

基于极大后验估计和指数加权的自适应 UKF 滤波算法

赵琳¹ 王小旭¹ 孙明¹ 丁继成¹ 闫超¹

摘要 针对传统 Unscented 卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF) 在噪声先验统计未知时变情况下非线性滤波精度下降甚至发散的问题, 设计了一种带噪声统计估计器的自适应 UKF 滤波算法. 首先根据极大后验 (Maximum a posterior, MAP) 估计原理, 推导出一种次优无偏 MAP 常值噪声统计估计器; 接着在此基础上, 采用指数加权的方法, 给出了时变噪声统计估计器的递推公式; 最后对自适应 UKF 算法进行了性能分析. 相比于传统 UKF, 该自适应 UKF 算法在噪声统计未知时变情况下不仅滤波依然收敛, 滤波精度及稳定性显著提高, 而且其具有应对噪声变化的自适应能力. 仿真实例验证了其有效性.

关键词 非线性, 自适应 UKF 滤波算法, 常值噪声统计估计器, 时变噪声统计估计器, 极大后验估计, 指数加权

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.01007

Adaptive UKF Filtering Algorithm Based on Maximum a Posterior Estimation and Exponential Weighting

ZHAO Lin¹ WANG Xiao-Xu¹ SUN Ming¹ DING Ji-Cheng¹ YAN Chao¹

Abstract An adaptive unscented Kalman filtering (UKF) algorithm with noise statistic estimator is designed to solve the problem that the conventional UKF declines in accuracy and further diverges when the prior noise statistic is unknown and time-varying. Firstly, a constant noise statistic estimator which is suboptimal and unbiased is deduced based on maximum a posterior (MAP) estimation. Then, the recursive equations of time-varying noise statistic estimator are given through exponential weighting of the constant noise statistic estimator. Finally, performance analysis of the adaptive UKF algorithm is done. Under the condition of unknown and time-varying noise statistic, the proposed adaptive UKF algorithm still converges, moreover its filtering precision and stability are better than those of the conventional UKF. And an adaptive capability to deal with variable noise statistic is performed by the presented UKF. The simulation examples show its effectiveness.

Key words Nonlinear, adaptive unscented Kalman filtering (UKF) algorithm, constant noise statistic estimator, time-varying noise statistic estimator, maximum a posterior (MAP) estimation, exponential weighting

Unscented 卡尔曼滤波 (Unscented Kalman filter, UKF) 是一种新兴的非线性滤波方法^[1-2], 其核心思想是采用 Unscented 变换 (Unscented transformation, UT) 对非线性系统状态的后验概率密度函数进行近似. 与扩展卡尔曼滤波 (Extended Kalman filter, EKF) 相比, UKF 无需计算非线性状态函数和量测函数的雅可比矩阵, 且不论系统非线性程度如何, UT 变换理论上至少可以三阶泰勒精度逼近任何非线性高斯系统状态的后验均值和协方差, 具有实现简单、滤波精度高、收敛性好等优点, 因此 UKF 已得到了国内外学者的广泛关注^[3]. 然而, 与 EKF 类似, UKF 要求精确已知噪声的先验统计特性, 而在实际应用中, 要么受试验样本等各方面的限制, 噪声的先验统计未知或不准确, 要么虽精

确已知噪声的先验统计, 但系统处于实际运行环境当中, 受内外部不确定因素的影响, 噪声统计特性极易发生变化, 具有时变性强特点. 遗憾的是, UKF 不具有应对噪声统计变化的自适应能力, 其在噪声统计未知时变情况下易出现滤波精度下降甚至发散, 这正是传统 UKF 的局限性所在.

Cho 等^[4] 在 UKF 基础之上提出 SPRHKF (Sigma-point-based receding horizon Kalman FIR filter), 其对模型不确定性及瞬时干扰误差具有鲁棒性, 有效解决了 UKF 在未知时变噪声下滤波精度下降甚至发散的问题; 然而 SPRHKF 相比于 UKF 收敛性不佳, 为此 Cho 等^[5] 又设计出一种自适应 IIR/FIR 融合滤波算法, 其利用交互式多模型 (Interacting multiple models, IMM)^[6] 将 UKF 及 SPRHKF 两种滤波器有机结合起来, 形成优势互补, 克服两种滤波器单独工作时的缺点, 但这种算法计算量较大, 实时性较差; 文献 [7] 通过最小化 UKF 残差协方差之和的方法, 来求取噪声的统计特性; 文献 [8] 利用人工神经网络来辅助 UKF, 从而使 UKF 具有应对噪声变化的鲁棒性. 上述各种算法虽然在

收稿日期 2009-05-31 录用日期 2009-10-30
Manuscript received May 31, 2009; accepted October 30, 2009
国家自然科学基金 (60974104) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60974104)

1. 哈尔滨工程大学自动化学院 哈尔滨 150001
1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001

不同程度上提高了 UKF 应对噪声变化的自适应能力,但这些方法也存在明显的不足:1) 计算复杂,难以工程实现^[5,7-8];2) 虽能克服未知时变噪声所引起的 UKF 滤波发散,但收敛性较差,且又引进了其他的限制条件,如要求初始状态误差尽量小,这样就使问题更为复杂化^[4].

为此,针对传统 UKF 算法在噪声统计未知时变情况下,存在滤波精度下降甚至发散的问题,本文基于极大后验 (Maximum a posterior, MAP) 估计原理^[9] 和指数加权的衰减方法,提出一种带噪声统计估计器的自适应 UKF 滤波算法.该算法在进行滤波计算的同时,采用噪声统计估计器对未知时变的噪声统计进行实时估计和修正.相比于传统 UKF,该自适应 UKF 滤波算法不要求精确已知噪声的先验统计,且具有应对噪声变化的自适应能力;相比于现有算法^[4-8],噪声统计估计器递推公式简单,易于工程实现,且对常值噪声统计的估计是无偏的.类似于传统 UKF,给出了自适应 UKF 算法的稳定收敛条件.不同条件下的仿真分析结果验证了所提出的自适应 UKF 算法的有效性和可行性.

1 问题阐述

考虑如下所示的非线性离散系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}_k$ 与 $\mathbf{z}_k$ 分别为系统 n 维状态向量和 l 维量测向量; $\mathbf{w}_k$ 和 $\mathbf{v}_k$ 分别为 n 维系统噪声和 l 维量测噪声; $f_k(\cdot)$ 和 $h_k(\cdot)$ 分别为系统非线性状态函数和量测函数.

假设 1. $\mathbf{w}_k$ 和 $\mathbf{v}_k$ 是互不相关的高斯白噪声,且具有如下常值统计特性:

$$\begin{cases} E(\mathbf{w}_k) = \mathbf{q}, \quad \text{cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j^T) = Q\delta_{kj} \\ E(\mathbf{v}_k) = \mathbf{r}, \quad \text{cov}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j^T) = R\delta_{kj} \\ \text{cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j^T) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, Q 是非负定对称阵, R 是正定对称阵; δ_{kj} 为 Kronecker- δ 函数.

假设 2. 初始状态 $\mathbf{x}_0$ 与 $\mathbf{w}_k$ 、 $\mathbf{v}_k$ 互不相关,且服从高斯正态分布,其均值和协方差阵为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = E(\mathbf{x}_0) \\ P_0 = \text{cov}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^T) = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] \end{cases} \quad (3)$$

问题是在系统噪声和量测噪声统计特性未知或时变情况下,基于量测值 $Z_k = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k\}$, 求带噪声统计估计器的自适应 UKF 滤波算法.

2 UT 变换及传统 UKF

2.1 UT 变换

设 n 维随机向量 $\mathbf{x} \sim N(\bar{\mathbf{x}}, P_x)$, m 维随机向量 $\mathbf{z}$ 为 $\mathbf{x}$ 的某一非线性函数:

$$\mathbf{z} = f(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$\mathbf{x}$ 的统计特性为 $(\bar{\mathbf{x}}, P_x)$, 其通过非线性函数 $f(\cdot)$ 进行传播得到 $\mathbf{z}$ 的统计特性 $(\bar{\mathbf{z}}, P_z)$. UT 变换就是根据 $(\bar{\mathbf{x}}, P_x)$, 设计一系列的点 $\xi_i, i = 0, 1, \dots, L$, 称其为 Sigma 点; 对设定的 Sigma 点计算其经过 $f(\cdot)$ 传播所得的结果 $\gamma_i, i = 0, 1, \dots, L$; 然后基于 $\gamma_i, i = 0, 1, \dots, L$ 计算 $(\bar{\mathbf{z}}, P_z)$.

