向图 $\mathcal{G}$ 的拉氏矩阵 $L(\mathcal{G})$ 是一个半正定矩阵. 将 $L(\mathcal{G})$ 的全部特征值按升序排成 $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$, 则:

引理 1. 如果图 $\mathcal{G}$ 是连通的, 则 $\lambda_1 = 0$ 且对应的特征向量为 $\mathbf{1}$, 这里 $\mathbf{1}$ 表示 N 个分量全部为 1 的向量, 同时 $\lambda_2 \geq 4/(Nd)$, 其中 d 是图 $\mathcal{G}$ 的直径.

关于 λ_1 的结论是代数图论的一般事实. 关于 λ_2 的事实在文献 [15] 中给出, 它称为 $\mathcal{G}$ 的代数连通度 (Algebraic connectivity).

考虑如下时变线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A(t) - \mu B(t) B^T(t) G_\alpha^{-1}(t, t + \delta)) \mathbf{x}(t) \quad (9)$$

其中, $\mu \geq 1$. 以 $\Phi_{\alpha, \mu}(t, s)$ 表示系统 (9) 的状态转移矩阵, 关于 $\Phi_{\alpha, \mu}(t, s)$ 范数有如下结论:

引理 2. 若存在 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$, 使得系统 (1) 的格拉姆矩阵 $G(t, s)$ 满足

$$\varepsilon_1 I \leq G(t, t + \delta) \leq \varepsilon_2 I$$

则对所有 $\alpha > 0$ 和 $\mu \geq 1$, 有:

$$\|\Phi_{\alpha, \mu}(t, s)\| \leq (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta} e^{-2\alpha(t-s)} \quad (10)$$

证明. 考虑在时刻 s 具有初值 $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0$ 的微分方程

$$\dot{\mathbf{x}} = (A(t) - \mu B(t) B^T(t) G_\alpha^{-1}(t, t + \delta)) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 \quad (11)$$

令 $Q(t) = G_\alpha^{-1}(t, t + \delta)$, 定义函数

$$V(t) = \mathbf{x}^T(t) Q(t) \mathbf{x}(t)$$

式中, $\mathbf{x}(t)$ 是式 (11) 的解. 计算 $V(t)$ 关于 t 的导数, 有:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \mathbf{x}^T(t) ([A(t) - \mu B(t) B^T(t) Q(t)]^T Q(t) + \\ & Q(t) [A(t) - \mu B(t) B^T(t) Q(t)] + \dot{Q}(t)) \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

计算

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_\alpha(t, t + \delta) = & 2e^{-4\alpha\delta} \Phi(t, t + \delta) B(t + \delta) B^T(t + \delta) \Phi^T(t, t + \delta) - \\ & 2B(t) B^T(t) + 4\alpha Q^{-1}(t) + A(t) Q^{-1}(t) + Q^{-1}(t) A^T(t) \end{aligned}$$

并将

$$\dot{Q}(t) = -Q(t) \left[\frac{d}{dt} G_\alpha(t, t + \delta) \right] Q(t)$$

代入 $\dot{V}(t)$, 整理可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \mathbf{x}^T(t) [-4\alpha Q(t) - 2(\mu - 1) Q(t) B(t) B^T(t) Q(t) - \\ & 2e^{-4\alpha\delta} Q(t) \Phi(t, t + \delta) B(t + \delta) \times \\ & B^T(t + \delta) \Phi^T(t, t + \delta) Q(t)] \mathbf{x}(t) \leq \\ & -4\alpha \mathbf{x}^T(t) Q(t) \mathbf{x}(t) = -4\alpha V(t) \end{aligned}$$

利用比较原理^[13], 可由此推出

$$V(t) \leq e^{-4\alpha(t-s)} V(s) \quad (12)$$

根据 $G_\alpha(t, t + \delta)$ 的定义及 $e^{4\alpha(t-\sigma)}$ 的单调性, 有:

$$2\varepsilon_1 e^{-4\alpha\delta} I \leq G_\alpha(t, t + \delta) \leq 2\varepsilon_2 I$$

