

## 具有优先关系的累积调度问题的约束传播算法

刘士新<sup>1,2</sup> 郭哲<sup>1,2</sup> 唐加福<sup>1,2</sup>

**摘要** 约束传播是约束规划成功应用的关键技术之一. 针对累积调度问题提出一种结合工作间优先关系和工作最早开始/最晚完成时间约束的约束传播算法, 给出了算法的理论依据. 引用资源受限项目调度问题库 PSPLIB 中的典型问题对算法进行了测试, 结果表明: 针对测试问题新的约束传播算法在总体约减效果上优于现有约束传播算法, 新算法与基于能量推理的约束传播算法可以互补, 两者结合推理效果更好.

**关键词** 累积调度问题, 优先关系, 约束规划, 约束传播

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.00603

### Constraint Propagation for Cumulative Scheduling Problems with Precedences

LIU Shi-Xin<sup>1,2</sup> GUO Zhe<sup>1,2</sup> TANG Jia-Fu<sup>1,2</sup>

**Abstract** Constraint propagation is one of the key elements of constraint programming. After presenting supporting theories of constraint propagation for cumulative scheduling problems (CuSP), the authors propose a constraint propagation algorithm in which both precedence constraints and activity time bound constraints are taken into consideration. By citing two sets of benchmark problems of PSPLIB to test the algorithm, experimental results show that the new algorithm outperforms existing constraint propagation algorithms for the testing problems. Moreover, the new algorithm and the energetic reasoning algorithm may complement each other. A hybrid one of the two algorithms is promising.

**Key words** Cumulative scheduling problem (CuSP), precedence, constraint programming, constraint propagation (CP)

约束规划 (Constraint programming, CP) 是人工智能领域的研究方法, 适合求解具有多种约束的组合优化问题. 约束传播是 CP 的关键技术之一, 其基本思想是通过循环分析变量、值域和约束, 检验并删除不可能出现在可行解中的变量赋值, 从而约减变量值域.

CP 在调度问题研究领域已经获得了很多成功应用. 1989 年 Carlier 等<sup>[1]</sup> 在分枝定界算法中使用约束传播技术, 首次成功解决了 1963 年 Muth 等<sup>[2]</sup> 提出后让众多学者孜孜不倦努力求解 20 多年的  $10 \times 10$  车间调度问题. 从此, 约束传播技术引起了调度问题研究领域学者的广泛关注, 针对调度问题的约束传播算法的时间复杂性也不断获得改进<sup>[3-13]</sup>.

收稿日期 2009-01-13 录用日期 2009-11-11  
Manuscript received January 13, 2009; accepted November 11, 2009  
国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2007AA04Z194), 国家自然科学基金 (70771020, 70721001), 新世纪优秀人才支持计划 (NCET-06-0286) 资助  
Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2007AA04Z194), National Natural Science Foundation of China (70771020, 70721001), and Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-06-0286)

1. 东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110004 2. 东北大学流程工业综合自动化教育部重点实验室 沈阳 110004  
1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004 2. Key Laboratory of Process Industry Automation, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110004

调度问题研究领域的约束传播方法可以分为时间约束传播和资源约束传播两类. 时间约束传播根据工作间优先关系约束计算各工作的 [最早开始时间, 最晚完成时间] 区间, 约束传播算法可以基于时间约束网络采用最短路径算法实现<sup>[4]</sup>. 资源约束传播通过分析竞争同一资源的工作对资源需求量和资源供应量的关系, 对工作 [最早开始时间, 最晚完成时间] 区间进行约减. 资源约束传播方法根据资源特性进一步分为两类: 一类是分离调度问题 (Disjunctive scheduling problem, DSP) (DSP 中资源可用量和工作在执行期间对资源的需求量均为 1) 约束传播<sup>[5]</sup>, 较好的 DSP 约束传播方法有 Edge-finding<sup>[3, 8, 10]</sup>, Input-or-output<sup>[3]</sup>, Not-first/not-last<sup>[11]</sup>. 另一类是累积调度问题 (Cumulative scheduling problem, CuSP) (CuSP 中资源可用量和工作在执行期间对资源的需求量均大于等于 1) 约束传播, 较好的 CuSP 约束传播方法有 Edge-finding<sup>[3-6]</sup>, Energetic-reasoning<sup>[3, 7, 9, 16]</sup>.

两类资源约束传播技术相比, DSP 约束传播技术比 CuSP 约束传播技术受到更早的关注和研究, 成果相对较多、较成熟. CuSP 约束传播更加困难, 起步晚, 成果较少. 目前, 主流 CuSP 约束传播算法在进行约束传播时, 首先将工作间的优先关系简化为工作的 [最早开始时间, 最晚完成时间] 区间约束, 而在约束传播过程中不再考虑工作间的优先关系, 这样的处理方法在工作可行时间区间较大时, 往往得不到较好的约束传播效果. Laborie<sup>[17]</sup> 针对这一缺陷, 基于优先关系图提出了改进的约束传播算法. 然而, Laborie 的算法虽然在约束传播过程考虑了工作间优先关系约束, 却忽略了非优先工作在约束传播中的作用.

本文针对 CuSP 提出一种结合工作间优先关系和工作 [最早开始时间, 最晚完成时间] 区间约束的约束传播算法. 第 1 节对 CuSP 及约束传播算法相关的定义和基础理论进行描述. 第 2 节首先提出新约束传播算法的理论基础, 然后给出新算法的设计并对时间复杂性进行分析. 第 3 节给出新约束传播算法针对资源受限项目调度问题 (Resource-constrained project scheduling problem, RCPSP) 的实验结果. 最后是结论.

