

两类推广的渐近迭代逼近

陈杰^{1,2} 王国瑾^{1,2} 金聪健^{1,2}

摘要 在计算机辅助设计领域里, 曲线或曲面的渐近迭代逼近 (Progressive iterative approximation, PIA) 性质在插值与拟合问题中有着广泛的应用, 以前的文献对这一性质的讨论主要局限在标准全正基的情形. 对于一般的非标准全正基, 本文指出, 其在适当的参数下也有可能同样具有这一优良的性质, 并给出了相应的实例, 从而拓宽了渐近迭代逼近的适用范围. 与此同时, 还讨论了权因子各不相同, 带权渐近迭代逼近的收敛性, 使得迭代逼近曲线对不同的控制顶点, 具有不同的加速收敛速度.

关键词 计算机辅助设计, 渐近迭代逼近, 带权渐近迭代逼近, 广义严格对角占优, 非标准全正基

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00135

Two Kinds of Generalized Progressive Iterative Approximations

CHEN Jie^{1,2} WANG Guo-Jin^{1,2} JIN Cong-Jian^{1,2}

Abstract In the field of computer aided design, the progressive iterative approximation (PIA) property of curves (surfaces) has wide applications in the interpolation and fitting problems, some previous works mainly discussed this PIA property in the case of normalized totally positive (NTP) basis. For general non-NTP basis, we point out that this good property also can be satisfied with some proper parameters, and many corresponding examples are given. Thus, the scope of applications of PIA can be widened. Furthermore, we discuss the convergence properties of weighted PIA with different weights, so that iterative approximation curves have different convergence rates near each data point.

Key words Computer aided design, progressive iterative approximation, weighted progressive iterative approximation, generalized diagonally dominant, non-normalized totally positive (non-NTP) basis

在计算机辅助几何设计 (Computer aided geometric design, CAGD) 中, 散乱数据点的逼近和拟合问题是一个基础而重要的研究课题. 随着现代激光采样等一些硬件技术的提高, 大规模散乱数据点的曲线或曲面的重构问题, 也就是逆向工程技术得到了较大的发展. 在一般的逼近问题中, 模型本身的收敛稳定性和收敛速度显得尤为重要. 近来一种被称为渐近迭代逼近 (Progressive iterative approximation, PIA) 的方法受到广泛的关注^[1-7].

对于这一方法, Ando^[7] 首先系统地讨论了一类全正矩阵及其性质. 任一矩阵被称为全正矩阵当且仅当它的全部子式

的行列式均为非负; 任一函数系统 $(u_0(t), u_1(t), \dots, u_n(t))$ 被称为全正的当且仅当其在任意参数点集 $\{t_i\}_{i=1}^m$ 处的配置

矩阵 $M \begin{pmatrix} u_0, \dots, u_n \\ t_0, \dots, t_m \end{pmatrix} = (u_j(t_i))_{i=0, \dots, m; j=0, \dots, n}^j$ 均为全正矩阵.

我们熟知的 Bernstein 基函数和 B 样条基函数都是典型的全正基. 全正基同时也是一组具有最优保形性质的基函数^[8]. Qi 等^[1] 和 Boor^[2] 首先提出对均匀三次 B 样条基应用 PIA 算法. Lin 等^[3] 将上述结果严格推广到非均匀三次 B 样条基, 并证明了在一般情况下, 所有的标准全正基所生成的参数曲线或张量积曲面都具有 PIA 性质^[4]. 由于 PIA 方法具有很好的自适应性和收敛稳定性, 因而, 在散乱数据点的逼近和拟合问题上具有很好的应用前景. 在此基础上, 为了加快 PIA 的收敛速度, 一种方法是选择合适的基函数, 为此, Delgado 等^[5] 对一些标准全正基的迭代逼近速度进行了比较, 并指出 B 基速度最优. 另一种方法由 Lu^[9] 给出, 对给定的标准全正基引入了带权的 PIA. 此外, Lin^[10] 提出了一种局部 PIA, 其特点是可以有选择性地逼近部分数据点, 因而, 具有更大的灵活性. 同年, Delgado 等^[11] 对不同基函数空间的 PIA 收敛速度进行了对比, 还给出了有理情形下如何选择权因子以加快收敛速度; Lin^[12] 讨论了一类几何插值算法及其收敛性.

