

学习辨识：最小二乘算法及其重复一致性

孙明轩¹ 毕宏博¹

摘 要 针对重复时变系统, 提出学习辨识方法用于估计系统的时变参数. 讨论了有限时间作业区间上重复运行的时变系统以及周期时变系统两种情形. 文中给出最小二乘学习算法的推导过程, 并分析了所提算法的收敛性. 结果表明, 当重复持续激励条件成立时, 提出的学习算法具有重复一致性, 能够给出时变参数的完全估计. 通过数值算例进一步验证了学习算法的有效性.

关键词 学习辨识, 最小二乘法, 随机时变系统, 重复一致性

引用格式 孙明轩, 毕宏博. 学习辨识: 最小二乘算法及其重复一致性. 自动化学报, 2012, 38(5): 698–706

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00698

Learning Identification: Least Squares Algorithms and Their Repetitive Consistency

SUN Ming-Xuan¹ BI Hong-Bo¹

Abstract This paper presents a learning identification method for stochastic systems with time-varying parametric uncertainties. The systems undertaken perform tasks repetitively over a pre-specified finite-time interval, and a least squares learning algorithm is derived on the basis of the repetitive operations. The learning identification method applies to periodically time-varying systems. It is shown that the estimates converge to the time-varying values of the parameters, and the complete estimation can be achieved under repetitive persistent excitation condition, a sufficient condition for establishing repetitive consistency of the learning algorithms. Numerical results are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed learning algorithms.

Key words Learning identification, least squares, stochastic time-varying systems, repetitive consistency

Citation Sun Ming-Xuan, Bi Hong-Bo. Learning identification: least squares algorithms and their repetitive consistency. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(5): 698–706

实际中常见的重复系统是在有限作业区间上重复运行的动态系统, 如装配生产线上的工业机器人、焊接机、注塑机、半导体晶片制作过程以及化工间歇生产过程等. 执行周期轨迹跟踪任务的动态系统是另外一类重复系统. 由于执行周期轨迹跟踪任务, 这类系统往往遭遇周期干扰, 如电力电子线路中的逆变器. 因此, 重复系统的辨识与控制是具有实际意义的研究课题.

相对而言, 已发表文献较多涉及线性周期系统, 如 Hill 方程^[1] 以及一般线性时变系统^[2]. 本文研究重复时变系统动态特性中时变参数的学习估计问题. 按照学习方法中的不变性原理, 假设系统动态特性是可重复的, 其中的时变参数为不变量. 这样, 某系统在指定区间上重复运行时, 动态特性中的时变参

数随时间而变化, 但其变化规律在每一次运行时相同, 即不随重复次数变化. 沿重复轴来看, 固定时刻对应的参数是一固定值, 如图 1 所示. 它启发我们沿重复轴来构造学习辨识算法. 在该固定时刻对应的输入输出数据沿重复轴方向满足持续激励条件时, 便可获得该固定时刻对应参数的一致性估计. 如果重复激励条件在系统作业区间上每一点成立, 可获得该时变参数在所有时刻的真值 (即完全估计). 需要指出的是, 无论参数慢变、快变甚至突变, 学习辨识算法可以给出其完全估计. 周期系统的参数沿时间轴呈周期性变化, 每个周期中某时刻对应的参数是固定不变的. 学习辨识方法也可用于周期参数的估计.

递推辨识算法中的参数估值修正是沿时间轴逐步计算的, 学习辨识类似于递推辨识, 只是其算法是沿重复轴进行的. 递推辨识方法尤其是其中的递推最小二乘算法在实际场合得到了广泛应用^[3–5]. 递推算法利用新获得的观测数据, 修正系统参数估值, 当满足充分激励条件时, 参数估值能一致收敛于真值. 为了获得递推算法的一致收敛性, 可以利用鞅进行分析^[3–10]. 目前已发表的结果集中于定常系统, 即被估参数均为常值. 在处理时变系统时, 人们发现

收稿日期 2011-08-26 录用日期 2011-12-19
Manuscript received August 26, 2011; accepted December 19, 2011
国家自然科学基金 (60874041) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60874041)
本文责任编辑 王聪
Recommended by Associate Editor WANG Cong
1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023
1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023

递推最小二乘法不具备跟踪能力^[11]. 在时变系统辨识领域, 多考虑递推算法或其修正算法的跟踪能力, 理论上给出参数估计误差上界^[4-5, 12]. 例如加权最小二乘, 这类算法包括矩形窗、指数窗(遗忘因子)等. 对于不可简化(Irreducible)非平稳过程, 这些结果更准确地评价参数估计精度, 具有重要的应用价值.

众所周知, 针对递推算法而言, 如果不知道时变参数的变化规律, 那么时变参数估计是不存在一致收敛性的. 本文提出的最小二乘辨识方法, 通过系统重复运行, 能够获得时变系统中时变参数的一致估计. 因此, 学习辨识方法为时变系统辨识提供了一种有效途径, 具有理论上的“必要性”. 实际中的确存在大量有限区间上重复运行的动态系统, 学习辨识是具有应用背景的.

本文所谓的学习辨识方法是指可简化(Reducible)非平稳过程的参数估计, 其动机来自迭代学习控制的基本思想^[13]. 在迭代学习控制的压缩映射方法中, 其收敛性分析需建立输出收敛性. 一种间接的途径是输入误差分析法, 即先分析算法的输入误差的收敛性, 然后证明输出轨迹收敛于期望轨迹. 文献[14]给出的迭代学习辨识的提法正是出于输入误差分析法, 但导出的算法收敛条件往往是苛刻的. 另一种企图是借鉴、推广递推辨识方法, 以迭代学习机制进行时变系统辨识^[15-19]. 相对于压缩映射方法, 后者适用范围较宽.

针对重复时变系统, 本文先推导学习算法. 提出能够衡量重复估计性能的指标函数, 求出最小二乘解, 并给出有限区间时变系统的迭代学习最小二乘算法和周期时变系统的周期学习最小二乘算法. 继而分析最小二乘学习算法性能, 在重复持续激励条件下, 证明学习算法重复一致性. 完成仿真算例, 说明学习算法在时变参数估计方面的有效性.

1 学习算法

本节将推导重复时变系统的最小二乘学习算法, 包括迭代学习和周期学习两种情形.

两种时变参数之区别参见图 1 和图 2.