从而, 有:

$$(2\varepsilon_2)^{-1} I \leq Q(t) \leq (2\varepsilon_1)^{-1} e^{4\alpha\delta} I$$

于是

$$V(t) = \mathbf{x}^T(t) Q(t) \mathbf{x}(t) \geq (2\varepsilon_2)^{-1} \|\mathbf{x}(t)\|^2$$

$$V(s) = \mathbf{x}^T(s) Q(s) \mathbf{x}(s) \leq (2\varepsilon_1)^{-1} e^{4\alpha\delta} \|\mathbf{x}_0\|^2$$

将以上两个不等式代入式 (12), 可得:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta} e^{-2(t-s)\alpha} \|\mathbf{x}_0\| \quad (13)$$

由于 $\Phi_{\alpha, \mu}(t, s)$ 是系统 (11) 的转移矩阵, 所以 $\mathbf{x}(t) = \Phi_{\alpha, \mu}(t, s) \mathbf{x}_0$, 代入式 (13) 并利用矩阵范数定义就得到:

$$\|\Phi_{\alpha, \mu}(t, s)\| \leq (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta - 2\alpha(t-s)}$$

□

引理 2 给出状态转移矩阵 $\Phi_{\alpha, \mu}(t, s)$ 的渐近估计和瞬态估计. 当 t 趋于 s 时, 矩阵会经历超调, 幅值达到 $(\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta}$. 但当 t 从 s 开始增大时, 指数下降的因子 $e^{-2\alpha(t-s)}$ 会抵消超调. 特别地, 当 $t - s > \delta$ 时, 可以选择 α 充分大, 使得 $\Phi_{\alpha, \mu}(t, s)$ 任意小. 当式 (1) 是定常系统时, 类似的估计在定常线性切换系统研究中得到^[16]. 引理 2 的特点是估计式 (10) 对所有 $\mu \geq 1$ 一致成立.

下面给出定理 1 的证明.

证明. 由假设 1, 存在序列

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < \cdots$$

使得 $t_{k+1} - t_k \geq \tau$ 及当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(t_k)$. 将同步协议 (7) 应用到多智能体系统 (4), 然后将闭环系统写成时变线性切换系统形式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (I \otimes A(t) - \kappa L(t_k) \otimes B(t) B^T(t) G_\alpha^{-1}(t, t + \delta)) \mathbf{x}(t) \quad (14)$$

式中, $L(t_k) = L(\mathcal{G}(t_k))$, $t_k \leq t < t_{k+1}$. 将矩阵 $L(t_k)$ 的特征值按升序排列为

$$0 = \lambda_1(t_k) \leq \lambda_2(t_k) \leq \cdots \leq \lambda_N(t_k)$$

由于 $\mathcal{G}(t_k)$ 是连通的, 根据引理 1, $\lambda_1(t_k) = 0$ 是单根且对应的特征向量为 $\mathbf{1}$. 设 $\sqrt{N-1} \mathbf{1}, \boldsymbol{\zeta}_2(t_k), \cdots, \boldsymbol{\zeta}_N(t_k)$ 是与 $\lambda_1(t_k), \cdots, \lambda_N(t_k)$ 对应的正交规范化特征向量, 令 $C(t_k) = (\boldsymbol{\zeta}_2(t_k), \cdots, \boldsymbol{\zeta}_N(t_k))$ 及 $T(t_k) = (\sqrt{N-1} \mathbf{1}, C(t_k))$. 则 $T(t_k)$ 是一个正交矩阵, 且有:

$$T^T(t_k) L(t_k) T(t_k) = \text{diag}\{0, \lambda_2(t_k), \cdots, \lambda_N(t_k)\}$$

在时间区间 $[t_k, t_{k+1})$ 内做坐标变换

$$\mathbf{x}(t) = T(t_k) \otimes I \cdot \mathbf{z}(t) \quad (15)$$

记 $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T)^T$, $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{z}_2 \in \mathbf{R}^{(N-1)n}$, 在新的坐标下, 系统 (14) 变为

$$\dot{\mathbf{z}}_1(t) = A(t) \mathbf{z}_1(t)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_2(t) = (I \otimes A(t) - \kappa \Lambda(t_k) \otimes B(t) B^T(t) G_\alpha^{-1}(t, t + \delta)) \mathbf{z}_2(t) \quad (16)$$

式中, $\Lambda(t_k) = \text{diag}\{\lambda_2(t_k), \cdots, \lambda_N(t_k)\}$.