不过以往的工作主要局限于基函数是标准全正基的情形, 而标准全正基只是函数空间中相对比较狭隘的一个子集, 如果在构造曲线或曲面过程中使用较为一般的基函数而非全正基, 就不一定能得到 PLA 性质, 因而, 在实际应用中具有一定的局限性. 因此, 对于更为一般的混合基函数, 讨论其是否也具有 PIA 性质或带权 PIA 性质具有重要的意义. 如果这一猜想能成立, 那么更需探究其成立的条件是什么. 本文对这一工作进行了深入的探讨, 发现并证明了一般的混合基函数在适当的参数下也同样具有这一优良性质, 并给出了相应的实例, 从而将 PIA 的适用范围推广到部分非标准全正基, 使得其在实际应用中有了更宽松的工具可供选择. 此外, 本文还讨论了一类推广的带权 PIA 性质, 通过选择不同的权因子, 对不同的控制顶点, 具有不同的加速收敛速度, 因而, 较之以前的模型具有更大的自由度.

1 PIA 性质与带权 PIA 性质的相关研究结果简述

本节将渐近迭代逼近的一些背景知识简要地进行回顾. 设 $(B_0(t), B_1(t), \dots, B_n(t))$ 是一组混合基, 即每个函数非负且满足 $\sum_{i=0}^n B_i(t) = 1$. 给定一系列数据点 $\{\mathbf{P}_i\}_{i=0}^n$, 其中第 i 个点向量对应于参数值 t_i , $i = 0, 1, \dots, n$. 初始曲线为 $\mathbf{C}^0(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^0 B_i(t)$, 其中, $\mathbf{P}_i^0 = \mathbf{P}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. 然后, 对每个控制顶点计算调节向量 $\Delta_i^0 = \mathbf{P}_i - \mathbf{C}^0(t_i)$, 并且令 $\mathbf{P}_i^1 = \mathbf{P}_i^0 + \Delta_i^0$, $i = 0, 1, \dots, n$. 由此可以得到 $\mathbf{C}^1(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i^1 B_i(t)$. 不断地迭代这一过程, 可以得到曲线序列 $\{\mathbf{C}^k(t)\}_{k=0}^\infty$.

若对所有 $i = 0, 1, \dots, n$, 均有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}^k(t_i) = \mathbf{P}_i^0$, 则称初始曲线 $\mathbf{C}^0(t)$ 具有渐近迭代逼近 (PIA) 性质, 或等价地称混合基 $(B_0(t), B_1(t), \dots, B_n(t))$ 具有 PIA 性质. 进一步, 若在上述迭代过程中, 把新控制顶点逐次取为 $\mathbf{P}_i^{k+1} = \mathbf{P}_i^k + \omega \Delta_i^k$, $i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots$, 其中, $\omega \in (0, 2)$ 是权因子, 其余步骤相同, 而同样有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}^k(t_i) = \mathbf{P}_i^0$, 则称初始曲线 $\mathbf{C}^0(t)$ 具有带权 PIA 性质.

收稿日期 2011-01-27 录用日期 2011-05-28

Manuscript received January 27, 2011; accepted May 28, 2011

国家自然科学基金 (61070065, 60933007) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61070065, 60933007)

本文责任编辑 孙长银

Recommended by Associate Editor SUN Chang-Yin

1. 浙江大学数学系计算机图形图像处理研究所 杭州 310027 2. 浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310027

1. Institute of Image Processing and Computer Graphics and the Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027 2. State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027