在 UT 变换算法中,最重要的是确定 Sigma 点的采样策略,也就是确定使用 Sigma 点的个数、位置以及相应的权值.目前已有的 Sigma 采样策略^[3] 有对称采样、单形采样、3 阶矩偏度采样以及高斯分布 4 阶矩对称采样等.其后,为了保证输出变量 $\mathbf{z}$ 协方差的半正定性,提出了对上述基本采样策略进行比例修正的算法框架.

UT 变换实现过程描述如下:

步骤 1. 根据所选择的采样策略,利用 $\mathbf{x}$ 的统计特性 $(\bar{\mathbf{x}}, P_x)$ 来计算 Sigma 采样点及其权系数.设对应于 $\xi_i, i = 0, 1, \dots, L$ 的权值为 W_i^m 和 W_i^c , 它们分别为求一阶和二阶统计特性时的权系数.

步骤 2. 计算 Sigma 点通过非线性函数 $f(\cdot)$ 的传播结果:

$$\gamma_i = f(\xi_i), \quad i = 0, 1, \dots, L \quad (5)$$

从而得到随机向量 $\mathbf{x}$ 经非线性函数 $f(\cdot)$ 传递之后的后验均值 $\bar{\mathbf{z}}$ 、协方差 P_z 及互协方差 P_{xz} :

$$\bar{\mathbf{z}} = \sum_{i=0}^L W_i^m \gamma_i \quad (6)$$

$$P_z = \sum_{i=0}^L W_i^c (\gamma_i - \bar{\mathbf{z}})(\gamma_i - \bar{\mathbf{z}})^T \quad (7)$$

$$P_{xz} = \sum_{i=0}^L W_i^c (\xi_i - \bar{\mathbf{x}})(\gamma_i - \bar{\mathbf{z}})^T \quad (8)$$

上述 UT 变换中,应用不同的采样策略区别仅在于步骤 1 和后续计算的 Sigma 点个数 L .

2.2 噪声均值非零时 UKF 算法实现

传统 UKF 在滤波过程中,需要假定系统噪声 $\mathbf{w}_k$ 和量测噪声 $\mathbf{v}_k$ 的均值为零^[1],如果这一条件不满足,UKF 滤波公式应作相应的修改.

令 $\mu_k = \mathbf{w}_k - \mathbf{q}$, $\eta_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{r}$, 代入非线性系统 (1), 得到:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}_k \end{cases} \quad (9)$$

显然, 式中 $\boldsymbol{\mu}_k$ 和 $\boldsymbol{\eta}_k$ 是互不相关的, 且都是均值为零、方差分别为 Q 及 R 的高斯白噪声。

在传统线性 KF 算法基础之上, 对于一步状态预测及输出预测, 应用 UT 变换来处理状态均值和协方差的非线性传递, 即可得到传统 UKF。基于非线性系统 (9) 的 UKF 具体算法流程如下:

步骤 1. 选择 UT 变换 Sigma 点采样策略。

步骤 2. 预测方程。

按照步骤 1 所选择的 Sigma 采样策略, 由 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 和 P_{k-1} 来计算 Sigma 点 $\boldsymbol{\xi}_{i,k-1}$, $i = 0, 1, \dots, L$, 其通过非线性状态函数 $f_{k-1}(\cdot) + \mathbf{q}$ 传播为 $\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1}$, 由 $\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1}$ 可得一步状态预测 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ 及误差协方差阵 $P_{k/k-1}$:

$$\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} = f_{k-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,k-1}) + \mathbf{q}, \quad i = 0, 1, \dots, L \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^L W_i^m \boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} = \\ &= \sum_{i=0}^L W_i^m f_{k-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,k-1}) + \mathbf{q} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_{k/k-1} &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})^T] = \\ &= E[\tilde{\mathbf{x}}_{k/k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k/k-1}^T] = \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \times \\ &\quad (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})^T + Q \end{aligned} \quad (12)$$

接着, 利用 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ 和 $P_{k/k-1}$ 按照步骤 1 所选择的采样策略来计算 Sigma 点 $\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1}$, $i = 0, 1, \dots, L$, 其通过非线性量测函数 $h_k(\cdot) + \mathbf{r}$ 传播为 $\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1}$, 由 $\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1}$ 可得到输出预测 $\hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}$ 及自协方差阵 $P_{\mathbf{z}_k}$ 和互协方差阵 $P_{\mathbf{x}_k \mathbf{z}_k}$:

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} = h_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1}) + \mathbf{r}, \quad i = 0, 1, \dots, L \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^L W_i^m \boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} = \\ &= \sum_{i=0}^L W_i^m h_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1}) + \mathbf{r} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{z}_k} &= E[(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T] = \\ &= E[\tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1} \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1}^T] = \\ &= \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}) \times \\ &\quad (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T + R \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{x}_k \mathbf{z}_k} &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T] = \\ &= E[\tilde{\mathbf{x}}_{k/k-1} \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1}^T] = \\ &= \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \times \\ &\quad (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T \end{aligned} \quad (16)$$

步骤 3. 在获得新的量测 $\mathbf{z}_k$ 后, 进行滤波更新:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + K_k \boldsymbol{\epsilon}_k \\ \boldsymbol{\epsilon}_k = \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1} = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} \\ K_k = P_{\mathbf{x}_k \mathbf{z}_k} (P_{\mathbf{z}_k})^{-1} \\ P_k = P_{k/k-1} - K_k P_{\mathbf{z}_k} (K_k)^T \end{cases} \quad (17)$$

式中, K_k 是滤波增益矩阵。

3 常值噪声统计估计器

定理 1. 基于极大后验估计原理^[9] 和量测值 $\mathbf{Z}_k$, 在假设 1 和假设 2 的情况下, 次优 MAP 常值噪声统计估计器计算式如下:

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{\mathbf{x}}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,j-1})] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{ [\hat{\mathbf{x}}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,j-1}) - \mathbf{q}] \times \\ &\quad [\hat{\mathbf{x}}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,j-1}) - \mathbf{q}]^T \} = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{ [\hat{\mathbf{x}}_j - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}] [\hat{\mathbf{x}}_j - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}]^T \} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\mathbf{z}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m h_k(\boldsymbol{\xi}_{i,j/j-1})] \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{ [\mathbf{z}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m h_j(\boldsymbol{\xi}_{i,j/j-1}) - \mathbf{r}] \times \\ &\quad [\mathbf{z}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m h_j(\boldsymbol{\xi}_{i,j/j-1}) - \mathbf{r}]^T \} = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{ [\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}] [\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}]^T \} \end{aligned} \quad (21)$$

证明. 当 $\mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R$ 未知时, 其连同状态 $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k$ 的 MAP 估计值 $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{R}}$ 及 $\hat{\mathbf{x}}_{j/k}$, $j = 0, 1, \dots, k$, 可用极大化如下条件密度求得:

$$J^* = p[X_k, \mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R | Z_k] \quad (22)$$

其中, $X_k = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$, $Z_k = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k\}$. 根据条件概率性质可知

$$J^* = \frac{p[X_k, \mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R, Z_k]}{p[Z_k]} \quad (23)$$

而 $p[Z_k]$ 与最优化无关, 故问题转化为求如下无条件密度的极大值:

$$J = p[X_k, \mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R, Z_k] = p[Z_k | X_k, \mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R] \times p[X_k | \mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R] p[\mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R] \quad (24)$$

其中, $p[\mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R]$ 与先验信息有关, 可以看作常值.

由假设 1 和假设 2 可知, 非线性系统 (9) 中 μ_k 和 η_k 是互不相关的零均值高斯正态分布, 则根据条件概率的乘法定理易知:

$$p[X_k | \mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R] = p[\mathbf{x}_0] \prod_{j=1}^k p[\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{q}, Q] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |P_0|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\|_{P_0^{-1}}^2 \right\} \times \prod_{j=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |Q|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_j - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}\|_{Q^{-1}}^2 \right\} = C_1 |P_0|^{-\frac{1}{2}} |Q|^{-\frac{k}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{j=1}^k \|\mathbf{x}_j - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}\|_{Q^{-1}}^2] \right\} \quad (25)$$

其中, n 表示系统状态维数, $C_1 = 1/(2\pi)^{n(k+1)/2}$ 为一常数, $|A|$ 为 A 的行列式, $\|\mathbf{u}\|_A^2 = \mathbf{u}^T A \mathbf{u}$ 为二次型.

已知量测值 $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k$, 且可以认为它们相互独立, 类似地, 有如下计算式:

$$p[Z_k | X_k, \mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R] = \prod_{j=1}^k p[\mathbf{z}_j | \mathbf{x}_j, \mathbf{r}, R] = \prod_{j=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{\frac{l}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}\|_{R^{-1}}^2 \right\} = C_2 |R|^{-\frac{k}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}\|_{R^{-1}}^2 \right\} \quad (26)$$

其中, l 表示量测维数, $C_2 = 1/(2\pi)^{lk/2}$ 为一常数.