### 1 问题描述

CuSP 由一个工作集合  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  和一种可用量为  $C > 1$  的资源构成. 工作  $i \in A$  的最早开始时间为  $r_i$ , 最晚完成时间为  $d_i$ , 执行时间为  $p_i$ , 在执行过程中的每一阶段需要资源量为  $c_i$ , 总能量需求为  $e_i = c_i \times p_i$ . 假设所有参数均为自然数, 问题是在满足资源限制的情况下如何安排各工作的开始时间使得完成所有工作的最大完成时间最小. CuSP 可以认为是 RCPSP 的一类松弛问题. 给定一个 RCPSP 及其工期底线 UB, 工作的最早开始时间  $r_i$  和最晚完成时间  $d_i$  可以根据项目网络图采用最短路径算法求得. 选择一种资源约束, 放松其他资源约束和工作间优先关系约束, 即可得到一个 CuSP 实例.

记  $S = [s_1, s_2, \dots, s_n]$  为 CuSP 实例  $P$  的一个可行解,  $s_i$  为工作  $i$  在解  $S$  中的开始时间, UB 为  $P$  所有解目标函数值的上界, 则  $S$  满足如下约束:

$$\forall i \in A: r_i \leq s_i \leq s_i + p_i \leq d_i \quad (1)$$

$$\forall t \in [0, 1, \dots, \text{UB}]: \sum_{i \in A, s_i \leq t \leq s_i + p_i} c_i \leq C \quad (2)$$

定义 1<sup>[3]</sup>. 给定时间区间  $[t_1, t_2]$ , 工作  $i$  在时间区间  $[t_1, t_2]$  的最小能量需求  $E(i, t_1, t_2)$  为

$$E(i, t_1, t_2) = c_i \times \min(t_2 - t_1, p_i^+(t_1), p_i^-(t_2)) \quad (3)$$

其中

$$p_i^+(t_1) = \max(0, p_i - \max(0, t_1 - r_i)) \quad (4)$$

$$p_i^-(t_2) = \max(0, p_i - \max(0, d_i - t_2)) \quad (5)$$

记  $E(t_1, t_2)$  为全部工作在时间区间  $[t_1, t_2]$  的最小能量需求, 则  $E(t_1, t_2) = \sum_{i \in A} E(i, t_1, t_2)$ .

定义 2. 记  $P$  为 CuSP 的一个实例, 如果  $P$  满足

$$E(t_1, t_2) \leq C \times (t_2 - t_1), \quad \forall [t_1, t_2], t_1 \leq t_2 \leq \text{UB} \quad (6)$$

则称  $P$  是能量可行的.

以下假设讨论的问题都是能量可行的.

定义 3<sup>[3]</sup>. 记  $\Omega$  为  $A$  的一个子集,  $\Omega$  的最早开始时间为  $r_\Omega$ , 最晚完成时间为  $d_\Omega$ ,  $\Omega$  中全部工作需要消耗的能量为  $e_\Omega$ , 则

$$r_\Omega = \min_{i \in \Omega} r_i, \quad d_\Omega = \max_{i \in \Omega} d_i, \quad e_\Omega = \sum_{i \in \Omega} e_i \quad (7)$$

本文约定: 如果集合  $\Omega$  为空, 则  $r_\Omega = \infty$ ,  $d_\Omega = -\infty$ ,  $e_\Omega = 0$ .

目前针对 CuSP 的约束传播算法主要基于 1994 年 Nuijten<sup>[4]</sup> 提出的如下定理:

定理 1. 记  $\Omega$  为  $A$  的一个子集, 工作  $i \notin \Omega$ . 如果

$$e_{\Omega \cup \{i\}} > C \times (d_\Omega - r_{\Omega \cup \{i\}}) \quad (8)$$

则  $\Omega$  中的全部工作在工作  $i$  结束前结束. 如果

$$e_{\Omega \cup \{i\}} > C \times (d_{\Omega \cup \{i\}} - r_\Omega) \quad (9)$$

则  $\Omega$  中的全部工作在工作  $i$  开始后开始.

文献 [17] 基于优先关系图提出了以下定理设计 CuSP 约束传播方法.

定理 2. 记  $P_i$  为工作  $i$  的前序工作集合, 则工作  $i$  的最早开始时间可以调整为  $r'_i$ :

$$r'_i = \max(r_i, r_{P_i} + \frac{1}{C} \sum_{j \in P_i} c_j \times p_j) \quad (10)$$

基于定理 1 的约束传播算法仅考虑各工作的可行时间区间, 而忽略了工作间的优先关系约束; 基于定理 2 的约束传播算法仅考虑指定工作的前序工作, 而忽略了非前序工作可能对约束传播产生的影响.

## 2 算法设计与时间复杂性分析

### 2.1 算法理论基础

定理 3. 记  $P_i$  为工作  $i$  的前序工作集合,  $\Theta \subseteq P_i$  为  $P_i$  的子集, 则工作  $i$  的最早开始时间可以调整为  $r'_i$ :

$$r'_i = \max \left\{ r_i, \max_{\Theta \subseteq P_i} \left[ r_\Theta + \frac{1}{C} \left( \sum_{j \in \Theta} c_j \times p_j + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_\Theta, r_i) \right) \right] \right\} \quad (11)$$

证明. 1) 显然  $r'_i \geq r_i$ .