在具体的迭代过程中, 对于调节向量 $\Delta^k = [\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_n^k]^T$, $k = 0, 1, \dots$, 在不带权情形下有迭代关系 $\Delta^{k+1} = (I - B)\Delta^k$, 在带权情形下有迭代关系 $\Delta^{k+1} = (I - \omega B)\Delta^k$, 其中, I 为单位矩阵, B 为混合基 $(B_0(t), B_1(t), \dots, B_n(t))$ 在参数点 $\{t_i\}_{i=0}^n$ 处的配置矩阵 $B \begin{pmatrix} B_0, \dots, B_n \\ t_0, \dots, t_n \end{pmatrix} = (B_j(t_i))_{i=0, \dots, n}^{j=0, \dots, n}$. 容易看出, 要使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}^k(t_i) = \mathbf{P}_i^0$, 等价于 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = 0$. 从上面的分析可知, 要使初始曲线 $\mathbf{C}^0(t)$ 具有 PIA 性质, 最关键的是要使矩阵 $I - B$ 的谱半径满足 $\rho(I - B) < 1$. 设配置矩阵 B 的 $n + 1$ 个特征值为 $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, 要使 $\rho(I - B) < 1$, 即对于每一个特征值 λ_i , 均要满足 $\lambda_i \in \Omega = \{Z | |Z - 1| < 1, Z \in \mathbf{C}\}$.

2 一般混合基函数的 PIA 性质与带权 PIA 性质

本节主要讨论一般的混合基函数在满足一定的条件时, 所具有的 PIA 性质或带权 PIA 性质. 具体来说, 我们发现了以下事实, 并从理论上给出了证明: 当混合基在给定参数值 $\{t_i\}_{i=0}^n$ 的配置矩阵为严格对角占优或者广义严格对角占优时, 其相应的初始曲线就必然具有带权或不带权的 PIA 性质. 这一方法将可以实施 PIA 的那类参数曲线曲面的基函数的范围进行了拓广, 即并非只有标准全正基作为混合函数的曲线曲面才可实施 PIA; 对于非标准全正基, 在合适的参数下也可能具有带权或不带权的 PIA 这一优良的性质.

为了后面应用的需要, 首先, 我们给出矩阵论中的一些基本概念与结果.

定义 1^[13]. 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且 $n \geq 2$ (其中 $M_n(\mathbf{C})$ 为复数域上 n 阶矩阵域). 如果 $|a_{ii}| > R_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则称矩阵 A 为严格对角占优矩阵.

定义 2^[13]. 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 且 $n \geq 2$. 如果存在正对角矩阵 X , 使得 AX 是严格对角占优矩阵, 则称矩阵 A 为广义严格对角占优矩阵.

定义 3. 给定区间 $[0, 1]$ 上的一组基函数 $(b_0(t), b_1(t), \dots, b_n(t))$, 如果存在参数序列 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq 1$, 使得配置矩阵

$$B = \begin{bmatrix} b_0(t_0) & b_1(t_0) & \dots & b_n(t_0) \\ b_0(t_1) & b_1(t_1) & \dots & b_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0(t_n) & b_1(t_n) & \dots & b_n(t_n) \end{bmatrix}$$

为严格对角占优矩阵或者广义严格对角占优矩阵, 称 $(b_0(t), b_1(t), \dots, b_n(t))$ 为满足“性质 GDD” (Generally diagonally dominant) 的基函数.

引理 1^[13]. 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ 为严格对角占优矩阵或者广义严格对角占优矩阵, 则当 $a_{ii} > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ 时, A 的特征值的实部均为正.

引理 2. 如果配置矩阵 B 的 $n + 1$ 个特征值 λ_i 实部均为正, 即 $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 那么初始曲线 $\mathbf{C}^0(t)$ 或者具有 PIA 性质, 或者具有带权 PIA 性质.

证明. 由于配置矩阵 B 为行随机矩阵, 则 $\rho(B) = 1$, 即 $\lambda_i \in D = \{Z | |Z - 1| \leq 1, Z \in \mathbf{C}\}$, 同时对于任一 λ_i , 依条件有 $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, 那么 $\lambda_i \in D^+ = \{Z | |Z - 1| \leq 1, \text{Re}(Z) >$