将式 (25) 和式 (26) 带入式 (24) 可得:

$$J = C_1 C_2 |P_0|^{-\frac{1}{2}} |Q|^{-\frac{k}{2}} |R|^{-\frac{k}{2}} p[\mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{j=1}^k \|\mathbf{x}_j - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}\|_{Q^{-1}}^2 + \sum_{j=1}^k \|\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}\|_{R^{-1}}^2] \right\} = C |Q|^{-\frac{k}{2}} |R|^{-\frac{k}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^k \|\mathbf{x}_j - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}\|_{Q^{-1}}^2 + \sum_{j=1}^k \|\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}\|_{R^{-1}}^2 \right] \right\} \quad (27)$$

其中,

$$C = C_1 C_2 |P_0|^{-\frac{1}{2}} p[\mathbf{q}, Q, \mathbf{r}, R] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\|_{P_0^{-1}}^2 \right\} \quad (28)$$

而由式 (27) 可得:

$$\ln J = -\frac{k}{2} \ln |Q| - \frac{k}{2} \ln |R| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|\mathbf{x}_j - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) - \mathbf{q}\|_{Q^{-1}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \|\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) - \mathbf{r}\|_{R^{-1}}^2 + \ln C \quad (29)$$

注意到 J 和 $\ln J$ 具有相同的极值点. 同时假设 $\hat{\mathbf{x}}_{j-1/k}$ 及 $\hat{\mathbf{x}}_{j/k}$ 已知, 利用矩阵导数运算法则, 令:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln J}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1/k}, \mathbf{x}_j = \hat{\mathbf{x}}_{j/k} \\ \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}_k}} = 0 \\ \frac{\partial \ln J}{\partial Q} \Big|_{\substack{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1/k}, \mathbf{x}_j = \hat{\mathbf{x}}_{j/k} \\ Q = \hat{Q}_k}} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \ln J}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}_k} = 0, \quad \frac{\partial \ln J}{\partial R} \Big|_{R = \hat{R}_k} = 0 \quad (31)$$

则可得到最优 MAP 常值噪声统计估计器为

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{\mathbf{x}}_{j/k} - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1/k}}] \quad (32)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{ [\hat{\mathbf{x}}_{j/k} - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1/k}} - \mathbf{q}] \times [\hat{\mathbf{x}}_{j/k} - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) |_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1/k}} - \mathbf{q}]^T \} \quad (33)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j) |_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/k}}] \quad (34)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/k}} - \mathbf{r}] \times [\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/k}} - \mathbf{r}]^T\} \quad (35)$$

在式 (32)~(35) 中, 以滤波估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{j-1}$ 及 $\hat{\mathbf{x}}_j$ 或预报估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}$ 来近似代替计算复杂的平滑估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{j-1/k}$ 及 $\hat{\mathbf{x}}_{j/k}$, 即可得到次优 MAP 常值噪声统计估计器为

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{\mathbf{x}}_j - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1})|_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1}}] \quad (36)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\hat{\mathbf{x}}_j - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1})|_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1}} - \mathbf{q}] \times [\hat{\mathbf{x}}_j - f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1})|_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1}} - \mathbf{q}]^T\} \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}}] \quad (38)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}} - \mathbf{r}] \times [\mathbf{z}_j - h_j(\mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}} - \mathbf{r}]^T\} \quad (39)$$

其中, $f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1})|_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1}}$ 表示的含义是: 状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{j-1}$ 经非线性状态函数 $f_{j-1}(\cdot)$ 传递之后的后验均值. 对于线性 KF, $f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1})|_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1}}$ 可通过线性状态函数传递精确已知; 而对于非线性 UKF, $f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1})|_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1}}$ 只能通过 UT 变换以三阶泰勒精度近似已知, 其计算公式可借鉴式 (11) 得到

$$f_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1})|_{\mathbf{x}_{j-1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j-1}} = \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,j-1}) \quad (40)$$

其中, $\boldsymbol{\xi}_{i,j-1}$, $i = 0, 1, \dots, L$ 为由 $j-1$ 时刻状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{j-1}$ 和协方差 P_{j-1} 所构造的 Sigma 采样点.

同理, $h_j(\mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}}$ 表示的含义是: 一步状态预测 $\hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}$ 经非线性量测函数 $h_j(\cdot)$ 传递之后的后验均值. 对于线性 KF, $h_j(\mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}}$ 可通过线性量测函数传递精确已知; 而对于非线性 UKF, $h_j(\mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}}$ 只能通过 UT 变换以三阶泰勒精度近似已知, 其计算公式可借鉴式 (14) 得到

$$h_j(\mathbf{x}_j)|_{\mathbf{x}_j \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}} = \sum_{i=0}^L W_i^m h_j(\boldsymbol{\xi}_{i,j/j-1}) \quad (41)$$

其中, $\boldsymbol{\xi}_{i,j/j-1}$, $i = 0, 1, \dots, L$ 为由 j 时刻一步状态预测 $\hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}$ 和协方差 $P_{j/j-1}$ 所构造的 Sigma 采样点.

将式 (40) 和式 (41) 带入到式 (36)~(39), 联合一步状态预测表达式 (11) 及输出预测表达式 (14), 即可得到式 (18)~(21). $\square$

定理 2. 基于定理 1, 可得如下所示的次优无偏 MAP 常值噪声统计估计器:

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{\mathbf{q}}_{k-1} + \hat{\mathbf{x}}_k - \sum_{i=0}^L W_i^m f_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k-1})] \quad (42)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{Q}_{k-1} + K_k \boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T K_k^T + P_k - \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})(\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})^T] \quad (43)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{\mathbf{r}}_{k-1} + \mathbf{z}_k - \sum_{i=0}^L W_i^m h_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1})] \quad (44)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{R}_{k-1} + \boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T - \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})(\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T] \quad (45)$$

证明. 下面讨论式 (18)~(21) 所示的次优 MAP 常值噪声统计估计器的无偏性. 早已证明, 当精确已知高斯系统 (无论线性或非线性) 状态后验均值和协方差时, 滤波输出残差序列是零均值高斯白噪声序列^[10]. 在本文中, 对于服从高斯分布的非线性系统模型 (9), UT 变换能以至少三阶泰勒精度逼近系统状态的后验均值和协方差, 故可以认为, UKF 的输出残差序列近似为零均值高斯白噪声序列, 即有 $E[\boldsymbol{\epsilon}_j] \approx 0$.

根据式 (11) 和式 (17), 从式 (18) 出发:

$$\begin{aligned} E[\hat{\mathbf{q}}_k] &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\hat{\mathbf{x}}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,j-1})] = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\hat{\mathbf{x}}_j - (\hat{\mathbf{x}}_{j/j-1} - \mathbf{q})] = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[K_j \boldsymbol{\epsilon}_j + \mathbf{q}] = \mathbf{q} \end{aligned} \quad (46)$$

同理, 根据式 (14) 和式 (17), 从式 (20) 出发:

$$E[\hat{\mathbf{r}}_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E[\mathbf{z}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m h_j(\boldsymbol{\xi}_{i,j/j-1})] =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}[\mathbf{z}_j - (\hat{\mathbf{z}}_{j/j-1} - \mathbf{r})] &= \\ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_j + \mathbf{r}] &= \mathbf{r} \end{aligned} \quad (47)$$

故关于噪声均值 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{r}$ 的次优 MAP 常值噪声统计估计器 $\hat{\mathbf{q}}_k$ 和 $\hat{\mathbf{r}}_k$ 都是无偏的, 显然由式 (18) 及式 (20) 可推导出式 (42) 及式 (44).

注意到

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}, \quad P_{\mathbf{z}_k} = \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T] \quad (48)$$

则由式 (21) 出发:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{R}_k] &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}\{[\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}][\mathbf{z}_j - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}]^T\} = \\ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^T] &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P_{\mathbf{z}_j} = \\ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}) (\boldsymbol{\chi}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1})^T + R \right] \end{aligned} \quad (49)$$

利用式 (49) 可得到量测噪声协方差矩阵 R 的次优无偏 MAP 常值噪声统计估计器:

$$\begin{aligned} \hat{R}_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^T - \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1}) \times \\ &(\boldsymbol{\chi}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{z}}_{j/j-1})^T] \end{aligned} \quad (50)$$

显然, 由式 (50) 可推导出式 (45).