2) 对  $\forall \Theta \subseteq P_i$ ,  $r_\Theta$  为集合  $\Theta$  的最早开始时间, 则在时间区间  $[r_\Theta, r_i]$  有两类工作必须完成: 一类是集合  $\Theta$  中的工作, 消耗能量为  $\sum_{j \in \Theta} c_j \times p_j$ ; 另一类为不属于集合  $P_i$ , 但有一部分工作必须在  $[r_\Theta, r_i]$  区间完成的工作, 消耗能量为  $\sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_\Theta, r_i)$ . 因此, 在  $[r_\Theta, r_i]$  区间必须消耗的能量为  $\sum_{j \in \Theta} c_j \times p_j + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_\Theta, r_i)$ , 即

$$r'_i \geq r_\Theta + \frac{1}{C} \left[ \sum_{j \in \Theta} c_j \times p_j + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_\Theta, r_i) \right] \quad (12)$$

3) 考虑  $P_i$  的全部子集  $\Theta$ , 综合式 (1) 和 (2), 得式 (11).  $\square$

定义 4. 记  $P_i$  为工作  $i$  的前序工作集合,  $\Theta \subseteq P_i$  为  $P_i$  的子集,  $R_\Theta = [r_1, r_2, \dots, r_{|\Theta|}]$  为  $\Theta$  中各工作的最早开始时间, 称基于  $R_\Theta$  应用定理 3 对工作  $i$  的最早开始时间进行调整为函数  $f(i, R_\Theta)$ , 即  $r'_i = f(i, R_\Theta)$ .

工作  $i$  的最晚完成时间  $d_i$  的调整可以用类似式 (11) 的计算方法反向进行.

基于定理 3 设计约束传播算法时需要针对每项工作  $i \in A$  列出  $P_i$  的全部子集. 随着问题规模的增大, 全部子集的数量呈指数函数增加. 为了降低算法的复杂性, 本文基于以下定理设计约束传播算法.

定理 4. 函数  $f(i, R_\Theta)$  是单调增的. 即对于  $\forall \Theta \subseteq P_i$ , 如果  $R_\Theta = [r_1, r_2, \dots, r_{|\Theta|}] \leq R'_\Theta = [r'_1, r'_2, \dots, r'_{|\Theta|}]$ , 则  $f(i, R_\Theta) \leq f(i, R'_\Theta)$ .

证明. 式 (11) 可以改写为

$$r'_i = \max \left\{ r_i, \max_{\Theta \subseteq P_i} \left[ r_\Theta + \frac{1}{C} \sum_{j \in \Theta} c_j \times p_j + \frac{1}{C} \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_\Theta, r_i) \right] \right\}$$

1) 对于  $\forall \Theta \subseteq P_i$ , 记  $r_\Theta = \min(r_1, r_2, \dots, r_{|\Theta|})$ ,  $r'_\Theta = \min(r'_1, r'_2, \dots, r'_{|\Theta|})$ , 则显然  $r'_\Theta \geq r_\Theta$ .

2) 对于  $R_\Theta$  和  $R'_\Theta$ , 由于  $\Theta$  包含的工作不变, 因此式 (11) 中  $\frac{1}{C} \sum_{j \in \Theta} c_j \times p_j$  的值不变.

3)  $r'_\Theta \geq r_\Theta$ , 分两种情况讨论:

a)  $r'_\Theta = r_\Theta$ , 则  $r_\Theta + \frac{1}{C} \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_\Theta, r_i) = r'_\Theta + \frac{1}{C} \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r'_\Theta, r_i)$ ;

b)  $r'_\Theta > r_\Theta$ , 记  $\delta = r'_\Theta - r_\Theta$ , 则由定义 1 和定义 2 有:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C} \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_\Theta, r_i) = \\ & \frac{1}{C} \left[ \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_\Theta, r'_\Theta) + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r'_\Theta, r_i) \right] \leq \\ & \frac{1}{C} \left[ \sum_{k \in A} E(k, r_\Theta, r'_\Theta) + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r'_\Theta, r_i) \right] \leq \\ & \frac{1}{C} \left[ C \times (r'_\Theta - r_\Theta) + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r'_\Theta, r_i) \right] = \\ & \delta + \frac{1}{C} \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r'_\Theta, r_i) \end{aligned}$$

于是:

$$r_{\Theta} + \frac{1}{C} \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_{\Theta}, r_i) \leq r_{\Theta} + \delta + \frac{1}{C} \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r'_{\Theta}, r_i) = r'_{\Theta} + \frac{1}{C} \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r'_{\Theta}, r_i)$$

结合第 2) 步, 有  $f(i, R_{\Theta}) \leq f(i, R'_{\Theta})$ , 即函数  $f(i, R_{\Theta})$  单调增.  $\square$

应用函数  $f(i, R_{\Theta})$  对集合  $A$  中的每项工作调整且调整一次称作一次约束传播过程. 定理 4 说明在一次约束传播过程中依据工作最早开始时间非减的顺序进行约束传播效果最好.

**定义 5.** 记  $r_i$  为工作  $i$  的最早开始时间,  $k \in P_i$  为工作  $i$  的一个前序工作,  $P_i$  的一个子集  $\Theta_k^i$  定义为  $\Theta_k^i = \{j | j \in P_i, r_j \geq r_k\}$ . 显然  $r_{\Theta_k^i} \leq r_i$ .