1.1 迭代学习最小二乘法

考虑下述有限区间上重复运行的单输入单输出离散时变系统

$$A(q^{-1}, t)y_k(t) = B(q^{-1}, t)u_k(t) + w_k(t) \quad (1)$$

其中, $t(0, 1, \dots, N)$ 表示时间, $k(0, 1, 2, \dots)$ 表示重复次数; $u_k(t)$ 和 $y_k(t)$ 分别为第 k 次重复时刻 t 的系统输入和输出, $w_k(t)$ 为干扰变量; $A(q^{-1}, t)$, $B(q^{-1}, t)$ 为后移位算子 q^{-1} 的时变多项式: $A(q^{-1}, t) = 1 + a_1(t)q^{-1} + \dots + a_n(t)q^{-n}$, $B(q^{-1}, t) = b_1(t)q^{-1} + \dots + b_m(t)q^{-m}$; $a_1(t), \dots, a_n(t)$ 及 $b_1(t), \dots, b_m(t)$ 为未知时变

参数, 本文假设这些未知参数是重复独立的, 即对于固定的时刻, 它们沿重复轴是恒定不变的. 定义 $\phi_k(t) = [-y_k(t-1), \dots, -y_k(t-n), u_k(t-1), \dots, u_k(t-m)]^T$, $\theta(t) = [a_1(t), \dots, a_n(t), b_1(t), \dots, b_m(t)]^T$, 可将系统(1)写成下面的回归形式:

$$y_k(t) = \phi_k^T(t)\theta(t) + w_k(t) \quad (2)$$

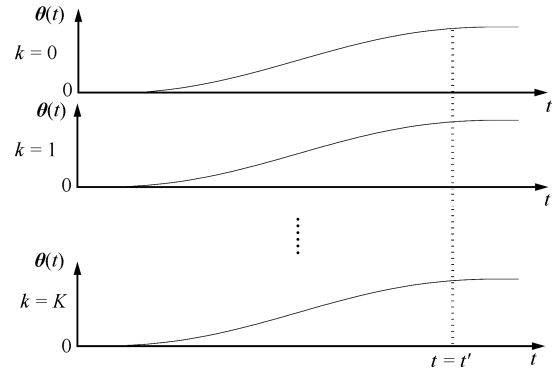


图 1 重复时变参数

Fig. 1 Repetitively time-varying parameters

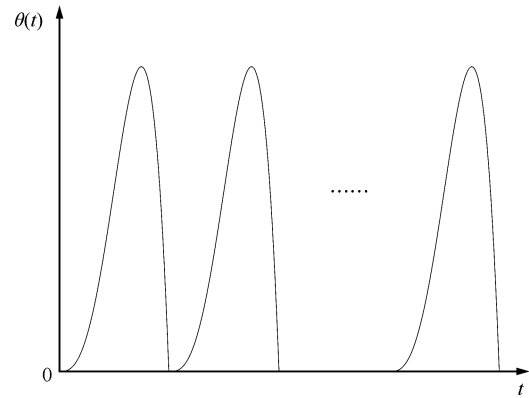


图 2 周期时变参数

Fig. 2 Periodically time-varying parameters

系统在给定的作业区间上重复运行时, 记录或量测由第 1 次至第 k 次运行时的输入输出数据 $\{y_i(t), \phi_i(t), 0 \leq t \leq N, i = 0, 1, \dots, k\}$. 对于固定的时刻 $t \in \{0, 1, \dots, N\}$, 记

$$\mathbf{Y}_k(t) = [y_0(t), \dots, y_k(t)]^T$$

$$\Phi_k(t) = [\phi_0(t), \dots, \phi_k(t)]^T$$

$$\mathbf{W}_k(t) = [w_0(t), \dots, w_k(t)]^T$$

可将表示 k 次重复运行的系统特性表达为

$$\mathbf{Y}_k(t) = \Phi_k(t)\theta(t) + \mathbf{W}_k(t) \quad (3)$$

为了能够给出 $\theta(t)$ 的估计 $\hat{\theta}_k(t)$, 考虑下述指标函数:

$$J_k(\hat{\theta}_k(t), t) = \frac{1}{2}[\mathbf{Y}_k(t) - \Phi_k(t)\hat{\theta}_k(t)]^T \times$$

$$[\mathbf{Y}_k(t) - \Phi_k(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)] \quad (4)$$

可以看出, 对于固定的时刻 t , 该指标函数是关于 k 的累加和. 当 $\Phi_k^T(t)\Phi_k(t)$ 可逆时,

$$\begin{aligned} 2J_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t), t) = & \mathbf{Y}_k^T(t)[I - \Phi_k(t)(\Phi_k^T(t)\Phi_k(t))^{-1}\Phi_k^T(t)]\mathbf{Y}_k(t) + \\ & [\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) - (\Phi_k^T(t)\Phi_k(t))^{-1}\Phi_k^T(t)\mathbf{Y}_k(t)]^T\Phi_k^T(t) \times \\ & \Phi_k(t)[\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) - (\Phi_k^T(t)\Phi_k(t))^{-1}\Phi_k^T(t)\mathbf{Y}_k(t)] \end{aligned}$$

欲使上式最小, 可取

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = (\Phi_k^T(t)\Phi_k(t))^{-1}\Phi_k^T(t)\mathbf{Y}_k(t) \quad (5)$$

这时达到的指标函数最小值为

$$J_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)) = \frac{1}{2}\mathbf{Y}_k^T(t)[I - \Phi_k(t)(\Phi_k^T(t)\Phi_k(t))^{-1} \times \Phi_k^T(t)]\mathbf{Y}_k(t) \quad (6)$$

式 (5) 给出了时变参数的最小二乘估计. 这一算法将 k 次重复运行获得的系统输入输出数据集中处理, 一次性给出固定时刻 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 的估计, $0 \leq t \leq N$. 从式 (5) 中可以看出, 最小二乘估计需完成矩阵求逆计算. 为了回避矩阵求逆计算, 可以借鉴递推最小二乘算法, 推导沿重复轴的“递推”算法, 即迭代学习最小二乘算法.