系统 $\mathbf{z}_1$ 的状态转移矩阵是 $\Phi(t, s)$, 系统 $\mathbf{z}_2$ 的系数矩阵是分块对角阵

$$\begin{aligned} I \otimes A(t) - \kappa \Lambda(t_k) \otimes B(t) B^T(t) G_\alpha^{-1}(t, t + \delta) = \\ \text{diag}\{A(t) - \mu_2(t_k) B(t) B^T(t) G_\alpha^{-1}(t, t + \delta), \cdots, \\ A(t) - \mu_N(t_k) B(t) B^T(t) G_\alpha^{-1}(t, t + \delta)\} \end{aligned}$$

其中, $\mu_i(t_k) = \kappa \lambda_i(t_k)$, 利用引理 2 中的记号, 系统 $\mathbf{z}_2$ 在 $[t_k, t_{k+1})$ 上的状态转移矩阵为

$$\check{\Phi}(t, s) = \text{diag}\{\Phi_{\alpha, \mu_2(t_k)}(t, s), \cdots, \Phi_{\alpha, \mu_N(t_k)}(t, s)\}$$

借助状态转移矩阵 $\Phi(t, s)$ 和 $\check{\Phi}(t, s)$, 系统 (16) 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上的解为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(t, t_k) & \\ & \check{\Phi}(t, t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t_k) \\ \mathbf{z}_2(t_k) \end{bmatrix}$$

根据式 (15), 闭环系统 (14) 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上的解 $\mathbf{x}(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = [N^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \otimes \Phi(t, t_k) + \\ C(t_k) \otimes I \cdot \check{\Phi}(t, t_k) \cdot C^T(t_k) \otimes I] \mathbf{x}(t_k) \end{aligned} \quad (17)$$

利用 $\mathbf{x}(t)$ 状态轨迹的连续性, 取 $t \rightarrow t_{k+1}$, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{k+1}) = [N^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \otimes \Phi(t_{k+1}, t_k) + \\ C(t_k) \otimes I \cdot \check{\Phi}(t_{k+1}, t_k) \cdot C^T(t_k) \otimes I] \mathbf{x}(t_k) \end{aligned} \quad (18)$$

下面在式 (17) 和式 (18) 的基础上继续推导, 将所有智能体状态与其均值的差表示成矩阵乘积形式. 为方便叙述, 引入记号

$$\Psi(t, t_k) = C(t_k) \otimes I \cdot \check{\Phi}(t, t_k) \cdot C^T(t_k) \otimes I$$

在式 (17) 两端减去 $N^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \otimes \Phi(t, t_k) \mathbf{x}(t_k)$, 利用事实 $C^T(t_k) \mathbf{1} = 0$, 可以验证:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) - N^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \otimes \Phi(t, t_k) \cdot \mathbf{x}(t_k) = \\ \Psi(t, t_k) (I - N^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \otimes I) \mathbf{x}(t_k) \end{aligned} \quad (19)$$

在式 (18) 两端左乘矩阵 $I - N^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \otimes I$, 同样可以验证:

$$\begin{aligned} (I - N^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \otimes I) \mathbf{x}(t_{k+1}) = \Psi(t_{k+1}, t_k) \mathbf{x}(t_k) = \\ \Psi(t_{k+1}, t_k) (I - N^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \otimes I) \mathbf{x}(t_k) \end{aligned} \quad (20)$$

将式 (20) 看作是一个递推公式, 并结合式 (19), 当 $t_k \leq t < t_{k+1}$ 时, 可推出关系式

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) - N^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \otimes \Phi(t, t_k) \mathbf{x}(t_k) = \\ \Psi(t, t_k) \left(\prod_{i=0}^{k-1} \Psi(t_{i+1}, t_i) \right) \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (21)$$