**定理 5.** 应用定理 3 对工作  $i$  的最早开始时间进行调整时只需考虑  $P_i$  的子集  $\Theta_k^i, k \in P_i$ .

**证明.** 对于  $\forall \Theta \subseteq P_i, \exists k \in \Theta$  满足  $r_k = r_{\Theta}$ , 因此  $\Theta \subseteq \Theta_k^i, r_{\Theta} = r_{\Theta_k^i}$ , 于是

$$\sum_{j \in \Theta} c_j \times p_j + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_{\Theta}, r_i) \leq \sum_{j \in \Theta_k^i} c_j \times p_j + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_{\Theta_k^i}, r_i)$$

因此,

$$r_{\Theta} + \frac{1}{C} \left[ \sum_{j \in \Theta} c_j \times p_j + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_{\Theta}, r_i) \right] \leq r_{\Theta_k^i} + \frac{1}{C} \left[ \sum_{j \in \Theta_k^i} c_j \times p_j + \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_{\Theta_k^i}, r_i) \right]$$

$\square$

## 2.2 算法流程及时间复杂性

基于定理 4 和定理 5, 本文提出如下算法. 不失一般性, 假设各工作按照最早开始时间非减的顺序排列, 即  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ , 则工作  $i$  的前序工作编号小于  $i$ . 记  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$  为  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  中  $k$  个不重复的时间值, 且按递增顺序排列. 则本文约束传播算法流程如下:

### 算法 1. CuSP 约束传播算法

**步骤 1.** 预计算各时间区间的能量需求值  $E(t_1, t_2)$ ,  $t_1, t_2 \in T$  且  $t_1 < t_2$ ;

**步骤 2.**

**For**  $i = 2, 3, \dots, n$

**For**  $k = i - 1, \dots, 1$

$E = e_{\Theta_k^i} + E(r_k, r_i) - \sum_{j \in \Theta_k^i} E(j, r_k, r_i)$ ;

$r'_i = \max\{r_i, r_k + E/C\}$

**EndFor**

**EndFor**

**步骤 3.** 更新  $r_i = r'_i, i = 2, 3, \dots, n$ .

以上算法中, 将  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  按照非减顺序排列的时间复杂性为  $O(n \log n)$ . 步骤 1 的时间复杂性为  $O(n^2)$ <sup>[3]</sup>. 在步骤 2 中,  $E$  可以采用增量计算方式, 时间复杂性为  $|P_i|$ , 因此, 步骤 2 的最坏时间复杂性为  $O(n^2 |P_{\max}|)$ , 其中  $|P_{\max}|$  为

各工作的最大前序工作数. 步骤 3 的时间复杂性为  $O(n)$ . 因此整个算法的时间复杂性为  $O(n^2 |P_{\max}|)$ .

相比其他算法, 文献 [6] 中 Edge-finder 和 Extended-edge-finder 算法的时间复杂性为  $O(n^2 k)$ , 其中  $k$  为全部工作对资源的不同需求数; 文献 [3] 中 Energetic-reasoning 算法的时间复杂性为  $O(n^3)$ ; 文献 [17] 中 Energy-precedence 算法的时间复杂性为  $O(n(|P_{\max}| + \log n))$ . 从理论上分析, 本文算法时间复杂性处于中间水平.

## 3 实验结果

### 3.1 实验设计

为了测试本文约束传播算法的时间效率和约减效果, 利用标准问题库 PSPLIB<sup>[18]</sup> 中 J32、J62 两组问题对算法进行测试. 两组问题根据项目的网络复杂性系数 NC (Network complexity)、资源因数系数 RF (Resource factor)、资源强度系数 RS (Resource strength) 的不同组合随机生成. 其中 NC 反映项目网络图中各工作间优先关系约束的松紧, RF 反映工作对资源需要的耦合程度, RF = 1 代表每项工作需要全部种类的资源, RS 反映资源的限制强度<sup>[19]</sup>.

两组问题分别包含 32 项和 62 项工作, 需要 4 种可更新资源 ( $K = 4$ ), 主要参数水平如表 1 所示. 对参数 NC、RF 和 RS 的 48 种不同组合, 每种组合随机生成 10 个问题实例. 因此, 每组包含  $3 \times 4 \times 4 \times 10 = 480$  个问题实例.

表 1 测试问题各种参数的组合

Table 1 Parameters setting of the benchmark problems

NC	RF	RS
{1.5, 1.8, 2.1}	{0.25, 0.5, 0.75, 1.0}	{0.2, 0.5, 0.7, 1.0}

在这 2 组问题中, J32 一组问题的最优解已经通过精确算法求得, J62 一组问题目前还无法获得全部最优解, 但是给出了经过许多研究者采用不同算法获得的最好解. 实验中设置每个测试问题的工期上界 UB 为已知最好解值的 1.05 倍.

实验中, 引用以下 4 种约束传播算法进行对比: Edge-finder(MH-EF)<sup>[6]</sup>、Extended-edge-finder(MH-EEF)<sup>[6]</sup>、Energetic-reasoning (BPN-ER)<sup>[3]</sup>、Energy-precedence (L-EP)<sup>[17]</sup>, 本文算法简称为 NewEF. 以上 5 种算法可以划分为 3 类: MH-EF 和 MH-EEF 属于一类, 基于工作区间的概念进行推理. MH-EEF 是 MH-EF 的扩展算法, 实现中将 MH-EF 作为预处理程序使用; BPN-ER 基于时间区间的概念进行推理, 单独属于一类; L-EP 和 NewEF 属于一类, 基于工作间优先关系和时间区间进行推理, 但 L-EP 在推理中忽略了非优先工作对工作可行执行区间可能产生的影响.