$0, Z \in \mathbf{C}\}$. 记 $\Gamma = \{i | \lambda_i \in D^+ \cap \bar{\Omega}, i = 0, 1, \dots, n\}$, 其中, $\bar{\Omega}$ 表示 Ω 的余集, 下面分情况进行讨论. 如果 $\Gamma = \Phi$ 为空集, 即对于任一 λ_i 均有 $\lambda_i \in D^+ \cap \Omega$, 如图 1 所示, 因此 $\rho(I - B) < 1$, 由此可知, 初始曲线 $\mathbf{C}^0(t)$ 具有 PIA 性质. 如果 $\Gamma \neq \Phi$ 为非空集, 对于任一 $\lambda_i \in \Gamma$, 设 $\lambda_i = a_i + jb_i$, 其中 j 为虚数单位. 令权因子 $\omega = \min_{i \in \Gamma} \{a_i / (a_i^2 + b_i^2)\}$, 此时, $\omega\lambda_i \in D^+ \cap \Omega$ ($i = 0, 1, \dots, n$), 如图 2 所示, 因此, $\rho(I - \omega B) < 1$, 那么初始曲线 $\mathbf{C}^0(t)$ 具有带权 PIA 性质. $\square$

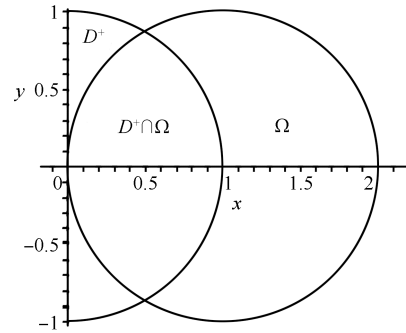


图 1 $\lambda_i \in D^+ \cap \Omega$

Fig. 1 $\lambda_i \in D^+ \cap \Omega$

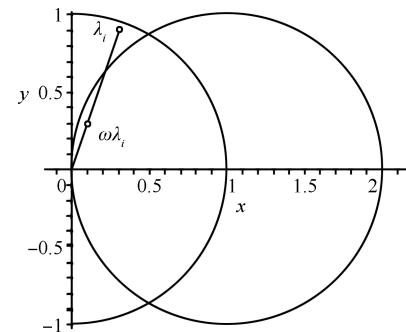


图 2 $\lambda_i \notin D^+ \cap \Omega$

Fig. 2 $\lambda_i \notin D^+ \cap \Omega$

应用引理 1 和引理 2, 我们就可以得到

定理 1. 给定区间 $[0, 1]$ 上的一组基函数 $(b_0^n(t), b_1^n(t), \dots, b_n^n(t))$, 若其满足“性质 GDD”且对应的参数序列为 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq 1$, 那么相应的初始曲线具有 PIA 或带权 PIA 性质.

下面就具体的非标准全正基, 举例说明其在合适的参数下, 同样具有带权或不带权的 PIA 性质.

例 1. 4 次 Wang-Ball 基函数如下定义^[14]:

$$(W_0^4(t), W_1^4(t), \dots, W_4^4(t)) = ((1-t)^2, 2(1-t)^3t, 4(1-t)^2t^2, 2(1-t)t^3, t^2)$$

其在均匀参数 $\{t_i = i/4\}_{i=0}^4$ 处的配置矩阵为

$$W = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{72}{128} & \frac{27}{128} & \frac{18}{128} & \frac{3}{128} & \frac{8}{128} \\ \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{8}{128} & \frac{3}{128} & \frac{18}{128} & \frac{27}{128} & \frac{72}{128} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

容易看出, W 的子式 $\begin{pmatrix} \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{8}{128} & \frac{3}{128} \end{pmatrix}$ 的行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{8}{128} & \frac{3}{128} \end{vmatrix} = -1/512 < 0, \text{ 因此, } W \text{ 并非全正矩阵; 另一方面, 存在 } X = \text{diag}\{0.01, 1, 1.1, 1, 0.01\} > 0, \text{ 使得 } WX \text{ 为严格对角占优矩阵, 因而 4 次 Wang-Ball 基函数在均匀参数下具有带权或不带权的 PIA 性质. 实际上, } W \text{ 的所有特征值为 } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0.4299, \lambda_4 = 0.1875, \lambda_5 = 0.0545.$$

考虑曲线 $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$, 从该参数曲线上采样 5 个点 $\{P_i\}_{i=0}^4$, 其中, $P_i = (x(s_i), y(s_i))$, $s_i = i \times \frac{\pi}{4}, i = 0, 1, \dots, 4$, 则与此相应的 4 次 Wang-Ball 初始曲线被定义为 $W^0(t) = \sum_{i=0}^4 P_i W_i^4(t), t \in [0, 1]$, 图 3 表示在均匀参数下, 按不同迭代次数的 PIA 效果. 表 1 给出了不同迭代次数下的误差分析. 其中, 各次迭代的误差估计式取为 $\text{error} = \max_{0 \leq i \leq 4} \|P_i - W^k(t_i)\|$.