记 $\mathbf{x}_s(t, t_k) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \Phi(t, t_k) \mathbf{x}_i(t_k)$, 关系式 (21) 可以改写为

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s(t, t_k) = \Psi(t, t_k) \left(\prod_{i=0}^{k-1} \Psi(t_{i+1}, t_i) \right) \mathbf{x}(0) \quad (22)$$

这样, 系统 (14) 的状态与 $\mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s(t, t_k)$ 的差被表示为矩阵乘积形式. 下面通过范数估计证明在 $t \rightarrow \infty$ 时, 矩阵无穷乘积以 $e^{-\gamma t}$ 的速度趋于零.

首先, 估计 $\Psi(t_{i+1}, t_i)$ 的范数. 由 $\mathcal{G}(t_i)$ 是连通的, 同时阶数为 N 的连通图的直径 $d \leq N-1$, 根据引理 1, $\lambda_2(t_i) \geq \frac{4}{N(N-1)}$, 由此, $\mu_j(t_i) \geq 1, j = 2, \dots, N$. 利用引理 2, 有:

$$\begin{aligned} \|\Psi(t_{i+1}, t_i)\| &= \|\check{\Phi}(t_{i+1}, t_i)\| = \\ &= \max_{2 \leq j \leq N} \|\Phi_{\alpha, \mu_j(t_i)}(t_{i+1}, t_i)\| \leq \\ &= (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta - 2\alpha(t_{i+1} - t_i)} \end{aligned} \quad (23)$$

由假设 1, $t_{i+1} - t_i \geq \tau$, 再利用不等式 (8),

$$\begin{aligned} (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta - 2\alpha(t_{i+1} - t_i)} e^{\gamma(t_{i+1} - t_i)} &\leq \\ (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta} e^{-(2\alpha - \gamma)\tau} &= \\ (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{-2\alpha(\tau - \delta)} e^{\gamma\tau} &< 1 \end{aligned}$$

所以

$$\|\Psi(t_{i+1}, t_i)\| \leq (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta - 2\alpha(t_{i+1} - t_i)} < e^{-\gamma(t_{i+1} - t_i)} \quad (24)$$

其次, 利用引理 2 估计 $\Xi(t, t_k)$ 的范数, 则有:

$$\begin{aligned} \|\Psi(t, t_k)\| &= \|\Phi(t, t_k)\| \leq (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta - 2\alpha(t - t_k)} \leq \\ &= (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta} e^{-\gamma(t - t_k)} \end{aligned} \quad (25)$$

在式 (22) 两端取范数, 并将式 (24) 和式 (25) 代入, 可得:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{1} \otimes \mathbf{x}_s(t, t_k)\| &= \left\| \Psi(t, t_k) \prod_{i=0}^{k-1} \Psi(t_{i+1}, t_i) \mathbf{x}(0) \right\| \leq \\ &= (\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta} e^{-\gamma t} \|\mathbf{x}(0)\| \end{aligned} \quad (26)$$

于是, 对任意 $i, j = 1, 2, \dots, N$, 有:

$$\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| \leq 2(\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta} e^{-\gamma t} \|\mathbf{x}(0)\|$$

取 $C = 2(\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})^{\frac{1}{2}} e^{2\alpha\delta}$, 即证得结论. $\square$

定理证明包含两个步骤: 1) 将同步问题转化为矩阵无穷乘积收敛问题 (22), 其关键是依赖切换网络的坐标变换 (15) 的引入, 基于这个变换, 同步问题与矩阵无穷乘积联系起来; 2) 论证无穷乘积指数收敛到 0, 在这一步引理 2 起了关键作用, 它保证可以选择 α 控制矩阵 $\Psi(t_{i+1}, t_i)$ 的范数. 与文献 [10–11] 的结论相比, 定理 1 不再对智能体的状态转移函数提出有界假设, 仅要求智能体满足一致完全可控性条件, 这个条件在时变线性系统控制研究中是常见的. 另外, 文献 [10–11] 的结论只能保证指数同步的结论, 没有给出同步收敛速度的

估计, 而定理 1 则给出了收敛速度的估计, 可以选择适当设计参数使同步以任意指数速度实现.