实验中应用以上 5 种算法, 按照资源编号  $k = 1, 2, 3, 4$  的顺序, 针对每种资源应用一次算法调整  $r_i$  和  $d_i$ , 然后对算法获得的约束传播结果进行统计. 统计数据项为应用以上 5 种算法对问题进行约束传播后, 可行执行区间被约减的工作数 num 以及每组问题实例中的全部工作时间窗口获得调整的百分比 avg:

avg =

$$\frac{1}{|S| \times (J - 2)} \sum_{p=1}^{|S|} \sum_{j=2}^{J-1} \frac{(d_j^p - r_j^p) - (d_j^{p'} - r_j^{p'})}{d_j^p - r_j^p} \times 100\% \quad (13)$$

其中,  $S$  为该项统计数据所涵盖的问题实例集合;  $J$  为每个问题实例所包含的工作数;  $d_j^p$  和  $r_j^p$  分别为实例  $p$  ( $p = 1, 2, \dots, |S|$ ) 中工作  $j$  调整前的最晚完成时间和最早开始时间;  $d_j^{p'}$  和  $r_j^{p'}$  分别为实例  $p$  中工作  $j$  调整后的最晚完成时间和最早开始时间.

### 3.2 实验结果与分析

总体统计结果如表 2 所示. 由表 2 可见: NewEF 算法在 num 和 avg 的总体指标上明显优于 MH-EF、MH-EEF 和 BPN-ER 算法, 较优于 L-EP 算法. 5 种算法约减效果的排列顺序是 NewEF、L-EP、BPN-ER、MH-EEF、MH-EF.

为了研究问题参数 NC、RF 和 RS 对各种约束传播算法约减效果的影响, 本文对以上算法获得的约减结果按照 NC、RF、RS 的不同设置进行统计, 统计结果如表 3~5 所示.

由表 3 可见: 问题参数 NC 对 MH-EF、MH-EEF 和 BPN-ER 算法有较小影响, 对 L-EP 和 NewEF 有很大影响. L-EP 和 NewEF 算法的约减效果随着 NC 系数的增大明显增强. 分析原因如下: MH-EF、MH-EEF、BPN-ER 算法在进行约束传播前将工作间的优先关系约束简化为工作可行时间  $[r_i, d_i]$  约束, 在约束传播过程仅考虑各工作的可行时间区间而不再考虑工作间的优先关系约束, 因此受 NC 影响较小. 而 L-EP 和 NewEF 算法刚好基于工作间的优先关系和时间区间进行推理, 因此随着问题参数 NC 的增大约减效果明显

增强.

由表 4 可见: 问题参数 RF 对 MH-EF、MH-EEF 和 BPN-ER 算法约减效果影响较小, 而对 L-EP 和 NewEF 算法约减效果影响很大. 分析原因如下: RF 增大代表工作对资源需求的耦合程度加强. 但 MH-EF、MH-EEF 和 BPN-ER 三种约束传播算法都是根据工作区间或时间区间内工作对单种资源消耗量为推理计算依据, 而不考虑多种资源约束的耦合因素. 因此, 受 RF 影响较小. 而 L-EP 和 NewEF 在推理过程中充分考虑工作间的优先关系约束, RF 增大会进一步加强工作间相互关系约束. 因此, L-EP 和 NewEF 算法的约束传播效果随着 RF 增大而显著变好.

由表 5 可见: 问题参数 RS 对 MH-EF、MH-EEF 和 BPN-ER 算法约减效果影响较小, 而对 L-EP 和 NewEF 算法约减效果影响很大. L-EP 和 NewEF 算法的约减效果随着 RS 的增大明显减弱. 分析原因如下: RS 反映项目资源的限制强度, RS 越小意味着资源约束越强. 但较大的工作可行时间区间会消弱资源的约束强度, 因此由统计结果看不出 RS 对 MH-EF、MH-EEF 和 BPN-ER 算法约减效果的显著影响. L-EP 和 NewEF 算法在约束传播过程中充分考虑工作间的优先关系约束, 约束传播如式 (11) 所示, RS 增大意味着可用资源量  $C$  变大, 式 (11) 中  $\frac{1}{C} \sum_{j \in \Theta} c_j \times p_j$  和  $\frac{1}{C} \sum_{k \in A \setminus P_i} E(k, r_{\Theta}, r_i)$  的值都会变小. 因此, L-EP 和 NewEF 的约减效果随着 RS 的增大明显减弱.

表 2 总体测试结果  
Table 2 The summary of experimental results

Set	MH-EF		MH-EEF		BPN-ER		L-EP		NewEF	
	num	avg	num	avg	num	avg	num	avg	num	avg
J32	5	0.003	41	0.063	110	0.059	421	0.275	433	0.282
J62	0	0.000	31	0.030	65	0.029	679	0.762	691	0.782

表 3 问题参数 NC 对算法约减效果的影响  
Table 3 The impact of NC on the performance of algorithms

Set	NC	MH-EF		MH-EEF		BPN-ER		L-EP		NewEF	
		num	avg	num	avg	num	avg	num	avg	num	avg
J32	1.5	1	9.1E-4	13	0.040	27	0.033	37	0.081	40	0.084
	1.8	4	0.009	15	0.059	42	0.074	140	0.341	142	0.347
	2.1	0	0.000	13	0.090	41	0.070	244	0.403	251	0.415
J62	1.5	0	0.000	7	0.011	15	0.020	72	0.312	76	0.328
	1.8	0	0.000	12	0.046	22	0.030	209	0.693	213	0.720
	2.1	0	0.000	12	0.033	28	0.035	398	1.282	402	1.298

表 4 问题参数 RF 对算法约减效果的影响  
Table 4 The impact of RF on the performance of algorithms