定义

$$P_k^{-1}(t) = \Phi_k^T(t)\Phi_k(t) \quad (7)$$

这样

$$\begin{aligned} P_k^{-1}(t) = P_{-1}^{-1}(t) + \sum_{i=0}^k \Phi_i(t)\Phi_i^T(t) = \\ P_{-1}^{-1}(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_i(t)\Phi_i^T(t) + \Phi_k(t)\Phi_k^T(t) \end{aligned}$$

因而, $P_k^{-1}(t)$ 具有如下递推关系:

$$P_k^{-1}(t) = P_{k-1}^{-1}(t) + \Phi_k(t)\Phi_k^T(t) \quad (8)$$

利用矩阵求逆公式, $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$, 取 $A = P_{k-1}^{-1}(t)$, $B = \Phi_k(t)$, $C = I$, $D = \Phi_k^T(t)$, 可得

$$P_k(t) = P_{k-1}(t) - \frac{P_{k-1}(t)\Phi_k(t)\Phi_k^T(t)P_{k-1}(t)}{1 + \Phi_k^T(t)P_{k-1}(t)\Phi_k(t)} \quad (9)$$

上式两端同乘 $\Phi_k(t)$,

$$P_k(t)\Phi_k(t) = \frac{P_{k-1}(t)\Phi_k(t)}{1 + \Phi_k^T(t)P_{k-1}(t)\Phi_k(t)} \quad (10)$$

由式 (5) 以及 $P_k^{-1}(t)$ 的定义知,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = P_k(t)\Phi_k^T(t)\mathbf{Y}_k(t) \times \\ P_k(t)[\Phi_{k-1}^T(t)\mathbf{Y}_{k-1}(t) + \Phi_k(t)y_k(t)] \quad (11) \end{aligned}$$

注意到

$$\Phi_k^T(t)\mathbf{Y}_k(t) = P_k^{-1}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$$

可将式 (11) 写成

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = P_k(t)[P_{k-1}^{-1}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \Phi_k(t)y_k(t)]$$

进一步, 利用式 (8),

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = P_k(t)[(P_{k-1}^{-1}(t) - \Phi_k(t)\Phi_k^T(t))\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \\ \Phi_k(t)y_k(t)] = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) - P_k(t)\Phi_k(t)\Phi_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \\ P_k(t)\Phi_k(t)y_k(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + P_k(t)\Phi_k(t)[y_k(t) - \\ \Phi_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t)] \quad (12) \end{aligned}$$

将式 (10) 代入上式, 可得:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \frac{P_{k-1}(t)\Phi_k(t)}{1 + \Phi_k^T(t)P_{k-1}(t)\Phi_k(t)}e_k(t) \quad (13)$$

式 (9) 及式 (13) 构成最小二乘学习算法, 其中, $P_{-1}(t) = p(t)I$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1}(t) = 0$, $e_k(t) = y_k(t) - \Phi_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t)$. 像所期望的那样, 这一算法中无矩阵求逆运算, 上述推导类似于递推算法的推导. 不同之处在于: 递推算法是沿时间轴逐步估计的, 而学习算法是针对每个固定时刻, 沿重复轴逐次计算的.

当初值取 $P_{-1}(t) = p(t)I$ 时, 利用矩阵求逆公式知

$$P_k^{-1}(t) = P_{-1}^{-1}(t) + \Phi_k^T(t)\Phi_k(t) \quad (14)$$

式 (14) 与式 (7) 是有区别的, 但经同样的推导过程, 在式 (14) 的定义下, 仍然能够获得上述最小二乘学习算法.

有限区间时变系统的迭代学习辨识的具体实现步骤如下:

步骤 1. 对于 $t = 0, 1, \dots, N$, 给定参数初始估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1}(t) = 0$ 和迭代公式中所需的 $P_{-1}(t)$ 值, 并置 $k = 0$;

步骤 2. 第 k 次重复运行时, 记录或量测数据 $u_k(t), y_k(t)$;

步骤 3. 计算 $\Phi_k(t)$ 及 $e_k(t)$;

步骤 4. 依照式 (13) 计算 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$;

步骤 5. 依照式 (9) 计算 $P_k(t)$;

步骤 6. 检验迭代停止条件. 若条件满足则停止运行; 否则置 $k = k + 1$, 转至步骤 2.

1.2 周期学习最小二乘算法

周期时变系统沿时间轴连续运行, 其参数的周期为 N , 则时间变量可表示为 $t + kN$, $t = 0, 1, \dots, N-1$, $k = 0, 1, \dots$. 参数满足 $\theta(t+kN) = \theta(t + (k-1)N)$. 当系统在有限区间上重复运行时, 作业区间为 N , 其时间变量为 $t = 0, 1, \dots, N$, 重复次数 $k = 0, 1, \dots$. 显然, 这类重复系统不必要求 $\theta(kN) = \theta((k-1)N)$.

周期系统运行时, 将各周期内时刻 t 相对应的输入输出数据记录或量测下来, 并记 $\mathbf{Y}(t+kN) = [y(t), y(t+N), \dots, y(t+kN)]^T$, $\Phi(t+kN) = [\phi(t), \phi(t+N), \dots, \phi(t+kN)]^T$. k 个周期的系统特性可统一表达为

$$\mathbf{Y}(t+kN) = \Phi(t+kN)\theta(t+kN) + \mathbf{W}(t+kN) \quad (15)$$

其中, $\mathbf{W}(t+kN) = [w(t), w(t+N), \dots, w(t+kN)]^T$, 表示系统在 t 时刻 k 个周期内的量测噪声向量. 此时的指标函数可写为

$$J(\hat{\theta}(t+kN), t+kN) = \frac{1}{2}[\mathbf{Y}(t+kN) - \Phi(t+kN)\hat{\theta}(t+kN)]^T \times [\mathbf{Y}(t+kN) - \Phi(t+kN)\hat{\theta}(t+kN)] \quad (16)$$

欲使上式最小, 可取

$$\hat{\theta}(t+kN) = (\Phi^T(t+kN)\Phi(t+kN))^{-1} \times \Phi^T(t+kN)\mathbf{Y}(t+kN) \quad (17)$$

为了回避求逆计算, 仿照迭代学习最小二乘算法的推导过程, 可给出下述周期学习最小二乘算法:

$$P(t+kN) = P(t + (k-1)N) - a(t+kN)P(t + (k-1)N) \times \phi(t+kN)\phi^T(t+kN)P(t + (k-1)N) \quad (18)$$

$$\hat{\theta}(t+kN) = \hat{\theta}(t + (k-1)N) + a(t+kN) \times P(t + (k-1)N)\phi(t+kN)e(t+kN) \quad (19)$$

其中, $a(t+kN) = 1/(1 + \phi^T(t+kN)P(t + (k-1)N)\phi(t+kN))$, $e(t+kN) = y(t+kN) - \phi^T(t+kN)\hat{\theta}(t + (k-1)N)$.