同理, 注意到

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k/k} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = K_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ P_{k/k-1} - P_{k/k} = K_k P_{\mathbf{z}_k} K_k^T \end{cases} \quad (51)$$

则由式 (19) 出发:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{Q}_k] &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}\{[\hat{\mathbf{x}}_j - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}][\hat{\mathbf{x}}_j - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}]^T\} = \\ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k K_j \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^T] K_j^T &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k K_j P_{\mathbf{z}_j} K_j^T = \\ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (P_{j/j-1} - P_j) &= \\ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}) \times \right. \\ &\left. (\boldsymbol{\gamma}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1})^T - P_j + Q \right] \end{aligned} \quad (52)$$

利用式 (52) 可得到系统噪声协方差矩阵 Q 的次优无偏 MAP 常值噪声统计估计器:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [K_j \boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^T K_j^T + P_j - \\ &\sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1}) (\boldsymbol{\gamma}_{i,j/j-1} - \hat{\mathbf{x}}_{j/j-1})^T] \end{aligned} \quad (53)$$

显然, 由式 (53) 可推导出式 (43). $\square$

相应地, 基于式 (42) ~ (45) 的自适应 UKF 滤波算法可以描述为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^L W_i^m \boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} = \\ &\sum_{i=0}^L W_i^m f_{k-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,k-1}) + \hat{\mathbf{q}}_{k-1} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} P_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \times \\ &(\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})^T + \hat{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^L W_i^m \boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} = \\ &\sum_{i=0}^L W_i^m h_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k/k-1}) + \hat{\mathbf{r}}_k \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{z}_k} &= \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}) \times \\ &(\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T + \hat{R}_k \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} P_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} &= \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \times \\ &(\boldsymbol{\chi}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T \end{aligned} \quad (58)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}) \quad (59)$$

$$K_k = P_{\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} P_{\hat{\mathbf{z}}_k}^{-1} \quad (60)$$

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - K_k P_{\mathbf{z}_k} K_k^T \quad (61)$$

设初始条件为:

$$\hat{\mathbf{x}}_0, \quad P_0; \quad \hat{\mathbf{q}}_0, \quad \hat{Q}_0; \quad \hat{\mathbf{r}}_0, \quad \hat{R}_0 \quad (62)$$

从上式出发, 交替应用式 (42) ~ (45) 和式 (54) ~ (62), 可实现常值噪声统计估计和自适应 UKF 滤波算法.

4 时变噪声统计估计器

假设 3. $\mathbf{w}_k$ 和 $\mathbf{v}_k$ 是互不相关的高斯白噪声, 且

具有如下时变统计特性:

$$\begin{cases} E(\mathbf{w}_k) = \mathbf{q}_k, \quad \text{cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j^T) = Q_k \delta_{kj} \\ E(\mathbf{v}_k) = \mathbf{r}_k, \quad \text{cov}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j^T) = R_k \delta_{kj} \\ \text{cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j^T) = 0 \end{cases} \quad (63)$$

其中, Q_k 为非负定对称阵, R_k 为正定对称阵.

从统计观点来看, 次优无偏 MAP 常值噪声统计估计器 (42)~(45) 都是算术平均, 和式中的每项权重系数均为 $1/k$, 但对基于假设 3 的时变噪声统计而言, 应强调新近数据的作用, 对于过于陈旧的数据应逐渐遗忘, 对此可采用指数加权的衰减方法来实现. 从噪声统计变化快慢的角度出发, 下面将分别给出两种指数加权方法: 渐消记忆指数加权和限定记忆指数加权.

4.1 渐消记忆指数加权

当噪声统计变化较慢时, 可以采用渐消记忆指数加权, 即在和式中每项乘以不同的加权系数. 选取加权系数 $\{\beta_i\}$ 使之满足:

$$\beta_i = \beta_{i-1}b, \quad 0 < b < 1, \quad \sum_{i=1}^k \beta_i = 1 \quad (64)$$

于是

$$\begin{cases} \beta_i = d_k b^{i-1}, & i = 1, \dots, k \\ d_k = \frac{1-b}{1-b^k} \end{cases} \quad (65)$$

其中 b 为遗忘因子. 在和式 (42)~(45) 中每项乘以 β_{k+1-j} 代替原来的权重系数 $1/k$, 便得到了渐消记忆时变噪声统计估计器:

以 $\hat{\mathbf{q}}_k$ 为例, 令

$$\Lambda_j^q = \hat{\mathbf{x}}_j - \sum_{i=0}^L W_i^m f_{j-1}(\boldsymbol{\xi}_{i,j-1}) \quad (66)$$

则由式 (18) 可知, 时刻 k 渐消记忆时变噪声统计估计器 $\hat{\mathbf{q}}_k$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_k &= \sum_{j=1}^k \beta_{k+1-j} \Lambda_j^q = \\ &= \sum_{j=1}^k d_k b^{k-j} \Lambda_j^q = d_k \sum_{j=1}^k b^{k-j} \Lambda_j^q \end{aligned} \quad (67)$$

同理, 时刻 $k+1$ 渐消记忆时变噪声统计估计器 $\hat{\mathbf{q}}_{k+1}$ 可表示为

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = d_{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} b^{k+1-j} \Lambda_j^q =$$

$$\begin{aligned} & d_{k+1} \Lambda_{k+1}^q + d_{k+1} \sum_{j=1}^k b^{k+1-j} \Lambda_j^q = \\ & d_{k+1} \Lambda_{k+1}^q + \frac{d_{k+1}b}{d_k} \sum_{j=1}^k d_k b^{k-j} \Lambda_j^q = \\ & d_{k+1} \Lambda_{k+1}^q + (1-d_{k+1}) \sum_{j=1}^k d_k b^{k-j} \Lambda_j^q = \\ & (1-d_{k+1}) \hat{\mathbf{q}}_k + d_{k+1} \Lambda_{k+1}^q = \\ & (1-d_{k+1}) \hat{\mathbf{q}}_k + d_{k+1} [\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \sum_{i=0}^L W_i^m f_k(\boldsymbol{\xi}_{i,k})] \end{aligned} \quad (68)$$

借鉴上述 $\hat{\mathbf{q}}_{k+1}$ 的推导方法, 由式 (20)、(50) 及 (53) 容易得到渐消记忆时变噪声统计估计器 $\hat{\mathbf{Q}}_{k+1}$, $\hat{\mathbf{r}}_{k+1}$ 及 $\hat{\mathbf{R}}_{k+1}$ 的递推公式为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_{k+1} &= (1-d_{k+1}) \hat{\mathbf{Q}}_k + d_{k+1} [K_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^T \times \\ & K_{k+1}^T + P_{k+1} - \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\gamma}_{i,k+1/k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}) \times \\ & (\boldsymbol{\gamma}_{i,k+1/k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k})^T] \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{k+1} &= (1-d_{k+1}) \hat{\mathbf{r}}_k + \\ & d_{k+1} \left[\mathbf{z}_{k+1} - \sum_{i=0}^L W_i^m h_{k+1}(\boldsymbol{\xi}_{i,k+1/k}) \right] \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_{k+1} &= (1-d_{k+1}) \hat{\mathbf{R}}_k + d_{k+1} [\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^T - \\ & \sum_{i=0}^L W_i^c (\boldsymbol{\chi}_{i,k+1/k} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1/k}) (\boldsymbol{\chi}_{i,k+1/k} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1/k})^T] \end{aligned} \quad (71)$$

4.2 限定记忆指数加权

渐消记忆的特点是记忆了所有过去的历史数据, 但越陈旧的数据加权系数越小, 其在整个加权和中所起的作用也就越小.

当噪声统计变化较快时, 过于陈旧的数据对估计当前时刻的噪声统计帮助不大; 对一个快时变过程而言, 当前时刻噪声统计的真实值只与其近期历史数据有关. 对于快时变噪声统计, 可以采用限定指数加权方法, 即对当前时刻以前的固定长度历史数据实行指数加权.