Set	RF	MH-EF		MH-EEF		BPN-ER		L-EP		NewEF	
		num	avg	num	avg	num	avg	num	avg	num	avg
J32	0.25	5	0.013	26	0.137	51	0.106	5	0.008	8	0.014
	0.5	0	0.000	12	0.109	32	0.071	34	0.047	35	0.049
	0.75	0	0.000	3	0.006	24	0.056	146	0.333	148	0.337
	1.0	0	0.000	0	0.000	3	0.002	236	0.711	242	0.728
J62	0.25	0	0.000	28	0.108	42	0.081	0	0.000	3	0.003
	0.5	0	0.000	0	0.000	15	0.020	39	0.102	40	0.111
	0.75	0	0.000	1	0.003	8	0.014	198	0.805	204	0.839
	1.0	0	0.000	2	0.008	0	0.000	442	2.141	444	2.175

综合分析表 3~5 的统计数据可以得出以下结论: L-EP 和 NewEF 算法在网络复杂性系数 NC 较大、资源因数系数 RF 较大、资源强度系数 RS 较小时具有较好的约减效果. 因此, 适合应用于具有以上参数配置特点的累积调度问题中.

以上实验结果表明 BPN-ER 和 NewEF 是求解效果较好的两种算法. 作者在实验中进一步同时应用这两种算法对问题进行求解实验, 实验中首先运行一次 BPN-ER 算法, 然后运行一次 NewEF 算法. 统计结果如表 6 所示. 综合表 6 和表 2 可以得出以下结论: 1) BPN-ER 和 NewEF 在进行约束推理过程中可以实现互补. 在表 2 中, 针对 J32 (J62) 一组测试问题, BPN-ER 和 NewEF 总共对 543 (756) 项工作的可行区间进行了约减, 而表 6 表明 BPN-ER+NewEF 混合算法总共对 544 (757) 项工作的可行区间进行了约减, 由此可见两种算法的互补作用; 2) NC、RF、RS 对 BPN-ER+NewEF 混合算法推理效果的影响与这些参数对 NewEF 算法的影响趋势一致, 原因是主要推理结果由 NewEF 算法得到.

约束传播算法在使用中往往是个循环过程. 如果在约束传播算法的一次运行中问题解空间获得约减, 则针对约减后的问题再次应用约束传播算法, 循环以上过程直到没有新的约减产生. 实验中, 本文进一步设计了完整的 BPN-ER 和 NewEF 混合算法, 流程如下:

**算法 2. 混合算法流程**

初始化: adjusted = false;

**DO**

{adjusted = false;

**For** 每种资源  $r \in R$

{执行 BPN-ER 约束传播算法, 如果某工作可行区间获得约减, 置 adjusted = true;  
 执行 NewEF 约束传播算法, 如果某工作可行区间获得约减, 置 adjusted = true;  
 如果 adjusted = true, 基于时间约束网络进行约束传播;

**While**(adjusted).

执行以上混合算法获得的实验结果如表 7 所示. 统计结果表明混合约束传播算法运行效果明显改进.

**3.3 约束传播算法在求解 RCPSP 中的具体应用**

选用文献 [20] 中的数学模型求解 PSPLIB 中的实例 J309.2. SM 说明本文约束传播算法在累积调度问题求解算法中的应用. 考虑到篇幅的限制, 这里不描述该数学模型, 仅对约束传播算法在模型处理过程中的应用过程加以描述.

文献 [20] 中的数学模型包含两类变量: 1) 各工作的开始时间  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ; 2) 表示工作间优先关系的 0-1 变量  $y_{ij}$ , 如果工作  $i$  优先 (或传递优先) 于工作  $j$  执行, 则  $y_{ij} = 1$ , 否则  $y_{ij} = 0$ . 记  $r'_i$  和  $d'_i$  分别为应用本文约束传播算法调整后工作  $i$  的最早开始时间和最晚完成时间,  $(i, j) \in H^*$  代表工作  $i$  直接 (或传递) 优先于工作  $j$  执行, UB 为项目工期底线, 则可以采用以下过程应用约束传播结果预处理模型的变量和约束.

**算法 3. 基于约束传播的模型预处理**

**步骤 1.** 根据约束传播结果重新确定变量  $t_1, t_2, \dots, t_n$  的上下界,  $r'_i \leq t_i \leq d'_i - p_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

表 5 问题参数 RS 对算法约减效果的影响

Table 5 The impact of RS on the performance of algorithms

Set	RS	MH-EF		MH-EEF		BPN-ER		L-EP		NewEF	
		num	avg	num	avg	num	avg	num	avg	num	avg
J32	0.2	4	0.012	10	0.063	16	0.040	417	1.097	420	1.109
	0.5	0	0.000	8	0.029	39	0.075	4	0.004	12	0.018
	0.7	1	0.001	10	0.069	38	0.089	0	0.000	1	0.001
	1.0	0	0.000	13	0.091	17	0.030	0	0.000	0	0.000
J62	0.2	0	0.000	16	0.059	25	0.044	678	3.048	687	3.123
	0.5	0	0.000	12	0.054	25	0.043	1	9.9E-4	4	0.006
	0.7	0	0.000	3	0.007	12	0.024	0	0.000	0	0.000
	1.0	0	0.000	0	0.000	3	0.003	0	0.000	0	0.000

表 6 问题参数对 BPN-ER + NewEF 一次运行约减效果的影响

Table 6 The impacts of NC, RF and RS on the performance of one running of BPN-ER + NewEF

Set	NC	BPN-ER + NewEF		RF	BPN-ER + NewEF		RS	BPN-ER + NewEF	
		num	avg		num	avg		num	avg
J32	1.5	68	0.117	0.25	59	0.123	0.2	436	1.152
	1.8	184	0.423	0.5	68	0.121	0.5	51	0.093
	2.1	292	0.484	0.75	172	0.392	0.7	40	0.091
				1.0	245	0.730	1.0	17	0.030
J62	1.5	91	0.350	0.25	46	0.087	0.2	713	3.169
	1.8	236	0.752	0.5	55	0.132	0.5	29	0.051
	2.1	430	1.334	0.75	212	0.853	0.7	12	0.024
				1.0	444	2.175	1.0	3	0.003

步骤 2. 预处理变量  $y_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ .

1) 对  $\forall(i, j) \notin H^*$ , 如果  $r'_i + p_i + p_j > d'_j$ , 则在任何目标函数值小于等于 UB 的可行解中  $y_{ij} = 0$ . 如果  $(i, j)$  构成不兼容工作对<sup>[20]</sup>, 则  $y_{ji} = 1$ .

2) 对  $\forall(i, j) \in H^*$ , 如果在项目网络图中添加优先关系弧  $(i, j)$  后网络图的关键路径长度大于 UB, 则在任何目标函数值小于等于 UB 的可行解中  $y_{ij} = 0$ . 如果  $(i, j)$  构成不兼容工作对, 则  $y_{ji} = 1$ .

3) 对  $\forall(i, j) \notin H^*$ , 如果在项目网络图中添加优先关系弧  $(i, j)$  后问题不存在能量可行解, 则在任何目标函数值小于等于 UB 的可行解中  $y_{ij} = 0$ . 如果  $(i, j)$  构成不兼容工作对, 则  $y_{ji} = 1$ .

应用算法 3 过程对模型进行预处理, 可以起到两方面的作用: 1) 直接确定一些不兼容工作对中工作的优先顺序, 从而减少原文模型约束式 (2.4) 对应的约束数量<sup>[20]</sup>; 2) 确定一些变量的取值, 降低模型的规模.

以下以实例 J309.2.SM 的求解过程为例, 说明算法 3 过程的作用. 实例 J309.2.SM 中包含着 142 对不兼容工作, 96 个最小不兼容工作集合, 原始模型中包含 1024 个变量, 其中 992 个为 0-1 变量, 31486 个约束. 实验中应用 cplex 11.2 对模型求解 2 次, 第 1 次直接对原始模型进行求解, 记为 R-I; 第 2 次应用算法 3 过程对模型进行预处理后再求解, 记为 R-II. 实验中发现两个求解过程体现出以下不同.

1)  $t_i, i = 1, \dots, n$  上下界不同. 应用 NewEF 算法前后各工作的  $r_i, d_i, r'_i, d'_i$  值如表 8 所示;

2) 应用算法 3 过程可以直接确定 47 对不兼容工作的优先顺序, 减少 94 个 0-1 变量, 47 个原模型约束式 (2.4) 对应的约束;

3) 通过 cplex 11.2 对 2 个模型进行求解, 求解过程中体现的差别如表 9 所示.

表 9 数据表明, 将本文约束传播算法 NewEF 的推理结果应用到数学模型的预处理过程中, 可以明显改进算法的运行性能.

### 4 结论

约束传播是求解调度问题的一种有效手段, 已经在求解车间调度等 DSP 中获得广泛成功. 相比而言, 针对 CuSP 的约束传播理论及应用研究更加困难, 成果较少. 本文针对 CuSP 提出一种结合工作间优先关系约束和工作 [最早开始时间, 最晚完成时间] 区间约束的约束传播算法. 根据实验结果, 可以得出以下结论:

1) 针对测试问题, 本文提出的约束传播算法在总体约减效果上优于现有约束传播算法;

2) 新算法在进行约束传播过程中可以与 BPN-ER 算法实现互补, 两者结合效果更好;

3) 新算法在 RF 较大、RS 较小时表现出很好的约束传

表 7 问题参数对混合算法约减效果的影响

Table 7 The impacts of NC, RF and RS on the performance of hybrid algorithm

Set	NC	Hybrid algorithm		RF	Hybrid algorithm		RS	Hybrid algorithm	
		num	avg		num	avg		num	avg
J32	1.5	106	0.447	0.25	137	1.000	0.2	524	1.759
	1.8	271	0.997	0.5	141	0.766	0.5	138	0.943
	2.1	404	1.106	0.75	229	0.832	0.7	86	0.464
					1.0	274	0.802	1.0	33
J62	1.5	125	0.623	0.25	196	1.058	0.2	822	3.740
	1.8	331	1.155	0.5	126	0.654	0.5	144	0.997
	2.1	587	2.022	0.75	260	1.108	0.7	73	0.319
					1.0	461	2.248	1.0	4

表 8 问题实例 J309.2.SM 中各工作的  $r_i, d_i, r'_i, d'_i$  值

Table 8 The values of  $r_i, d_i, r'_i, d'_i$  in instance J309.2.SM

$i$	$r_i$	$d_i$	$r'_i$	$d'_i$	$i$	$r_i$	$d_i$	$r'_i$	$d'_i$	$i$	$r_i$	$d_i$	$r'_i$	$d'_i$
1	0	49	0	30	12	12	65	19	59	23	32	89	39	89
2	0	78	7	77	13	16	69	23	69	24	26	86	33	86
3	0	76	0	37	14	20	75	27	75	25	34	90	41	90
4	0	56	7	48	15	26	81	33	81	26	40	90	47	90
5	7	60	14	52	16	16	75	23	75	27	32	86	39	86
6	7	67	16	67	17	16	84	23	84	28	8	86	16	86
7	11	61	18	53	18	7	86	7	86	29	41	94	49	94
8	7	80	7	80	19	26	86	33	86	30	14	94	22	94
9	17	73	26	73	20	25	84	34	84	31	33	94	40	94
10	23	75	32	75	21	11	86	18	86	32	45	94	53	94
11	7	85	7	50	22	34	90	43	90					

播效果, 这对基于该方法求解 RCPSP 具有较大的潜力.