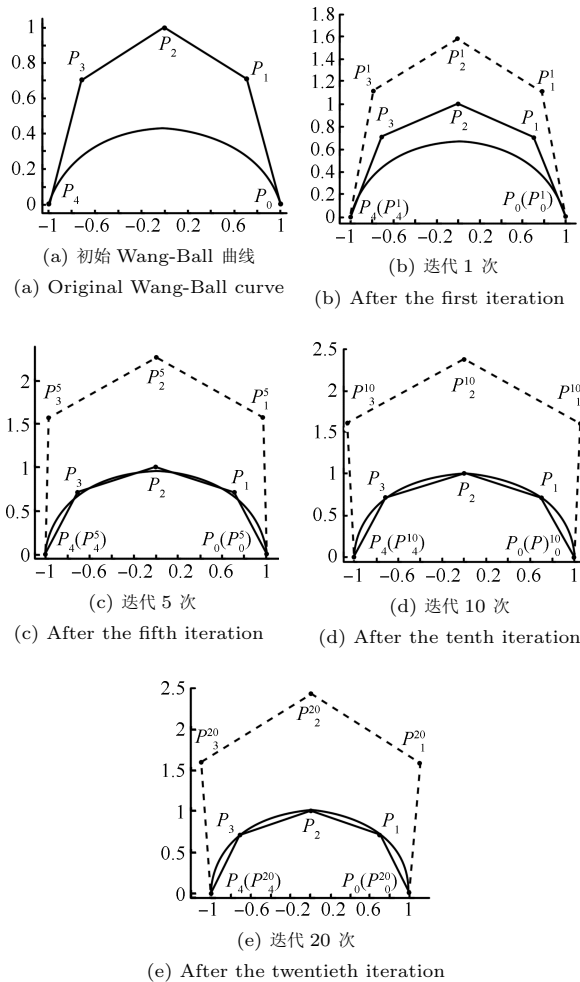


图 3 不同迭代次数下的逼近效果

Fig. 3 The approximation results after different numbers of iterations

表 1 不同迭代次数下 Wang-Ball 曲线的 PIA 误差

Table 1 The PIA errors of Wang-Ball curve after different number of iterations

迭代次数	0 次	1 次	5 次	10 次	20 次
误差	5.732E-001	3.297E-001	3.992E-002	9.603E-003	2.521E-003

3 推广的带权 PIA 性质

文献 [9] 提出了一种带权的 PIA 性质, 其主要的思想是在每次的迭代过程中定义新的控制顶点为 $P_i^{k+1} = P_i^k + \omega \Delta_i^k$ ($i = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots$), 其中, ω 为公共的权因子, 调节向量 $\Delta_i^k = P_i - \sum_{j=0}^n P_j^k B_j(t_i)$. 引入权因子 ω 的主要目的是加快 PIA 收敛速度.

在上述方法中, 每一个控制顶点对应的权因子都是相同的. 下面将这一模型进行推广, 针对不同的控制顶点引入不同的权因子. 较之以前的方法, 由于可以灵活地调节每个控制顶点的权因子, 因而对不同型值点有不同的 PIA 效果, 从而可以获得更大的自由度. 具体来说, 在构造曲线序列 $\{C^k(t)\}_{k=0}^\infty$ 过程中, 令经过 $k+1$ 次迭代后的控制顶点为 $P_i^{k+1} = P_i^k + \omega_i \Delta_i^k$ ($i = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots$), 这里 $\{\omega_i\}_{i=0}^n$ 为权因子, 若有 $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k(t_i) = P_i^0$, 则称初始曲线 $C^0(t)$ 具有广义的带权 PIA 性质. 记 $\omega = \text{diag}\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n\}$, 下面分析权因子 $\{\omega_i\}_{i=0}^n$ 需要满足哪些条件, 才能使初始曲线具有广义的带权 PIA 性质.