周期学习辨识的具体实现步骤如下:

步骤 1. 给定初始参数估值 $\hat{\theta}(t-N) = \mathbf{0}$, $P(t-N)$, 其中, $t = 0, 1, \dots, N-1$, 并置 $k = 0$;

步骤 2. 在第 k 个周期内, 记录或量测数据 $u(t+kN)$, $y(t+kN)$;

步骤 3. 计算 $\phi(t+kN)$ 及 $e(t+kN)$;

步骤 4. 依照式 (19) 计算 $\hat{\theta}(t+kN)$;

步骤 5. 依照式 (18) 计算 $P(t+kN)$;

步骤 6. 检验迭代停止条件, 若条件满足则停止运行; 否则置 $k = k + 1$, 转至步骤 2.

2 收敛性分析

迭代学习算法依据系统在作业区间上重复运行中的输入输出数据, 获得参数估值. 由于作业区间是有限的, 无法得到常规意义下的估计一致性, 只能获得重复一致性, 即:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}_k(t) = \theta(t), \quad \text{a. s.} \quad (20)$$

周期学习算法的重复一致性是指:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t+kN) = \theta(t), \quad \text{a. s.} \quad (21)$$

这里, $\theta(t+kN) = \theta(t)$, 对于所有 k 成立.

2.1 迭代学习最小二乘算法的重复一致性

对于固定时刻 $t \in \{0, 1, \dots, N\}$, 记 $\mathcal{F}_k(t)$ 为由经历 k 次重复作业获得的输入输出数据所构成的 σ 代数. 为了对提出的学习算法进行收敛性分析, 做如下假设:

假设 1. $E[w_k(t)|\mathcal{F}_{k-1}(t)] = 0$, a. s.

假设 2. 存在关于 t 一致有界的 $\sigma_w(t)$, 使得:

$$E[w_k^2(t)|\mathcal{F}_{k-1}(t)] \leq \sigma_w^2(t), \quad \text{a. s.} \quad (22)$$

假设 3. 下述重复持续激励条件成立:

$$\alpha(t)I \leq \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \phi_i(t)\phi_i^T(t) \leq \beta(t)I, \quad \text{a. s.} \quad (23)$$

式中, $\alpha(t), \beta(t) > 0$.

引理 1. 如果存在 k_0 , 使得 $|P_{k_0-1}^{-1}(t)| > 1$ 但有界, 那么,

$$\sum_{i=k_0}^k \frac{|P_i^{-1}(t)| - |P_{i-1}^{-1}(t)|}{|P_i^{-1}(t)|(\ln|P_i^{-1}(t)|)^{\delta(t)}} < \infty \quad (24)$$

其中, $\delta(t) > 1$, $|(\cdot)|$ 表示矩阵 $(\cdot)$ 的行列式.

证明. 对于 $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k_0}^k \frac{|P_i^{-1}(t)| - |P_{i-1}^{-1}(t)|}{|P_i^{-1}(t)|(\ln|P_i^{-1}(t)|)^{\delta(t)}} \leq \\ & \int_{|P_{k_0-1}^{-1}(t)|}^{|P_k^{-1}(t)|} \frac{dx}{x(\ln x)^{\delta(t)}} = \\ & \frac{-1}{\delta(t)-1} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{\delta(t)-1}} \Big|_{|P_{k_0-1}^{-1}(t)|}^{|P_k^{-1}(t)|} = \\ & \frac{1}{\delta(t)-1} \left[\frac{1}{(\ln|P_{k_0-1}^{-1}(t)|)^{\delta(t)-1}} - \right. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)-1}} \leq \frac{1}{\delta(t)-1} \frac{1}{(\ln|P_{k_0-1}^{-1}(t)|)^{\delta(t)-1}}$$

由 $\ln|P_{k_0-1}^{-1}(t)| > 0$ 有界, 证得式 (24). $\square$

引理 2. 在持续激励条件 (23) 下,

$$\left[\frac{1}{p(t)} + \alpha(t)(k+1) \right]^{n+m} \leq |P_k^{-1}(t)| \leq \left[\frac{1}{p(t)} + \beta(t)(k+1) \right]^{n+m}, \quad \text{a. s.} \quad (25)$$

证明. 将式 (23) 写成

$$\alpha(t)(k+1)I \leq \sum_{i=0}^k \phi_i(t)\phi_i^T(t) \leq \beta(t)(k+1)I, \quad \text{a. s.} \quad (26)$$

由 $P_k^{-1}(t)$ 的定义, 式 (26) 可写成

$$P_{-1}^{-1}(t) + \alpha(t)(k+1)I \leq P_k^{-1}(t) \leq P_{-1}^{-1}(t) + \beta(t)(k+1)I, \quad t \in \{0, 1, \dots, N\}$$

取 $P_{-1}(t) = p(t)I$, $p(t) > 0$, 上式可写成

$$\left(\frac{1}{p(t)} + \alpha(t)(k+1) \right) I \leq P_k^{-1}(t) \leq \left(\frac{1}{p(t)} + \beta(t)(k+1) \right) I, \quad t \in \{0, 1, \dots, N\}$$

利用对称矩阵特征值的单调性,

$$\lambda_i \left[\left(\frac{1}{p(t)} + \alpha(t)(k+1) \right) I \right] \leq \lambda_i[P_k^{-1}(t)] \leq \lambda_i \left[\left(\frac{1}{p(t)} + \beta(t)(k+1) \right) I \right], \quad t \in \{0, 1, \dots, N\} \quad (27)$$

$\lambda_i(A)$ 为矩阵 A 按大小顺序排列的第 i 个特征值. 因为 $|P_k^{-1}(t)| = \prod_{i=1}^{n+m} \lambda_i[P_k^{-1}(t)]$, 故由式 (27) 知

$$\left| \left(\frac{1}{p(t)} + \alpha(t)(k+1) \right) I \right| \leq |P_k^{-1}(t)| \leq \left| \left(\frac{1}{p(t)} + \beta(t)(k+1) \right) I \right|, \quad t \in \{0, 1, \dots, N\} \quad (28)$$

$\square$

通常选取 $p \gg 1$, 这样无法保证 $|P_{-1}^{-1}(t)| > 1$, 甚至也无从保证前几次迭代的 $|P_k^{-1}(t)|$ 的值大于 1. 由引理 2 知, 持续激励条件 (23) 可保证随着迭代次数的增加, $|P_k^{-1}(t)|$ 不断增大. 这样, 引理 1 的假设条件得以保证.