表 9 有无算法 3 过程算法求解效果的差别  
Table 9 The comparison of performances of two runs

	R-I	R-II
获得第 1 个可行解时搜索的节点数	4945	0
获得第 1 个可行解时算法运行的时间 (s)	413.18	15.87
获得第 1 个可行解的目标函数值	94	94
获得最优解时搜索的节点数	80924	939
获得最优解时算法运行的时间	4854.95	57.52
获得最优解的目标函数值	92	92

### References

- 1 Carlier J, Pinson E. An algorithm for solving the job shop problem. *Management Science*, 1989, **35**(2): 164–176
- 2 Muth J F, Thompson G L. *Industrial Scheduling*. New Jersey: Prentice-Hall, 1963
- 3 Baptiste P, Le Pape C, Nuijten W. *Constraint Based Scheduling*. Amsterdam: Kluwer, 2001
- 4 Nuijten W. Time and Resource Constrained Scheduling: A Constraint Satisfaction Approach [Ph.D. dissertation], Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Netherlands, 1994
- 5 Mercier L, Hentenryck P V. Strong polynomiality of resource constraint propagation. *Discrete Optimization*, 2007, **4**(3-4): 288–314
- 6 Mercier L, Hentenryck P V. Edge finding for cumulative scheduling. *Inform Journal on Computing*, 2008, **20**(1): 143–153
- 7 Tercinet F, Neron E, Lente C. Energetic reasoning and bin-packing problem, for bounding a parallel machine scheduling problem. *4OR: A Quarterly Journal of Operations Research*, 2006, **4**(4): 297–317
- 8 Carlier J, Pinson E. Adjustments of heads and tails for the job shop problem. *European Journal of Operational Research*, 1994, **78**(2): 146–161
- 9 Clautiaux F, Jouglet A, Carlier J, Moukrim A. A new constraint programming approach for the orthogonal packing problem. *Computers and Operations Research*, 2008, **35**(3): 944–959
- 10 Brucker P, Jurisch B, Kramer A. The job shop problem and immediate selection. *Annals of Operations Research*, 1994, **50**(1): 73–114
- 11 Torres P, Lopez P. On not-first/not-last conditions in disjunctive scheduling. *European Journal of Operational Research*, 2000, **127**(2): 332–343
- 12 Guo Dong-Fen, Li Tie-Ke. Constraint-based algorithm for job shop scheduling. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2007, **13**(1): 117–125  
(郭冬芬, 李铁克. 基于约束满足的车间调度算法综述. 计算机集成制造系统, 2007, **13**(1): 117–125)
- 13 Feng Xin, Tang Li-Xin, Wang Meng-Guang. Dynamic enhanced CPT for the job-shop scheduling constraint satisfaction optimization problem. *Journal of Systems Engineering*, 2006, **21**(6): 583–590  
(冯欣, 唐立新, 王梦光. 动态加强 CPT 解 job-shop 调度约束满足优化问题. 系统工程学报, 2006, **21**(6): 583–590)
- 14 Dechter R, Meiri I, Pearl J. Temporal constraint networks. *Artificial Intelligence*, 1991, **49**(1-3): 61–95
- 15 Dorndorf U, Pesch E, Phan-Huy T. Constraint propagation techniques for the disjunctive scheduling problem. *Artificial Intelligence*, 2000, **122**(1-2): 189–240
- 16 Baptiste P, Le Pape C, Nuijten W. Satisfiability tests and time-bound adjustments for cumulative scheduling problems. *Annals of Operations Research*, 1999, **92**(1): 305–333
- 17 Laborie P. Algorithms for propagating resource constraints in A.I. planning and scheduling: existing approaches and new results. *Artificial Intelligence*, 2003, **143**(2): 151–188
- 18 Kolisch R, Sprecher A. PSPLIB — A project scheduling problem library. *European Journal of the Operational Research*, 1997, **96**(1): 205–216
- 19 Kolisch R, Sprecher A, Drexel A. Characterization and generation of a general class of resource-constrained project scheduling problem. *Management Science*, 1995, **41**(10): 1693–1703
- 20 Alvarez-Valdes R, Tamarit J M. The project scheduling polyhedron: dimension, facets and lifting theorems. *European Journal of Operational Research*, 1993, **67**(2): 204–220

刘士新 东北大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为生产调度, 物流与供应链管理, 组合最优化. 本文通信作者.

E-mail: sxliu@mail.neu.edu.cn

(LIU Shi-Xin Professor at the School of Information Science and Engineering, Northeastern University. His research interest covers production scheduling, logistics and supply chain management, and combinational optimization. Corresponding author of this paper.)

郭哲 东北大学信息科学与工程学院讲师. 主要研究方向为智能优化建模, 电子商务, 产品定价. E-mail: guozhe@ise.neu.edu.cn

(GUO Zhe Lecturer at the School of Information Science and Engineering, Northeastern University. His research interest covers intelligent optimization modeling, electronic commerce, and production pricing.)

唐加福 东北大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为供应链与物流管理, 工程产品设计与生产, 商业与服务系统运作管理.

E-mail: jftang@mail.neu.edu.cn

(TANG Jia-Fu Professor at the School of Information Science and Engineering, Northeastern University. His research interest covers supply chain and logistics management, project product design and management, operation management of commerce and service systems.)