定义 4^[13]. 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, A^* 表示 A 的转置矩阵, 乘积矩阵 A^*A 的 n 个特征值的非负平方根称为 A 的奇异值, 记为 $\sigma_i(A)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

引理 3^[15]. 设 A, B 为两个任意 n 阶方阵, 记 $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A)$ 和 $\sigma_1(B) \geq \dots \geq \sigma_n(B)$ 分别为 A, B 的奇异值, 则对于乘积矩阵 AB 的任一特征值 $\lambda(AB)$ 有 $\sigma_n(A)\sigma_n(B) \leq |\lambda(AB)| \leq \sigma_1(A)\sigma_1(B)$.

定理 2. 设标准全正基函数 $(B_0(t), B_1(t), \dots, B_n(t))$ 在参数点 $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ 处的配置矩阵为 B , 记 $\sigma_0(B) \geq \sigma_1(B) \geq \dots \geq \sigma_n(B)$ 为 B 的特征值, 如果 $n+1$ 个权因子 $\{\omega_i\}_{i=0}^n$ 满足 $0 < \omega_i < \frac{1}{\sigma_0(B)}$ ($0 \leq i \leq n$), 则初始曲线具有广义的带权 PIA 性质.

证明. 由于配置矩阵 B 是全正矩阵, 而 $\omega_i > 0$ ($0 \leq i \leq n$), 则 ωB 同样也是全正矩阵, 因此, ωB 的每一个特征值满足 $\lambda_i(\omega B) > 0$ ($0 \leq i \leq n$). 另一方面, 根据引理 3, 有 $|\lambda_i(\omega B)| \leq \sigma_0(\omega)\sigma_0(B) = \max_{0 \leq i \leq n} \omega_i \sigma_0(B) \leq 1$ ($0 \leq i \leq n$). 综上可得 $0 \leq \lambda_i(I - \omega B) < 1$ ($0 \leq i \leq n$), 从而谱半径 $\rho(I - \omega B) < 1$, 故定理结论成立. $\square$

下面给出具体实例来说明这一算法的有效性.

例 2. 考虑 Geronno 双扭线 $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, 从该参数曲线上采样 11 个点 $\{P_i\}_{i=0}^{10}$, 其中, $P_i = (x(s_i), y(s_i))$, $s_i = -\pi/2 + i\pi/5$, ($i = 0, 1, \dots, 10$). 则与此相应的 10 次 Bézier 初始曲线可写为 $B^0(t) = \sum_{i=0}^{10} P_i B_i(t)$, $t \in [0, 1]$, 其中, $B_i(t) = \binom{10}{i} (1-t)^{10-i} t^i$ 是 10 次 Bernstein 基, 令其在均匀参数 $\{t_i = i/10\}_{i=0}^{10}$ 处的配置矩阵为 B . 利用 Matlab 程序计算, 可得 B 的最大奇异值为 $\sigma_0(B) = 1.101$, 因此, 只要权因子满足 $0 \leq \omega_i \leq 0.908$ ($0 \leq i \leq 10$), 初始曲线 $B^0(t)$ 便具有广义带权 PIA 性质. 本例中, 分别取 $\omega_i = 0.3 + 0.01i$ 以及 $\omega_i = 0.78 + 0.01i$ ($0 \leq i \leq 10$). 图 4(a) 是以 $\{P_i\}_{i=0}^{10}$ 为控制顶点的初始 Bézier 曲线, 图 4(b)~4(g) 表示在取不同权因子时, 分别迭代 10, 30, 50 次的广义带权 PIA 效果对比, 从图 4 中可看出, 图 4(c), 4(e), 4(g) 中每型值点附近的逼近收敛速度比图 4(b), 4(d), 4(f) 中更快. 另外, 表 1 和 2 给出了取不同权因子时, 在不同迭代次数下, 逼近曲线偏离各型值点的误差分析. 其中各次迭代过程中, 偏离各型值点的误差估计式取为 $\text{error}(P_i) = \|P_i - P^k(t_i)\|$ ($0 \leq i \leq 10$).