由式 (8) 可推知

$$P_{k-1}^{-1}(t) = P_k^{-1}(t) - \phi_k(t)\phi_k^T(t) = P_k^{-1}(t)(I - P_k(t)\phi_k(t)\phi_k^T(t))$$

两边取行列式,

$$|P_{k-1}^{-1}(t)| = |P_k^{-1}(t)| |I - P_k(t)\phi_k(t)\phi_k^T(t)|$$

由于

$$|I - P_k(t)\phi_k(t)\phi_k^T(t)| = 1 - \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)$$

得到

$$\phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t) = \frac{|P_k^{-1}(t)| - |P_{k-1}^{-1}(t)|}{|P_k^{-1}(t)|} \quad (29)$$

将式 (29) 代入式 (24), 可得:

$$\sum_{i=k_0}^k \frac{\phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)}{(\ln|P_i^{-1}(t)|)^{\delta(t)}} < \infty \quad (30)$$

为了方便叙述获得的结果, 我们需引入“O”记号. 当 $k \rightarrow \infty$, 序列 $f_k \rightarrow 0$, $g_k \rightarrow 0$; $f_k = O(g_k)$ 表示存在正数 $c > 0$ 及正整数 k_0 , 使得当 $k \geq k_0$ 时, $\left| \frac{f_k}{g_k} \right| \leq c$.

定理 1. 在假设 1~3 成立时,

$$\|\tilde{\theta}_k(t)\| = O\left(\sqrt{\frac{(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)}}{\lambda_{\min}[P_k^{-1}(t)]}}\right) \quad \text{a. s.} \quad (31)$$

式中, $\tilde{\theta}_k(t) = \theta(t) - \hat{\theta}_k(t)$, $\lambda_{\min}[P_k^{-1}(t)]$ 为 $P_k^{-1}(t)$ 的最小特征值.

证明. 定义非负定函数 $V_k(t) = \tilde{\theta}_k^T(t)P_k^{-1}(t)\tilde{\theta}_k(t)$. 利用式 (10) 及式 (13) 可得:

$$\tilde{\theta}_k(t) = \tilde{\theta}_{k-1}(t) - P_k(t)\phi_k(t)(\phi_k^T(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t) + w_k(t))$$

因而

$$\begin{aligned} V_k(t) &= [\tilde{\theta}_{k-1}^T(t) - \phi_k^T(t)P_k^T(t)(\phi_k^T(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t) + w_k(t))] \\ &\quad P_k^{-1}(t)[\tilde{\theta}_{k-1}(t) - P_k(t)\phi_k(t)(\phi_k^T(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t) + w_k(t))] \\ &= \tilde{\theta}_{k-1}^T(t)P_k^{-1}(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t) - 2\tilde{\theta}_{k-1}^T(t)\phi_k(t)[\phi_k^T(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t) + w_k(t)] + \\ &\quad \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)[\phi_k^T(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t) + w_k(t)]^2 \end{aligned}$$

将式 (8) 代入上式第 1 项,

$$\begin{aligned} V_k(t) &= \tilde{\theta}_{k-1}^T(t)[P_{k-1}^{-1}(t) + \phi_k(t)\phi_k^T(t)]\tilde{\theta}_{k-1}(t) - \\ &\quad 2\tilde{\theta}_{k-1}^T(t)\phi_k(t)[\phi_k^T(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t) + w_k(t)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)[\phi_k^T(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t) + w_k(t)]^2 = \\ & V_{k-1}(t) - (1 - \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t))[\phi_k^T(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t)]^2 - \\ & 2[1 - \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)]\phi_k^T(t)\tilde{\theta}_{k-1}(t)w_k(t) + \\ & \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)w_k^2(t) \end{aligned} \quad (32)$$

又因为

$$1 - \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t) = [1 + \phi_k^T(t)P_{k-1}(t)\phi_k(t)]^{-1} \geq 0$$

故

$$\begin{aligned} V_k(t) & \leq V_{k-1}(t) - 2[1 - \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)]\phi_k^T(t) \times \\ & \tilde{\theta}_{k-1}(t)w_k(t) + \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)w_k^2(t) \end{aligned}$$

上式两边取数学期望

$$\begin{aligned} & E[V_k(t)|\mathcal{F}_{k-1}(t)] \leq \\ & V_{k-1}(t) + \phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)\sigma_w^2(t), \quad \text{a. s.} \end{aligned} \quad (33)$$

定义 $W_k(t) = V_k(t)/(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)}$. 由式 (33) 知,

$$\begin{aligned} & E[W_k(t)|\mathcal{F}_{k-1}(t)] \leq \\ & \frac{V_{k-1}(t)}{(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)}} + \frac{\phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)}{(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)}}\sigma_w^2(t) \leq \\ & W_{k-1}(t) + \frac{\phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)}{(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)}}\sigma_w^2(t), \quad \text{a. s.} \end{aligned} \quad (34)$$

在 $\sigma_w(t)$ 关于 t 一致有界的假设下, 利用式 (30), 并根据文献 [3] 中推论 D.5.1 可知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 对固定的 t , $W_k(t)$ 收敛于一有穷随机变量. 因此,

$$V_k(t) = O((\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)}), \quad \text{a. s.} \quad (35)$$

另一方面,

$$V_k(t) \geq \lambda_{\min}[P_k^{-1}(t)]\|\tilde{\theta}_k(t)\|^2 \quad (36)$$

结合式 (35) 及式 (36), 可证得定理. $\square$

利用 $\ln|P_k^{-1}(t)| = O(\ln\lambda_{\max}[P_k^{-1}(t)])$, 并依据式 (31), 可得

$$\|\tilde{\theta}_k(t)\| = O\left(\sqrt{\frac{(\ln[\lambda_{\max}P_k^{-1}(t)])^{\delta(t)}}{\lambda_{\min}[P_k^{-1}(t)]}}\right), \quad \text{a. s.} \quad (37)$$

定理 1 是在 $\sigma_w(t)$ 关于 t 一致有界的假设下获得的, 实际上可将上述结果推广到方差无界的情形.