注 1. 如果 $\mathcal{G}(t)$ 在一个已知的连通图集合 S 中取值, 则同步协议 (7) 的 κ 可取 $\kappa = \lambda_S^{-1}$, 其中 $\lambda_S = \min\{\lambda_2(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \in S\}$, $\lambda_2(\mathcal{G})$ 表示连通图 $\mathcal{G}$ 的代数连通度.

3 仿真实例

考虑由 10 个智能体组成的系统, 它们的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 12 \cos(15t) + 0.8 \sin(15t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_i(t)$$

式中, $i = 1, \dots, 10$. 集合 S 由 10 个连通图 $\mathcal{G}(k) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(k))$, $k = 1, 2, \dots, 10$ 组成, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, 10\}$,

$$\mathcal{E}(k) = \{\{i, k\} : i \neq k, i = 1, \dots, 10\}$$

令 $t_k = 0.15k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. 在时刻 t_k 从 S 中随机选取图 $\mathcal{G}(t_k)$, 然后对 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 定义 $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(t_k)$.

计算智能体动态的状态转移矩阵 $\Phi(t, s)$ 为

$$\Phi(t, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0.8e^{t-s} \sin(15t) - \sin(15s) \\ 0 & e^{t-s} \end{bmatrix}$$

可验证当 $t \geq 0$ 时, $\Phi(t, s)$ 满足不等式

$$0.0003I \leq G(t, t + 0.1) \leq 0.15I$$

根据定理 1, 多智能体系统可以由同步协议 (7) 实现同步. 取 $\gamma = 0.1$, 从不等式 (8) 中可解出 $\alpha = 31.173$. 由于按式 (8) 选择的 α 比较保守, 这里直接选取 $\alpha = 1$. 所有图 $\mathcal{G}(k)$ 的代数连通度都是 1, 由注 1, $\kappa = 1$. 在平面区域 $[-10, 20] \times [-10, 20]$ 中为每个智能体随机选取初值, 然后运行仿真. 仿真结果如图 1 所示.

4 结论

本文研究切换网络下时变连续线性多智能体同步问题, 这一问题在现有文献中较少得到关注. 在一个一致可控性条件下给出同步协议的设计方法, 并证明了耦合多智能体系统指数同步的结论, 这一结论不需对状态转移函数进行额外限制. 本文引入矩阵无穷乘积方法研究连续线性多智能体系统的同步问题, 这一方法曾被用来研究一阶线性智能体系统的同步问题^[1–2], 但未见其应用于高阶连续多智能体同步问题. 与 Lyapunov 函数方法比较, 这一方法可以使用矩阵分析技术建立线性多智能体系统的同步结论.