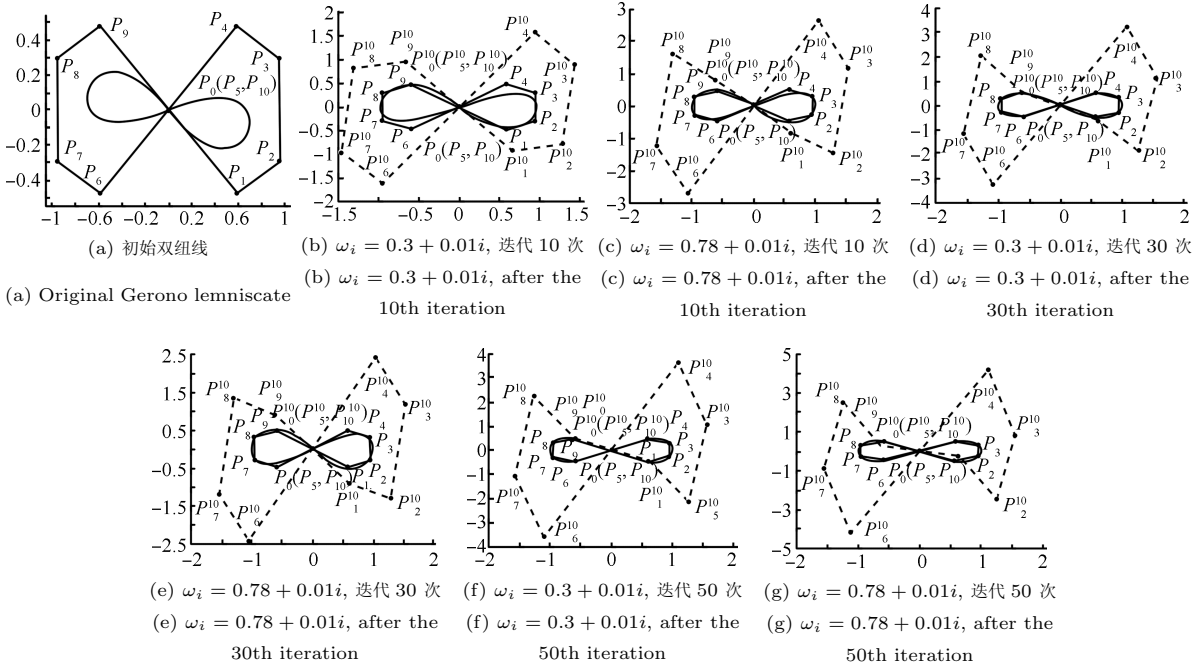


图 4 不同权因子的迭代效果
Fig. 4 The approximation results with different weights

表 2 取 $\omega_i = 0.3 + 0.01i$ 时, 不同迭代次数下, 10 次 Bézier 曲线偏离各型值点的逼近误差
Table 2 $\omega_i = 0.3 + 0.01i$, the approximation errors of the Bézier curve of degree 10 after different numbers of iterations

迭代次数	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
10 次	5.301E-002	1.290E-001	1.177E-001	2.401E-001	6.701E-003	2.279E-001	1.108E-001	1.170E-002	3.381E-002
30 次	3.461E-002	8.162E-002	6.203E-003	1.040E-001	1.813E-003	1.007E-001	5.501E-003	7.602E-002	3.436E-002
50 次	3.003E-002	5.121E-002	9.312E-003	6.632E-002	1.422E-003	6.401E-002	7.506E-003	4.493E-002	2.501E-002

表 3 取 $\omega_i = 0.78 + 0.01i$ 时, 不同迭代次数下, 10 次 Bézier 曲线偏离各型值点的逼近误差
Table 3 $\omega_i = 0.78 + 0.01i$, the approximation errors of the Bézier curve of degree 10 after different numbers of iterations

迭代次数	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
10 次	3.171E-002	9.522E-002	1.912E-002	1.279E-001	1.002E-003	1.259E-001	1.810E-002	9.291E-002	3.352E-002
30 次	1.862E-002	2.934E-002	1.163E-002	4.650E-002	5.013E-004	4.561E-002	1.103E-002	2.671E-002	1.642E-002
50 次	5.011E-003	5.123E-003	1.321E-002	2.415E-002	0.001E-000	2.372E-002	1.332E-002	3.626E-003	4.009E-003