假设 4. 对于 $\varepsilon(t) > 0$,

$$E[w_k^2(t)|\mathcal{F}_{k-1}(t)] = O((\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\varepsilon(t)}), \quad \text{a. s.} \quad (38)$$

定理 2. 在假设 1, 3, 4 成立时, 当 $\delta(t) \geq 1 + \varepsilon(t)$,

$$\|\tilde{\theta}_k(t)\| = O\left(\sqrt{\frac{(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)-\varepsilon(t)}}{\lambda_{\min}[P_k^{-1}(t)]}}\right), \quad \text{a. s.} \quad (39)$$

证明. 记 $\sigma_{w,k}(t) = E[w_k^2(t)|\mathcal{F}_{k-1}(t)]$. 由式 (33) 知,

$$\begin{aligned} & E[W_k(t)|\mathcal{F}_{k-1}(t)] \leq \\ & \frac{V_{k-1}(t)}{(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)}} + \frac{\phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)}{(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)}}\sigma_{w,k}^2(t) \leq \\ & W_{k-1}(t) + \frac{\phi_k^T(t)P_k(t)\phi_k(t)}{(\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)}}\sigma_{w,k}^2(t) \end{aligned}$$

由引理 1, 并根据文献 [3] 中推论 D.5.1, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 对固定的 t , $W_k(t)$ 收敛于一有穷随机变量. 因此,

$$V_k(t) = O((\ln|P_k^{-1}(t)|)^{\delta(t)-\varepsilon(t)}), \quad \text{a. s.} \quad (40)$$

至此容易证得定理. $\square$

由于 $\ln|P_k^{-1}(t)| = O(\ln\lambda_{\max}[P_k^{-1}(t)])$, 并据式 (39), 可得:

$$\|\tilde{\theta}_k(t)\| = O\left(\sqrt{\frac{(\ln[\lambda_{\max}P_k^{-1}(t)])^{\delta(t)-\varepsilon(t)}}{\lambda_{\min}[P_k^{-1}(t)]}}\right), \quad \text{a. s.} \quad (41)$$

由持续激励条件式 (23) 及式 (37), 得到下述关于 $\|\tilde{\theta}_k(t)\|$ 收敛速率的估计:

$$\|\tilde{\theta}_k(t)\| = O\left(\sqrt{\frac{(\ln k)^{\delta(t)}}{k}}\right), \quad \text{a. s.} \quad (42)$$

在相同持续激励条件下, 由式 (41) 得到下述关于 $\|\tilde{\theta}_k(t)\|$ 收敛速率的估计:

$$\|\tilde{\theta}_k(t)\| = O\left(\sqrt{\frac{(\ln k)^{\delta(t)-\varepsilon(t)}}{k}}\right), \quad \text{a. s.} \quad (43)$$

2.2 周期学习最小二乘算法的重复一致性

下面针对周期学习最小二乘算法进行收敛性分析. 对于固定时刻 $t \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, 记 $\mathcal{F}(t + kN)$ 为系统经由 k 个周期的输入输出数据构成的 σ 代数.

假设 5. $E[w(t + kN)|\mathcal{F}(t + (k-1)N)] = 0$, a. s.

假设 6. 存在关于 t 一致有界的 $\sigma_w(t)$ 使得:

$$E[w^2(t + kN)|\mathcal{F}(t + (k-1)N)] \leq \sigma_w^2(t), \quad \text{a. s.} \quad (44)$$

假设 7. 下述持续激励条件成立:

$$\alpha(t)I \leq \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \phi(t+iN)\phi^T(t+iN) \leq \beta(t)I, \quad \text{a. s.} \quad (45)$$

式中, $\alpha(t), \beta(t) > 0$.

定理 3. 当假设 5~7 成立时,

$$\|\tilde{\theta}(t+kN)\| = O\left(\sqrt{\frac{(\ln |P^{-1}(t+kN)|)^{\delta(t)}}{\lambda_{\min}[P^{-1}(t+kN)]}}\right), \quad \text{a. s.} \quad (46)$$

式中, $\delta(t) > 1$, $\tilde{\theta}(t+kN) = \theta(t+kN) - \hat{\theta}(t+kN)$, $\lambda_{\min}[P^{-1}(t+kN)]$ 为 $P^{-1}(t+kN)$ 的最小特征值. 定理 3 是在 $\sigma_w(t)$ 关于 t 一致有界的条件下获得的, 也可将上述结果推广到方差无界的情形.

假设 8. 对于 $\varepsilon(t) > 0$, $E[w^2(t+kN)|\mathcal{F}(t+(k-1)N)] = O((\ln |P^{-1}(t+kN)|)^{\varepsilon(t)})$, a. s.

定理 4. 在假设 5, 7 和 8 成立时, 当 $\delta(t) \geq 1 + \varepsilon(t)$,

$$\|\tilde{\theta}(t+kN)\| = O\left(\sqrt{\frac{(\ln |P^{-1}(t+kN)|)^{\delta(t)-\varepsilon(t)}}{\lambda_{\min}[P^{-1}(t+kN)]}}\right), \quad \text{a. s.} \quad (47)$$

其中, $\delta(t) - \varepsilon(t) \geq 1$.

定理 3 及定理 4 表明, 提出的周期学习最小二乘算法在重复持续激励条件下, 可给出周期参数在整个周期上的完全估计.

应该说明的是, 文中采用的分析手段和获得的理论结果类似于递推算法分析的做法和结果^[3-10, 12]. 这一工作的意义在于, 借鉴已有的递推算法分析方法, 给出有限区间时变系统的学习辨识算法收敛性能; 获得的结果表明学习辨识可给出时变参数沿整个作业区间的完全估计.