考虑限定记忆长度为 m (m 为预先设定的自然数, 且 $0 < m \leq k$) 的指数加权, 选取加权系数 $\{\beta_i\}$ 使之满足:

$$\beta_i = \beta_{i-1}b, \quad 0 < b < 1, \quad \sum_{i=1}^m \beta_i = 1 \quad (72)$$

于是

$$\begin{cases} \beta_i = d_m b^{i-1}, & i = 1, \dots, m \\ d_m = \frac{1-b}{1-b^m} \end{cases} \quad (73)$$

其中 b 为遗忘因子. 将和式 (42) ~ (45) 中 $k-m$ 时刻以后每项乘以 β_{k+1-j} 代替原来的权系数 $1/k$, 便得到了限定记忆时变噪声统计估计器:

仍然以 $\hat{q}_k$ 为例, 根据式 (18) 可知, 限定记忆长度为 m 的 k 时刻时变噪声统计估计器 $\hat{q}_k$ 为

$$\hat{q}_k = \sum_{j=k-m+1}^k \beta_{k+1-j} \Lambda_j^q = \sum_{j=k-m+1}^k d_m b^{k-j} \Lambda_j^q \quad (74)$$

同理, $k+1$ 时刻限定记忆时变噪声统计估计器 $\hat{q}_{k+1}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \hat{q}_{k+1} &= \sum_{j=k-m+2}^{k+1} d_m b^{k+1-j} \Lambda_j^q = d_m \Lambda_{k+1}^q + \\ &\quad \sum_{j=k-m+2}^k d_m b^{k+1-j} \Lambda_j^q = d_m \Lambda_{k+1}^q + \\ &\quad b \sum_{j=k-m+2}^k d_m b^{k-j} \Lambda_j^q = d_m \Lambda_{k+1}^q + \\ &\quad b \left(\sum_{j=k-m+1}^k d_m b^{k-j} \Lambda_j^q - d_m b^{m-1} \Lambda_{k-m+1}^q \right) = \\ &\quad b \hat{q}_k + d_m \Lambda_{k+1}^q - d_m b^m \Lambda_{k-m+1}^q \end{aligned} \quad (75)$$

借鉴上述 $\hat{q}_{k+1}$ 的推导方法, 由式 (20)、(50) 及 (53) 容易得到限定记忆时变噪声统计估计器 $\hat{Q}_{k+1}$, $\hat{r}_{k+1}$ 及 $\hat{R}_{k+1}$ 的递推公式为

$$\hat{Q}_{k+1} = b \hat{Q}_k + d_m \Lambda_{k+1}^Q - d_m b^m \Lambda_{k-m+1}^Q \quad (76)$$

$$\hat{r}_{k+1} = b \hat{r}_k + d_m \Lambda_{k+1}^r - d_m b^m \Lambda_{k-m+1}^r \quad (77)$$

$$\hat{R}_{k+1} = b \hat{R}_k + d_m \Lambda_{k+1}^R - d_m b^m \Lambda_{k-m+1}^R \quad (78)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Lambda_j^Q &= K_j \epsilon_j \epsilon_j^T K_j^T + P_j - \\ &\quad \sum_{i=0}^L W_i^c (\gamma_{i,j/j-1} - \hat{x}_{j/j-1}) (\gamma_{i,j/j-1} - \hat{x}_{j/j-1})^T \end{aligned} \quad (79)$$

$$\Lambda_j^r = z_j - \sum_{i=0}^L W_i^m h_j(\xi_{i,j/j-1}) \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j^R &= \epsilon_j \epsilon_j^T - \sum_{i=0}^L W_i^c (\chi_{i,j/j-1} - \hat{z}_{j/j-1}) \times \\ &\quad (\chi_{i,j/j-1} - \hat{z}_{j/j-1})^T \end{aligned} \quad (81)$$

在实际应用中, 限定记忆窗口宽度 m 可根据具体情况灵活调整, 但此方法需存储历史数据 Λ_{k-m+1} .

限定记忆时变噪声统计估计器需从 $k = m+1$ 时刻开始递推计算, 且事先要求有初始值 $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$. 可以先用基于渐消记忆时变噪声统计估计器的自适应 UKF 滤波算法来计算 $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$, 然后从 $k = m+1$ 时刻开始切换为基于限定记忆时变噪声统计估计器的自适应 UKF 滤波算法.

注 1. 由先前分析可知, 当 $k \leq m$ 时, 限定记忆时变噪声统计估计器无法进行, 只能采用渐消记忆时变噪声统计估计器递推公式来对噪声统计进行估计, 从 $k = m+1$ 起, 直接取式 (68) ~ (71) 所计算出的 $k = m$ 时刻噪声统计估计值 $\hat{q}_m, \hat{Q}_m, \hat{r}_m, \hat{R}_m$ 作为限定记忆时变噪声统计估计器递推式 (75) ~ (78) 的初值, 且 $\hat{q}_m, \hat{Q}_m, \hat{r}_m, \hat{R}_m$ 不受噪声统计初值 $\hat{q}_0, \hat{Q}_0, \hat{r}_0, \hat{R}_0$ 的影响, 这是因为:

仍以 $\hat{q}_m$ 为例, 由式 (68) 可知

$$\hat{q}_1 = (1 - d_1) \hat{q}_0 + d_1 [\hat{x}_1 - \sum_{i=0}^L W_i^m f_0(\xi_{i,0})] \quad (82)$$

其中, $\xi_{i,0}$ 为由系统状态初值 $\hat{x}_0$ 和 $\hat{q}_0$ 所构造的 Sigma 采样点. 根据式 (65) 可求得 $1 - d_1 = 0$, 于是上式变为

$$\hat{q}_1 = d_1 \left[\hat{x}_1 - \sum_{i=0}^L W_i^m f_0(\xi_{i,0}) \right] \quad (83)$$

由此推断 $\hat{q}_m$ 是与 $\hat{q}_0$ 无关的, 其不受 $\hat{q}_0$ 取值的影响, 这符合限定记忆的基本思想. 同时也不难发现, $\hat{q}_m$ 受系统状态初值 $\hat{x}_0$ 和 P_0 的影响, 其要求 $\hat{x}_0$ 和 P_0 尽量准确.

类似地, 可以证明限定记忆时变噪声统计估计器的初值 $\hat{Q}_m, \hat{r}_m, \hat{R}_m$ 也不受噪声统计原始初值 $\hat{Q}_0, \hat{r}_0, \hat{R}_0$ 的影响.

5 自适应 UKF 算法性能分析

本节根据文献 [11-13] 所提出的 UKF 有界收敛定理, 来分析自适应 UKF 算法的收敛性和滤波精度. 假设噪声先验统计如式 (63) 所示, 且它们在滤波前精确已知, 首先将传统 UKF 中的自协方差阵分别写为

$$\begin{aligned} P_{k/k-1} &= \\ &\quad \sum_{i=0}^L W_i^c (\gamma_{i,k/k-1} - \hat{x}_{k/k-1}) (\gamma_{i,k/k-1} - \hat{x}_{k/k-1})^T + \\ Q_{k-1} &= A_k P_{k-1} A_k^T + \delta P_{k/k-1} + Q_{k-1} = \\ &\quad A_k P_{k-1} A_k^T + \Xi_k \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned}
P_{\hat{\mathbf{z}}_k} &= \sum_{i=0}^L W_i^c (\chi_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}) (\chi_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T + \\
R_k &= G_k P_{k/k-1} G_k^T + \delta P_{\hat{\mathbf{z}}_k} + R_k = \\
G_k P_{k/k-1} G_k^T &+ \Sigma_k
\end{aligned} \quad (85)$$

在上式中

$$\begin{aligned}
\delta P_{k/k-1} &= \sum_{i=0}^L W_i^c (\gamma_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \times \\
&(\gamma_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})^T - A_k P_{k-1} A_k^T \quad (86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta P_{\hat{\mathbf{z}}_k} &= \sum_{i=0}^L W_i^c (\chi_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}) \times \\
&(\chi_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1})^T - G_k P_{k/k-1} G_k^T \quad (87)
\end{aligned}$$

$$\Xi_k = \delta P_{k/k-1} + Q_{k-1} \quad (88)$$

$$\Sigma_k = \delta P_{\hat{\mathbf{z}}_k} + R_k \quad (89)$$

同时, 定义如下矩阵:

$$\begin{aligned}
A_k &= \beta_k F_k, \quad B_k = \alpha_k H_k, \quad C_k = I - K_k \alpha_k H_k \\
G_k &= \begin{cases} \alpha_k H_k \gamma_k^T, & n \geq l \\ \gamma_k^T \alpha_k H_k, & n < l \end{cases} \quad (90)
\end{aligned}$$

其中

$$F_k = \left. \frac{\partial f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_{k-1}} \right|_{\mathbf{x}_{k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \quad (91)$$

$$H_k = \left. \frac{\partial h_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}} \quad (92)$$

且 α_k , β_k 及 γ_k 为辅助对角阵, 它们所代表的具体含义参见文献 [13].