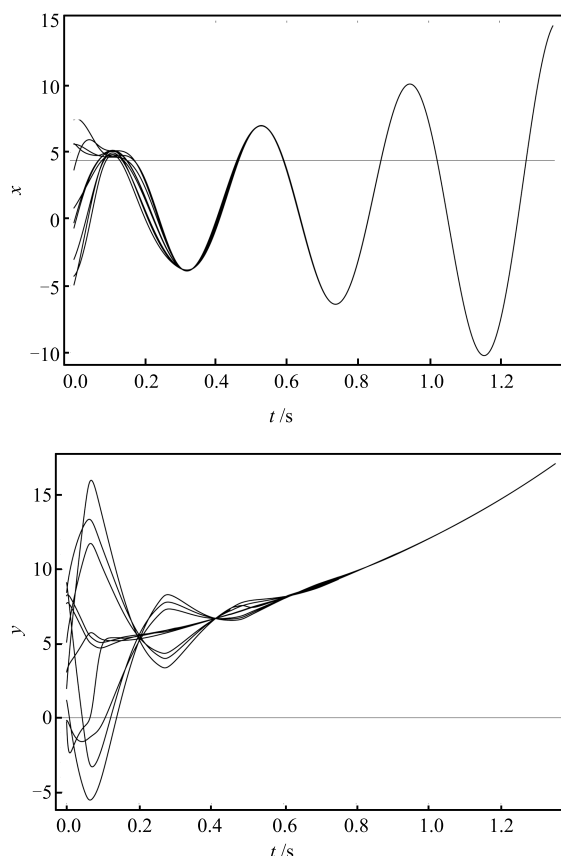


图 1 10 个智能体的状态轨迹

Fig. 1 The state trajectories of 10 agents

References

- Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988–1001
- Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **50**(5): 655–661
- Liu Zhi-Xin, Guo Lei. Connectivity and synchronization of the Vicsek model. *Science China: Information Sciences*, 2007, **37**(8): 979–988
(刘志新, 郭雷. Vicsek 模型的连通与同步. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2007, **37**(8): 979–988)
- Chen Yang-Zhou, Ge Yan-Rong, Zhang Ya-Xiao. Partial stability approach to consensus problem of linear multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2573–2583
(陈阳舟, 盖彦荣, 张亚肖. 线性多智能体系统一致性问题的部分稳定性方法. 自动化学报, 2014, **40**(11): 2573–2583)
- Li Z K, Ren W, Liu X D, Fu M Y. Consensus of multi-agent systems with general linear and lipschitz nonlinear dynamics using distributed adaptive protocols. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(7): 1786–1791
- Zhou B, Xu C C, Duan G R. Distributed and truncated reduced-order observer based output feedback consensus of multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(8): 2264–2270
- Cao Xi-Bin, Guo Hai-Bo, Zhang Shi-Jie. Information topology-independent consensus criteria for second-order systems under directed graph. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 995–1002
(曹喜滨, 郭海波, 张世杰. 基于有向图的信息拓扑独立的二阶系统一致性判据. 自动化学报, 2013, **39**(7): 995–1002)
- Ni W, Cheng D Z. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies. *Systems and Control Letters*, 2010, **59**(3): 209–217
- Su Y F, Huang J. Stability of a class of linear switching systems with applications to two consensus problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(6): 1420–1430
- Tuna S E. Sufficient conditions on observability Grammian for synchronization in arrays of coupled linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(11): 2586–2590
- Yang T, Meng Z Y, Shi G D, Hong Y G, Johansson K H. Synchronization for multi-agent systems under directed switching topologies [Online], available: <http://arxiv.org/abs/1401.6541v1>, January 25, 2014
- Rugh W J. *Linear System Theory (2nd edition)*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1996. 142–148
- Huang Lin. *Stability Theory*. Beijing: Beijing University Press, 1992. 290–295
(黄琳. 稳定性理论. 北京: 北京大学出版社, 1992. 290–295)
- Kern G. Uniform controllability of a class of linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, **27**(1): 208–210
- Mohar B. Eigenvalues, diameter, and mean distance in graphs. *Graphs and Combinatorics*, 1991, **7**(1): 53–64
- Cheng D, Guo L, Lin Y, Wang Y. Stabilization of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 661–666

王兴平 海军航空工程学院副教授. 主要研究方向为非线性系统和多智能体系统. 本文通信作者. E-mail: wangxpyan@hotmail.com
(WANG Xing-Ping Associate professor at the Institute of Systems Science and Mathematics, Naval Aeronautical and Astronautical University. His research interest covers nonlinear systems and multi-agent systems. Corresponding author of this paper.)

宋艳荣 海军航空工程学院副教授. 主要研究方向为多智能体系统. E-mail: yanrong79@163.com
(SONG Yan-Rong Associate professor at the Institute of Systems Science and Mathematics, Naval Aeronautical and Astronautical University. Her research interest covers multi-agent systems.)

程兆林 山东大学数学学院教授. 主要研究方向为多变量线性系统. E-mail: zhaolincheng.sdu@gmail.com
(CHENG Zhao-Lin Professor at the School of Mathematics, Shandong University. His research interest covers multi-variable linear systems.)