3 数值结果

本节完成数值算例, 以说明学习辨识算法可用于动态系统中时变参数的估计. 首先, 考虑下述有限区间时变系统:

$$y_k(t+1) + a_1(t)y_k(t) + a_2(t)y_k(t-1) = b_1(t)u_k(t) + b_2(t)u_k(t-1) + w_k(t+1)$$

其中

$$a_1(t) = -1.5 + \sin\left(\frac{2N}{t+1}\right)$$

$$a_2(t) = 0.7 + 0.01t \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)$$

$$b_1(t) = 1 + \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{61}\right)}{t+1}$$

$$b_2(t) = 0.1 + 0.1t^{\frac{1}{2}}$$

仿真中, $N = 50$. 对于 $t = 0, 1, 2, \dots, N$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $u_k(t)$ 取值为 $[-0.5, 0.5]$ 上的均匀分布的随机变量, $w_k(t) = 0.01\text{randn}$. 这里, randn 为服从 $(0, 1)$ 正态分布的随机变量的产生函数. 在最小二乘学习算法 (9) 及算法 (13) 中, 设置初值 $P_{-1}(t) = 10^6 I_{4 \times 4}$, $\theta_{-1}(t) = [0, 0, 0, 0]^T$. 为了考查收敛性能, 定义 $J_k = \max_{0 \leq t \leq N} |e_k(t)|$, $e_k(t) = y_k(t) - \phi_k^T(t)\hat{\theta}_{k-1}(t)$. 重复进行 50 次. 预报误差见图 3, 参数估计结果见图 4. 由图 3 可以看出, 预报误差随着迭代次数的增加而迅速减小, 并最后收敛于一个较小的界内. 在图 4 中, 最后一次迭代所获得的参数估值与参数真值基本吻合, 仿真结果表明了参数估值的一致收敛性, 可以实现对待估计参数的完全估计.

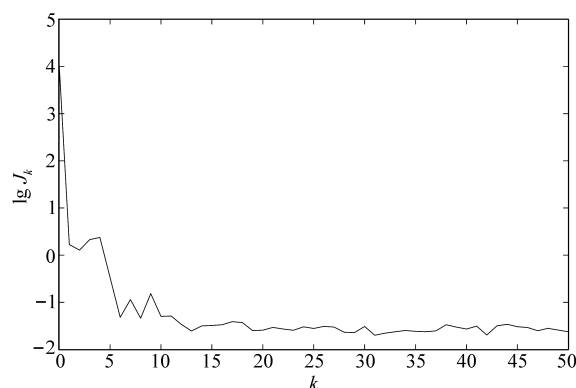


图 3 预报误差

Fig. 3 Predictive error with respect to repetition

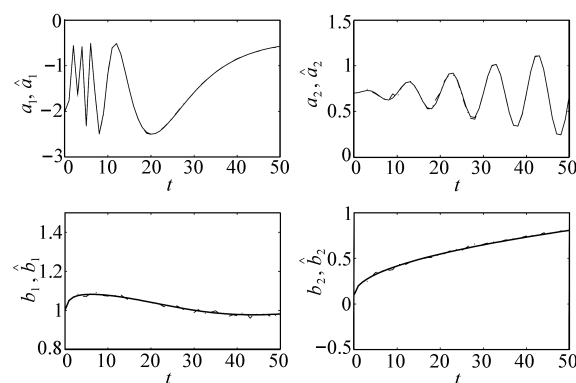


图 4 参数估计结果

Fig. 4 Parameter estimations after learning

下面考虑周期时变系统

$$y(t+1) + a_1(t)y(t) + a_2(t)y(t-1) = b_1(t)u(t) + b_2(t)u(t-1) + w(t+1) \quad (48)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 1 + 0.3 \sin\left(\frac{2\pi t}{30}\right) \\ a_2(t) &= 0.7 + 0.3 \cos\left(\frac{2\pi t}{30}\right) \\ b_1(t) &= 1 + 0.3 \sin\left(\frac{2\pi t}{30}\right) \\ b_2(t) &= 0.5 + 0.3 \sin\left(\frac{2\pi t}{30}\right) \end{aligned}$$

我们将式 (48) 中的时间变量改记为 $t + kN$. 在仿真中, 选取周期长度 $N = 30$, 重复次数 $k = 0, 1, 2, \dots$, $u(t + kN)$ 取值为 $[-0.5, 0.5]$ 上的均匀分布的随机变量, $w(t + kN) = 0.01\text{randn}$. 这里, randn 为服从 $(0, 1)$ 正态分布的随机变量的产生函数. 在最小二乘学习算法 (18) 及算法 (19) 中, 设置初值 $P(t - N) = 10^6 I_{4 \times 4}$, $\theta(t - N) = [0, 0, 0, 0]^T$. 为了考查收敛性能, 定义 $J_k = \max_{0 \leq t \leq N-1} |e(t + kN)|$, $e(t + kN) = y(t + kN) - \phi^T(t + kN)\hat{\theta}(t + (k-1)N)$. 重复进行 10 次. 预报误差见图 5, 参数估计结果见图 6. 由图 5 可以看出, 预报误差随着周期数的增加而减小, 并最后稳定在一个较小的界内. 在图 6 中, 可以看出系统运行至第 5 个周期后所得的参数估值与参数真值基本吻合, 结果表明了参数估值的一致收敛性, 周期学习算法可以实现对周期时变参数的完全估计.

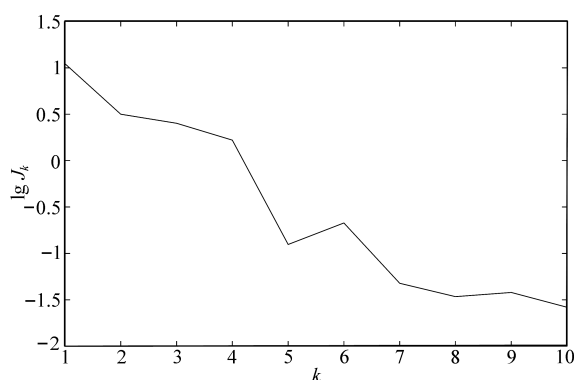


图 5 预报误差

Fig. 5 Predictive error with respect to repetition

为了进一步说明所提学习算法关于时变参数估计的必要性和优势, 我们以带遗忘因子递推最小二乘算法为例进行比较. 仿真中, 采用与周期最小二乘算法所处理的相同模型、初值和参数, 并取遗忘因子 $\lambda = 0.75$. 预报误差见图 7, 参数估计结果见图 8. 由

仿真结果可以看出, 遗忘因子递推最小二乘算法能实现对时变参数的跟踪, 但不能像学习算法那样, 给出周期时变参数的一致性收敛结果.