引理 1^[13]. 对于非线性系统 (1) 及传统 UKF, 如果有如下假设条件成立:

1) 对 $\forall k \geq 0$, 存在非零实数 $a_{\min}$, $a_{\max}$, $b_{\max}$, $c_{\max}$, $g_{\min}$ 及 $g_{\max}$, 使得下式成立:

$$\begin{aligned}
a_{\min}^2 I &\leq A_k A_k^T \leq a_{\max}^2 I, \quad B_k B_k^T \leq b_{\max}^2 I, \\
g_{\min}^2 I &\leq G_k G_k^T \leq g_{\max}^2 I, \quad C_k C_k^T \leq c_{\max}^2 I, \\
(G_k - B_k)(G_k - B_k)^T &\leq (g_{\max} - b_{\max})^2 I \quad (93)
\end{aligned}$$

2) 存在正实数 $p_{\min}$, $p_{\max}$, $q_{\max}$, $r_{\max}$, $\Xi_{\max}$, $\Xi_{\min}$ 及 $\Sigma_{\min}$, 使得下式成立:

$$\begin{aligned}
p_{\min} I &\leq P_k \leq p_{\max} I, \quad Q_k \leq q_{\max} I, \\
R_k &\leq r_{\max} I, \quad \Xi_k \leq \Xi_{\max} I \quad (94)
\end{aligned}$$

$$\Xi_k > \Xi_{\min} I, \quad \Sigma_k > \Sigma_{\min} I \quad (95)$$

其中

$$\begin{cases} \Sigma_{\min} = \max\{\Sigma_1, \Sigma_2\} \\ \Sigma_1 = a_{\max}^2 (g_{\max} - b_{\max})^2 \times \\ \quad (p_{\max} + p_{\max}^2 a_{\max}^2 \Xi_{\min}^{-1}) \\ \Sigma_2 = b_{\max}^2 (a_{\max}^2 p_{\max} + \Xi_{\max}) - \\ \quad g_{\max}^2 (a_{\min}^2 p_{\min} + \Xi_{\min}) \end{cases} \quad (96)$$

那么传统 UKF 状态估计误差将是均方有界的, 即传统 UKF 稳定收敛.

注 2. 假设传统 UKF 满足引理 1 中的条件 1 和条件 2, 即传统 UKF 在精确已知噪声先验统计 Q_{k-1} 和 R_k 情况下滤波稳定收敛. 也就是说, 此时传统 UKF 的估计误差协方差 P_k 将会趋于某一个极小值 P_{∞} . 然而当噪声先验统计未知时变时, 不准确的噪声协方差可能会使 Ξ_k 或 Σ_k 呈现出非正定性, 式 (95) 不成立从而造成传统 UKF 滤波发散; 即使 Ξ_k 或 Σ_k 正定且满足式 (95), 由于噪声先验统计未知时变, 使得噪声实际协方差偏离真实值 Q_{k-1} 和 R_k , 故根据文献 [11] 中 Cramér-Rao 不等式^[14-15]可知 P_k 将会愈加偏离极小值 P_{∞} , 从而造成状态估计误差增大, 这就是为什么传统 UKF 在噪声先验统计未知时变情况下滤波精度下降甚至发散的原因所在.

同理, 将自适应 UKF 算法中的自协方差阵分别写为

$$P_{k/k-1} = A_k P_{k-1} A_k^T + \Xi'_k \quad (97)$$

$$P_{\hat{\mathbf{z}}_k} = G_k P_{k/k-1} G_k^T + \Sigma'_k \quad (98)$$

其中,

$$\Xi'_k = \delta P_{k/k-1} + \hat{Q}_{k-1} \quad (99)$$

$$\Sigma'_k = \delta P_{\hat{\mathbf{z}}_k} + \hat{R}_k \quad (100)$$

注 3. 对于自适应 UKF 算法, 噪声先验统计虽然未知时变, 但随着噪声统计估计器 $\hat{Q}_{k-1}$ 和 $\hat{R}_k$ 对先验协方差真实值 Q_{k-1} 和 R_k 的有效跟踪, 最终使得 Ξ'_k 及 Σ'_k 满足式 (95), 从而保证了自适应 UKF 算法的收敛性; 且 $\hat{Q}_{k-1}$ 和 $\hat{R}_k$ 逐渐趋于 Q_k 和 R_k , 则自适应 UKF 算法估计协方差 P_k 也愈趋近于传统 UKF 协方差极小值 P_{∞} , 其在噪声统计未知时变情况下滤波依然收敛.

注 4. 由文献 [13] 可知, α_k , β_k 及 γ_k 是未知时变的, 这使得计算 $\delta P_{k/k-1}$ 和 $\delta P_{\hat{\mathbf{z}}_k}$ 无法实现, 且有可能 $\delta P_{k/k-1} < 0$ 和 $\delta P_{\hat{\mathbf{z}}_k} < 0$, 造成式 (95) 不成立, 即传统 UKF 在精确已知噪声先验统计时也可能发散. 为了计算简单及增强传统 UKF 的稳定性, 可以在 Ξ_k 和 Σ_k 中分别引入一个足够大的附加正定矩阵 ΔQ_{k-1} 和 ΔR_k ^[11], 使得

$$\Xi_k = \delta P_{k/k-1} + Q_{k-1} + \Delta Q_{k-1} > \Xi_{\min} I \quad (101)$$

$$\Sigma_k = \delta P_{\hat{z}_k} + R_k + \Delta R_k > \Sigma_{\min} I \quad (102)$$

这样既保证了传统 UKF 的稳定性又无需计算 $\delta P_{k/k-1}$ 和 $\delta P_{\hat{z}_k}$. 相应地在噪声统计未知时变情况下, 为增强自适应 UKF 算法的稳定性, 也可以在 Ξ'_k 及 Σ'_k 中分别引入相同的附加正定矩阵 ΔQ_{k-1} 和 ΔR_k , 使得

$$\Xi'_k = \delta P_{k/k-1} + \hat{Q}_{k-1} + \Delta Q_{k-1} > \Xi_{\min} I \quad (103)$$

$$\Sigma'_k = \delta P_{\hat{z}_k} + \hat{R}_k + \Delta R_k > \Sigma_{\min} I \quad (104)$$

只是 ΔQ_{k-1} 和 ΔR_k 的取值应在保证滤波稳定性和精度之间权衡^[11].

注 5. 文献 [11] 在证明引理 1 时假设了非线性系统的噪声均值为零, 而对于本文非线性系统 (1), 其噪声均值非零且未知时变, 为此可以作如下分析:

已知噪声均值的真实值分别为 $\mathbf{q}_k$ 和 $\mathbf{r}_k$, 假设实际值分别为 $\bar{\mathbf{q}}_k$ 和 $\bar{\mathbf{r}}_k$, 那么噪声协方差的真实值 $\bar{Q}_k$ 和 $\bar{R}_k$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \bar{Q}_k &= E[(\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{q}}_k)(\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{q}}_k)^T] = \\ &E\{[\mathbf{w}_k - (\mathbf{q}_k - \Delta \mathbf{q}_k)][\mathbf{w}_k - (\mathbf{q}_k - \Delta \mathbf{q}_k)]^T\} = \\ &E[(\mathbf{w}_k - \mathbf{q}_k)(\mathbf{w}_k - \mathbf{q}_k)^T] + (\Delta \mathbf{q}_k)^2 = \\ &Q_k + (\Delta \mathbf{q}_k)^2 \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_k &= E[(\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{r}}_k)(\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{r}}_k)^T] = \\ &E\{[\mathbf{v}_k - (\mathbf{r}_k - \Delta \mathbf{r}_k)][\mathbf{v}_k - (\mathbf{r}_k - \Delta \mathbf{r}_k)]^T\} = \\ &E[(\mathbf{v}_k - \mathbf{r}_k)(\mathbf{v}_k - \mathbf{r}_k)^T] + (\Delta \mathbf{r}_k)^2 = \\ &R_k + (\Delta \mathbf{r}_k)^2 \end{aligned} \quad (106)$$

其中, $\Delta \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k - \bar{\mathbf{q}}_k$, $\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \bar{\mathbf{r}}_k$ 及 $(\Delta \mathbf{q}_k)^2 = \Delta \mathbf{q}_k(\Delta \mathbf{q}_k)^T$. 由于 $(\Delta \mathbf{q}_k)^2$ 和 $(\Delta \mathbf{r}_k)^2$ 是非负定对称阵, 因此由先前理论分析可知它们对 UKF 的稳定性没有任何影响, 只影响 UKF 的滤波精度.

6 仿真分析

考虑如下所示的强非线性高斯系统模型来验证所设计的自适应 UKF 滤波算法的有效性:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{50}{1+x_{2,k}x_{3,k}}\right) \\ 2(x_{1,k})^2 e^{-x_{2,k}x_{3,k}} \\ \sin(x_{3,k}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k \quad (107)$$

$$z_k = x_{1,k} + e^{-3x_{2,k}x_{3,k}} + v_k \quad (108)$$

其中 w_k 和 v_k 均为高斯白噪声, 且它们的常值统计特性如下所示:

$$q = 0.2, \quad Q = 0.4, \quad r = 0.3, \quad R = 0.5 \quad (109)$$

设非线性系统 (107) 和 (108) 的理论初始值为

$$\mathbf{x}_0 = [0.5 \ 1 \ 1]^T \quad (110)$$

同时取状态估计的初始值为

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [0.5 \ 1 \ 1]^T, \quad P_0 = I \quad (111)$$

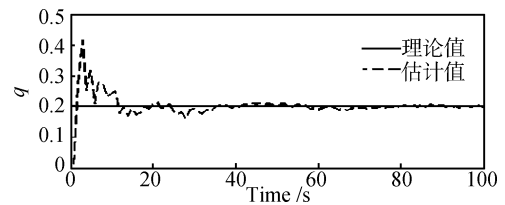
且 $\mathbf{x}_0$ 与 w_k 和 v_k 是互不相关的.