4 结论

利用标准全正基的 PIA 性质来进行曲线或者曲面的插值, 近来得到了较多的研究. 由于这种方法具有很好的稳定性、直观性和收敛性, 因而, 在实际问题中有较广阔的应用前景. 为了对这一模型的适用范围进行适度的扩展, 本文研究了一般的混合基, 证明后者在一定的条件下同样具有 PIA 或带权 PIA 性质, 从而在实际应用中把 PIA 的适用范围从标准全正基推广到某些非标准全正基. 此外, 我们还提出了一种推广的带权 PIA 性质, 对不同的控制顶点赋以不同的权因子, 使之在加快收敛速度的程度上对不同的型值点具有不同的倾向性.

References

1 Qi D, Tian Z, Zhang Y, Feng J. The method of numeric polish in curve fitting. *Acta Mathematica Sinica*, 1975, **18**(3):

173–184

2 Boor C D. How does Agee’s smoothing method work? [Online], available: <ftp://ftp.cs.wisc.edu/Approx/agee.pdf>, July 24, 2011

3 Lin H W, Wang G J, Dong C S. Constructing iterative non-uniform B-spline curve and surface to fit data points. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2004, **47**(3): 315–331

4 Lin H W, Bao H J, Wang G J. Totally positive bases and progressive iteration approximation. *Computers and Mathematics with Applications*, 2005, **50**(3–4): 575–586

5 Delgado J, Peoa J M. Progressive iterative approximation and bases with the fastest convergence rates. *Computer Aided Geometric Design*, 2007, **24**(1): 10–18

6 Delgado J, Peoa J M. On the generalized Ball bases. *Advances in Computational Mathematics*, 2006, **24**(1–4): 263–280

- 7 Ando T. Totally positive matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 1987, **90**: 165–219
- 8 Karlin S. *Total Positivity*. Stanford: Stanford University Press, 1968
- 9 Lu L Z. Weighted progressive iteration approximation and convergence analysis. *Computer Aided Geometric Design*, 2010, **27**(2): 129–137
- 10 Lin H W. Local progressive-iterative approximation format for blending curves and patches. *Computer Aided Geometric Design*, 2010, **27**(4): 322–339
- 11 Delgado J, Peoa J M. A comparison of different progressive iteration approximation methods. *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, 2010, **5862**: 136–152
- 12 Lin H W. The convergence of the geometric interpolation algorithm. *Computer-Aided Design*, 2010, **42**(6): 505–508
- 13 Horn R A, Johnson C R. *Matrix Analysis*. Beijing: China Machine Press, 2005
- 14 Wang Guo-Jin, Wang Guo-Zhao, Zheng Jian-Min. *Computer Aided Geometric Design*. Beijing: Higher Education Press, 2001
(王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计. 北京: 高等教育出版社, 2001)
- 15 Wang Song-Gui, Jia Zhong-Zhen. *Inequalities in Matrix Theory*. Hefei: Anhui Education Press, 1994
(王松桂, 贾忠贞. 矩阵论中不等式. 合肥: 安徽教育出版社, 1994)

陈 杰 浙江大学数学系博士研究生. 主要研究方向为计算机辅助几何设计. E-mail: jiechenalpha@yahoo.com.cn

(CHEN Jie Ph.D. candidate in the Department of Mathematics, Zhejiang University. His main research interest is computer aided geometric design.)

王国瑾 浙江大学数学系教授. 主要研究方向为计算机辅助几何设计和应用逼近论. 本文通信作者. E-mail: wanggj@zju.edu.cn

(WANG Guo-Jin Professor in the Department of Mathematics, Zhejiang University. His research interest covers computer aided geometric design and applied approximation. Corresponding author of this paper.)

金聪健 浙江大学数学系硕士研究生. 主要研究方向为计算机辅助几何设计. E-mail: congjianjin@gmail.com

(JIN Cong-Jian Master student in the Department of Mathematics, Zhejiang University. His main research interest is computer aided geometric design.)