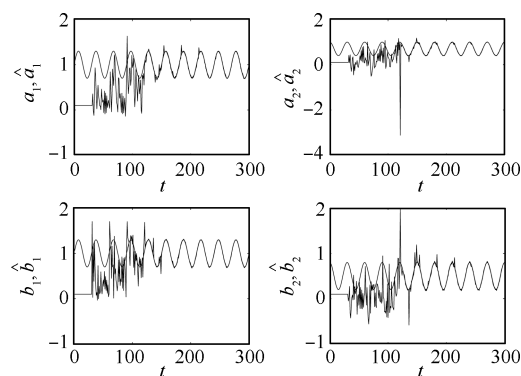


图 6 参数估计结果

Fig. 6 Parameter estimations after learning

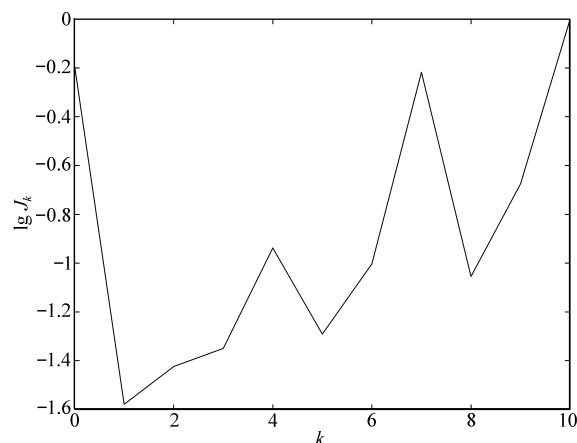


图 7 预报误差

Fig. 7 Predictive error with respect to repetition

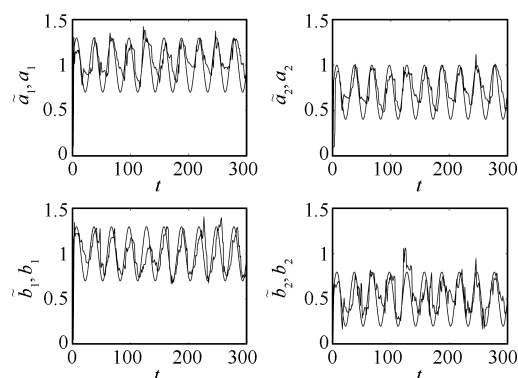


图 8 参数估计结果

Fig. 8 Parameter estimations by the recursive algorithm

4 结论

本文提出的学习辨识方法可用于解决重复时变系统的参数估计问题. 针对有限区间重复作业下的时变系统和周期时变系统, 推导了迭代学习最小二

乘算法和周期学习最小二乘算法. 在重复持续激励条件下, 证明学习算法的重复一致性, 可以给出时变参数的完全估计. 仿真结果也验证了学习算法的有效性.

本文的主要目的在于提出这种学习辨识方法, 分析学习辨识与现有递推辨识算法的联系与区别. 为了理论完整性和表述简洁起见, 对于学习算法的一致性分析方面, 我们借鉴了递推算法一致性分析的成熟结果. 但在表述上可以看出两者仍有区别之处, 比如递推算法要求沿时间轴的 PE (Persistent excitation) 条件, 而学习算法要求重复 PE 条件; 保证学习算法收敛一致性的假设条件以及获得的收敛速度的估计允许依赖于时间等. 文献 [4] 中给出了递推辨识的系统性结果, 我们可以借鉴其中的结果开展后续研究, 包括系统干扰为有色噪声的情形、持续激励、严格正实 (Strictly positive realness, SPR) 条件和收敛速度估计的改进等.

References

- Richards J A. *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*. New York: Springer-Verlag, 1983
- Tsakalis K S, Ioannou P A. *Linear Time-Varying Systems: Control and Adaptation*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993
- Goodwin G C, Sin K S. *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984
- Chen H F, Guo L. *Identification and Stochastic Adaptive Control*. Boston, MA: Birkhäuser, 1991
- Guo Lei. *Time-Varying Stochastic Systems: Stability, Estimation and Control*. Changchun: Jilin Science and Technology Press, 1993
(郭雷. 随机时变系统: 稳定性、估计与控制. 长春: 吉林科学技术出版社, 1993)
- Sternby J. On consistency for the method of least squares using martingale theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(3): 346–352
- Moore J B. On strong consistency of least squares identification algorithms. *Automatica*, 1978, **14**(5): 505–509
- Solo V. The convergence of AML. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, **24**(6): 958–962
- Lai T, Wei C Z. Extended least squares and their applications to adaptive control and prediction in linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(10): 898–906
- Ding F, Shi Y, Chen T W. Performance analysis of estimation algorithms of nonstationary ARMA processes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(3): 1041–1053
- Mareels I, Polderman J W. *Adaptive Systems: an Introduction*. Boston, MA: Birkhäuser, 1996
- Niedzwiecki M. *Identification of Time-Varying Processes*. New York: John Wiley and Sons, 2000
- Arimoto S. *Control Theory of Non-Linear Mechanical Systems: a Passivity-Based and Circuit-Theoretic Approach*. Oxford UK: Oxford University Press, 1996
- Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian. *Iterative Learning Control*. Beijing: National Defence Industry Press, 1999
(孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制. 北京: 国防工业出版社, 1999)
- Sun M X, He X X. Iterative learning identification and control of discrete time-varying systems. In: *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*. Zhangjiajie, China: IEEE, 2007. 520–524
- Sun M X. Iterative learning neurocomputing. In: *Proceedings of the 2009 International Conference on Wireless Networks and Information Systems*. Shanghai, China: IEEE, 2009. 158–161
- Wu P J, Sun M X. Two iterative learning identification algorithms for discrete time-varying systems. In: *Proceedings of the 27th Chinese Control Conference*. Kunming, China: IEEE, 2008. 91–95
- Yan W L, Sun M X. Identification of discrete-time varying nonlinear systems using time-varying neural networks. In: *Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Ji'nan, China: IEEE, 2010. 301–306
- Hua G F, Sun M X. Learning identification and control of a class of discrete periodic systems. In: *Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Industrial Electronics and Applications*. Xi'an, China: IEEE, 2009. 6–11



孙明轩 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为学习辨识与控制. 本文通信作者.

E-mail: mxsun@zjut.edu.cn

(SUN Ming-Xuan Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning identification and control. Corresponding author of this paper.)



毕宏博 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为学习辨识.

E-mail: bihb001@163.com

(BI Hong-Bo Ph.D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning identification.)