例 1. 噪声统计未知或不准确.

假设在实际中量测噪声统计特性精确已知, 而系统噪声统计特性未知或不准确, 采用式 (42)~(45) 所示的常值噪声统计估计器对 q 和 Q 进行估计, 且取初始均值和协方差为

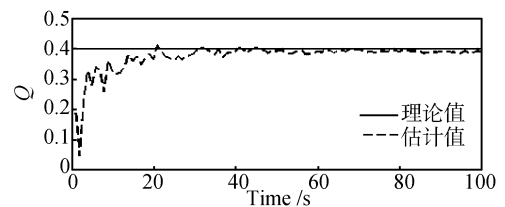
$$\hat{q}_0 = 0, \quad \hat{Q}_0 = 0.2 \quad (112)$$

则系统噪声统计估计值如图 1 所示. 相应地, 为了考察在噪声统计未知情况下本文所设计的自适应 UKF 及传统 UKF 的滤波性能, 分别采用式 (54)~(61) 及式 (10)~(17) 对非线性系统 (107) 和 (108) 进行状态估计, 状态 $x_{1,k}$ 估计值及估计误差如图 2 所示.



(a) 系统噪声均值 q 估计值

(a) Estimation of system noise mean q



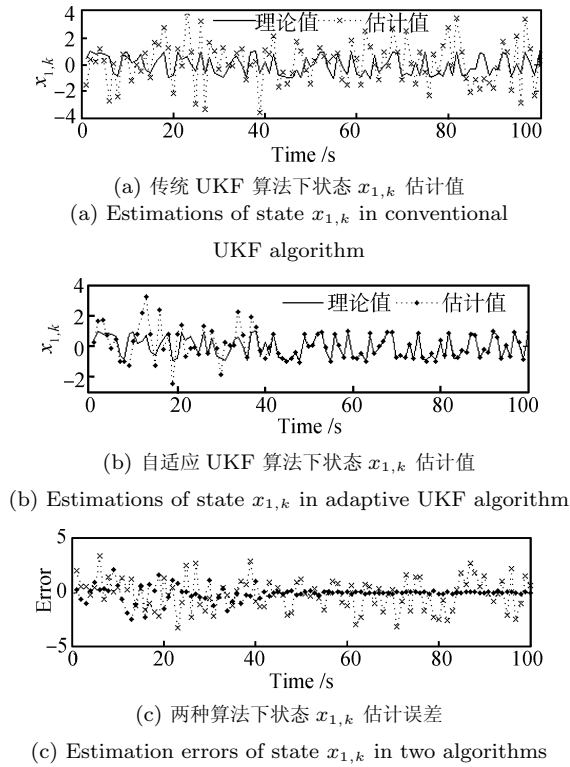
(b) 系统噪声协方差 Q 估计值

(b) Estimation of system noise covariance Q

图 1 系统噪声统计估计值

Fig. 1 Estimation of system noise statistics

从图 2 中可以看出, 传统 UKF 在系统噪声统计未知或不准确时滤波精度严重下降, 已无法准确跟踪状态 $x_{1,k}$ 的变化, 这与先前的理论分析相吻合; 另外在图 1 中, 次优无偏 MAP 常值噪声统计估计器能快速准确地估计出系统噪声的均值和协方差, 充分说明了式 (42)~(45) 的有效性.

图 2 状态 $x_{1,k}$ 估计值及估计误差Fig. 2 Estimations and errors of the state $x_{1,k}$

特别地, 在图 2 中滤波开始时, 因系统噪声统计不准确, 基于式 (42)~(45) 的自适应 UKF 滤波算法对状态 $x_{1,k}$ 的估计效果不佳, $x_{1,k}$ 估计误差也较大, 但随着噪声统计估计器对系统噪声均值 q 和方差 Q 的有效跟踪, 自适应 UKF 对状态 $x_{1,k}$ 的滤波效果由差变好, $x_{1,k}$ 估计误差由大变小, 大概在 40s 以后, 自适应 UKF 实现了对状态 $x_{1,k}$ 的准确跟踪, $x_{1,k}$ 估计误差也逐渐趋于零, 这有效克服了传统 UKF 在噪声统计未知或不准确时滤波精度下降甚至发散的缺点, 验证了自适应 UKF 的可行性。

例 2. 噪声统计未知且慢时变.

假设非线性系统 (107) 和 (108) 的噪声先验统计 q 、 Q 及 r 如式 (109) 所示精确已知, 但量测噪声方差 R 在滤波前未知或不准确, 且在滤波过程中 R 发生了改变, 具体为

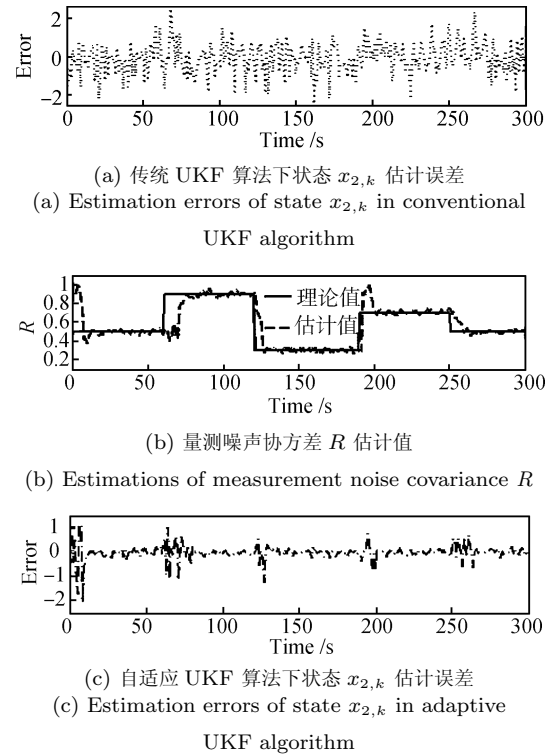
$$R_k = \begin{cases} 0.5, & 0 < k < 60, k \geq 250 \\ 0.9, & 60 \leq k < 120 \\ 0.3, & 120 \leq k < 190 \\ 0.7, & 190 \leq k < 250 \end{cases} \quad (113)$$

同时, 取量测噪声协方差初始值及遗忘因子为

$$\hat{R}_0 = 1.0, \quad b = 0.95 \quad (114)$$

则采用基于式 (68)~(71) 的自适应 UKF 滤波算法

及传统 UKF 对非线性系统 (107) 和 (108) 进行状态估计, 状态 $x_{2,k}$ 估计误差及 R 估计值如图 3 所示。

图 3 状态 $x_{2,k}$ 估计误差及量测噪声协方差 R 估计值Fig. 3 Estimation errors of state $x_{2,k}$ and estimations of measurement noise covariance R

从图 3 中不难看出, 传统 UKF 在量测噪声统计未知慢时变情况下非线性滤波已经失效, 其滤波精度严重下降; 而对于自适应 UKF 滤波算法来说, 因量测噪声协方差 R 统计不准确, 故滤波开始时状态 $x_{2,k}$ 估计误差较大, 滤波精度不佳, 但随着基于渐消记忆加权的噪声统计估计器 (68)~(71) 大约从 20s 开始对 R 的精确跟踪, 状态 $x_{2,k}$ 的估计误差由大变小, 且逐渐趋于零; 类似地, 从 60s 这个时刻开始, 协方差 R 发生突变, 与之相应状态 $x_{2,k}$ 估计误差开始变大, 但随着采用噪声统计估计器大约从 80s 以后对 R 变化的精确跟踪, 状态 $x_{2,k}$ 估计误差逐渐变小, 且趋于零。

发生改变的情况同样在 120s、190s 及 250s 这些时刻出现, 而基于式 (68)~(71) 的噪声统计估计器都能快速准确地达到对 R 变化的精确跟踪, 这说明相对于传统 UKF, 自适应 UKF 滤波算法具有应对噪声变化的自适应能力。

例 3. 噪声统计具有快时变特性.

为了验证基于限定记忆指数加权的噪声统计估计器的有效性, 将基于式 (75)~(78) 的自适应 UKF 滤波算法应用于 INS/GPS 组合导航系统当中. 本文选取 INS 为主导航系统, 以姿态、速度及位置误

差为状态向量建立滤波器状态方程, GPS 作为辅助导航系统提供量测信息. INS/GPS 组合导航非线性系统模型参见文献 [16].

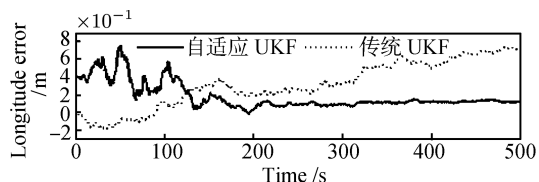
分别采用传统 UKF 及自适应 UKF 滤波算法对载体的姿态、速度及位置等误差信息进行估计, 并通过反馈校正来修正 INS 的导航参数. 上述滤波算法性能的好坏可通过 INS/GPS 组合导航系统的定位精度来衡量. 取仿真条件如下:

$$\nabla = 10 \text{ mg}, \varepsilon = 0.1^\circ/\text{h} \quad (115)$$

$$\begin{cases} w_{\nabla} \sim N(1 \text{ mg}, ([10 \sin(0.1t)] \text{ mg})^2) \\ w_{\varepsilon} \sim N(0.01^\circ/\text{h}, ([0.05 \cos(0.1t)]^\circ/\text{h})^2) \end{cases} \quad (116)$$

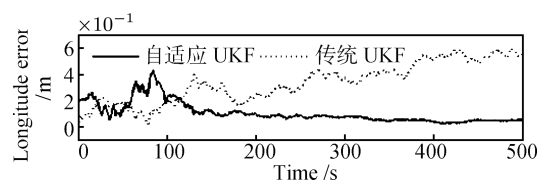
其中, ∇ 和 ε 分别为加速度计常值零偏和陀螺常值漂移, 在 INS/GPS 系统建模过程中, 它们通常会被视为状态变量的一部分而采用滤波器进行估计; w_{∇} 和 w_{ε} 分别为加速度计和陀螺的随机漂移, 都为高斯白噪声, 因受内外部环境因素的影响, 它们的统计特性具有时变性和随机性. 同时, 取 GPS 系统的速度量测噪声为 0.1 m/s , 位置量测噪声为 10 m .

假设载体初始所处的位置纬度 $L = 45^\circ$, INS 平台水平初始误差角为 2° . 取限定记忆指数加权的噪声统计估计器的窗口宽度 $m = 20$, 仿真时间为 500 s , 则 INS/GPS 组合导航系统中经度、纬度及高度等位置误差估计曲线如图 4 所示.



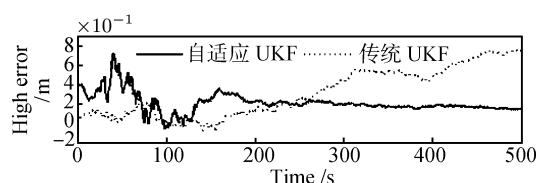
(a) 经度误差

(a) Longitude errors



(b) 纬度误差

(b) Latitude errors



(c) 高度误差

(c) High errors

图 4 两种算法下位置估计误差

Fig. 4 Position estimation errors in two algorithms

当惯性器件 (加速度计和陀螺) 随机漂移噪声统计具有快时变特性时, 传统 UKF 位置估计误差随时间迅速积累, 其仿真曲线发散, 说明传统 UKF 在时变噪声统计下滤波已经失效; 而自适应 UKF 在滤波开始时位置估计误差较大, 其定位精度不佳, 但随着基于式 (75) ~ (78) 的噪声统计估计器对惯性器件随机噪声统计变化的有效跟踪, 自适应 UKF 的位置估计误差曲线最终稳定且收敛, 其定位精度高于传统 UKF.

7 结论

传统 UKF 滤波精度高于 EKF, 但其在滤波前需要精确已知噪声的先验统计特性; 在实际工程应用中, 噪声先验信息要么未知或不准确, 要么已知但具有时变性, 而传统 UKF 在噪声统计未知时变情况下易出现滤波精度下降甚至发散的问题. 对此, 本文基于极大后验估计原理和指数加权, 设计了一种带噪声统计估计器的自适应 UKF 滤波算法, 该方法在进行滤波计算的同时, 利用噪声统计估计器对未知时变的噪声统计进行实时估计和修正, 有效克服传统 UKF 在噪声统计未知时变下滤波性能不佳的缺点, 且具有应对噪声变化的自适应能力. 所提出的自适应 UKF 滤波算法具有如下特点: 适用于噪声为加性白噪声的非线性系统; 噪声统计估计器递推公式工程应用简单; 相比现有算法, 其无任何附加限制条件, 对未知时变噪声统计的估计快速而准确; 自适应 UKF 算法的收敛性仍然可采用已有的传统 UKF 有界收敛定理来进行分析.

References

- Julier S, Uhlmann, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(3): 477–482
- Zhang Shu-Chun, Hu Guang-Da. Target tracking for maneuvering reentry vehicles with interactive multiple model unscented Kalman filter. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(11): 1220–1225
(张树春, 胡广大. 跟踪机动再入飞行器的交互多模型 Unscented 卡尔曼滤波方法. *自动化学报*, 2007, **33**(11): 1220–1225)
- Pan Quan, Yang Feng, Ye Liang, Liang Yan, Cheng Yong-Mei. Survey of a kind of nonlinear filter — UKF. *Control and Decision*, 2005, **20**(5): 481–489
(潘泉, 杨峰, 叶亮, 梁彦, 程咏梅. 一类非线性滤波器 — UKF 综述. *控制与决策*, 2005, **20**(5): 481–489)
- Cho S Y, Choi W S. Robust positioning technique in low-cost DR/GPS for land navigation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2006, **55**(4): 1132–1142
- Cho S Y, Kim B D. Adaptive IIR/FIR fusion filter and its application to the INS/GPS integrated system. *Automatica*, 2008, **44**(8): 2040–2047
- Blom H A P, Bar-Shalom Y. The interacting multiple model algorithm for system with Markovian switching coefficients.

IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, **33**(8): 780–783

- 7 Song Qi, Han Jian-Da. An adaptive UKF algorithm for the state and parameter estimation of a mobile robot. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(1): 72–79
- 8 Yu Z J, Wei J M, Liu H T. A new adaptive maneuvering target tracking algorithm using artificial neural networks. In: *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*. Washington D. C., USA: IEEE, 2008. 901–905
- 9 Sage A P, Husa G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics. In: *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*. Tokyo, Japan: The Society of Chemical Engineers, 1969. 760–769
- 10 Maybeck P S. *Stochastic Models, Estimation and Control*. New York: Academic Press, 1979
- 11 Xiong K, Zhang H Y, Chan C W. Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering. *Automatica*, 2006, **42**(2): 261–270
- 12 Wu Y X, Hu D W, Hu X P. Comments on “performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering”. *Automatica*, 2007, **43**(3): 567–568
- 13 Xiong K, Zhang H Y, Chan C W. Author’s reply to “comments on ‘performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering’”. *Automatica*, 2007, **43**(3): 569–570
- 14 Farina A, Ristic B, Benvenuti D. Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2002, **38**(3): 854–867
- 15 Tichavsky P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior Cramér-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(5): 1386–1396
- 16 Gong Xiao-Lin, Fang Jian-Cheng. Application of model predictive filtering method in POS for airborne SAR motion compensation system. *Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica*, 2008, **29**(1): 102–108
(宫晓琳, 房建成. 模型预测滤波在机载 SAR 运动补偿 POS 系统中的应用. *航空学报*, 2008, **29**(1): 102–108)



赵琳 哈尔滨工程大学自动化学院教授. 主要研究方向为惯性导航、卫星导航及组合导航.

E-mail: zhaolin@hrbeu.edu.cn

(**ZHAO Lin** Professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers inertial navigation, satellite navigation, and integrated navigation.)

igation, and integrated navigation.)



王小旭 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性滤波算法及信息融合. 本文通信作者.

E-mail: woyaoofly1982@163.com

(**WANG Xiao-Xu** Ph. D. candidate at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers nonlinear filtering algorithm and information fusion. Corresponding author of this paper.)



孙明 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为神经网络优化算法.

E-mail: snogisunming@yahoo.com.cn

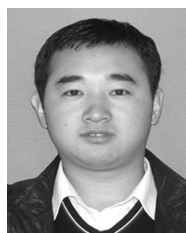
(**SUN Ming** Ph. D. candidate at the College of Automation, Harbin Engineering University. His main research interest is neural-network optimization

algorithm.)



丁继成 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为卫星导航算法. E-mail: aaron.heu@163.com

(**DING Ji-Cheng** Ph. D. candidate at the College of Automation, Harbin Engineering University. His main research interest is satellite navigation algorithm.)



闫超 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为卫星导航、组合导航及信息融合技术.

E-mail: yanchao@hrbeu.edu.cn

(**YAN Chao** Ph. D. candidate at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers satellite navigation, integrated navigation, and information fusion.)

egrated navigation, and information fusion.)