

基于 BMI 方法的扇形极点配置 输出反馈控制

王远钢¹

摘要 研究一类线性系统在有界静态输出反馈下的区域极点配置问题, 给出了问题可解的双线性矩阵不等式 (Bilinear matrix inequality, BMI) 条件. 利用摄动线性化方法给出了求解期望输出反馈的迭代线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 算法, 并用算例说明了所提算法的有效性.

关键词 输出反馈, 极点配置, 双线性矩阵不等式, 摄动线性化, 迭代 LMI 算法

中图分类号 TP13

BMI-based Output Feedback Control Design with Sector Pole Assignment

WANG Yuan-Gang¹

Abstract Regional pole assignment is studied for a class of linear systems via bounded static output-feedback. The solvability of the problem is formulated via an optimization problem subject to a set of bilinear matrix inequalities (BMIs). Then, based on perturbation linearization of the BMIs, an iterative linear matrix inequality (LMI) algorithm is proposed to search for the satisfactory output feedback. The effectiveness of the provided algorithm is finally illustrated by two numerical examples.

Key words Output-feedback, pole assignment, bilinear matrix inequality (BMI), perturbation linearization, iterative LMI algorithm

静态输出反馈是工程控制中很重要的一种控制形式, 具有易于物理实现但难以求解的特点, 一直是控制理论界的一个热点^[1], 其根本原因是这种控制问题本质上是双线性矩阵不等式 (Bilinear matrix inequality, BMI) 可行解问题^[2], 且是 NP-hard 的^[3], 即没有多项式时间算法求解相应全局极小值.

有关静态输出反馈控制问题的研究可分为两大类. 一类将反馈增益作为间接变量, 如基于 Riccati 方程方法^[4-5], 基于直接线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 方法^[6-7]. 另一类则将反馈增益作为直接变量, 如基于 BMI 方法^[2, 8]; 基于 LMI 的遗传算法^[9], 该文设计反馈增益的算法实际上是基于 BMI 的, 只是在利用遗传算法选择反馈增益矩阵 K 后相应 BMI 退化 LMI; 基于多项式矩阵不等式方法^[10]. 第一类方法当反馈增益矩阵受限 (如矩阵元素有界) 时无法使用; 而当系统有多个性能指标约束时, 即使对反馈增益矩阵无限制条件, 第一类方法中文献 [4] 在构造修正 Riccati 方程时也会带来较强的保守性, 可能使得到的带不等式约束的修正 Riccati 方程无解; 第二类方法中基于 BMI 方

法的困难在于 BMI 问题的求解, 目前关于 BMI 问题的求解方法有局部性^[2, 8]; 也有全局性的^[11-12], 但其运算量往往会随着决策变量维数的增加而指数增加, 文献 [9-10] 所给求解反馈增益算法的运算量亦如此.

本文研究一类连续定常系统在有界静态输出反馈下的扇形区域极点配置问题, 其中反馈增益矩阵的元素具有指定界. 先给出了问题可解的一种 BMI 描述, 再用摄动线性化方法^[8]迭代计算输出反馈增益的摄动量, 不断减小附加变量 t 的值来求得期望的输出反馈增益.

文中 I 表示适维单位矩阵, $P > 0$ 表示 P 是实对称正定矩阵.

1 问题的描述

设有如下线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (1b)$$

其中 $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量, $\mathbf{y}$ 为 m 维测量向量, $\mathbf{u}$ 为 q 维控制输入, $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 为适维常数矩阵.

要设计输出反馈控制

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{K} \in \mathcal{K} \quad (2)$$

使得相应闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

的极点位于如图 1 所示扇形开区域 $S(\alpha, \theta, r)$ 内. 式 (2) 中 $\mathcal{K}$ 是给定的有界矩阵集, 通常由控制器件的物理特性确定.

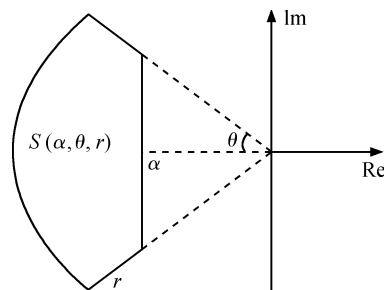


图 1 扇形极点区域 $S(\alpha, \theta, r)$

Fig. 1 Sector pole region $S(\alpha, \theta, r)$

闭环系统所有极点位于图 1 所示的这种期望区域内可以确保系统具有期望的快速衰减性和过渡过程品质.

所研究的问题要有意义, 以下假设是必需的.

假设 1. 矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 可稳, $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ 可检测.

2 极点区 $S(\alpha, \theta, r)$ 输出反馈增益求解

文献 [2] 中关于区域 $S(\alpha, \theta, r)$ 输出反馈可配置的相关描述稍作变动可得如下引理.

引理 1. 闭环系统 (3) 的所有极点位于区域 $S(\alpha, \theta, r)$ 内, 当且仅当存在正定矩阵 P_1, P_2, P_3 , 使得以下 BMIs 成立

$$H_1(P_1, K) = P_1 A_K + A_K^T P_1 + 2\alpha P_1 < 0 \quad (4)$$

$$H_2(P_2, K) = \begin{bmatrix} -rP_2 & * \\ P_2 A_K & -rP_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

收稿日期 2006-10-16 收修稿日期 2008-06-26
Received October 16, 2006; in revised form June 26, 2008
国家自然科学基金 (60174028) 和南京理工大学科技发展基金资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60174028) and Science Development Fund of Nanjing University of Science and Technology
1. 南京理工大学理学院 南京 210094
1. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01192

$$H_3(P_3, K) = \begin{bmatrix} \tan\theta[P_3 A_K + A_K^T P_3] & * \\ A_K^T P_3 - P_3 A_K & (1,1) \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

式中 $A_K = A + BKC$, “*” 表示对称部分, (1,1) 表示所在块与 (1,1) 块相同 (后文亦如此).

显然, 对任一给定反馈增益矩阵 K , 不等式组 (4)~(6) 退化为矩阵变量 P_1, P_2, P_3 的 LMIs, 但未必有正定解 P_1, P_2, P_3 .

为此, 在不等式组 (4)~(6) 的右端增加一个松弛变量 t , 并考虑如下 BMI 约束优化问题.

问题 1. $\bar{t} = \inf t: t, K, P_1, P_2, P_3$ 满足 $K \in \mathcal{K}$ 及

$$H_i(P_i, K) < tI, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

$$P_i > I, \quad i = 1, 2, 3, \quad t > -\varepsilon_1 \quad (8)$$

式中 ε_1 是任意小正数.

定理 1. 存在输出反馈 $K \in \mathcal{K}$, 使闭环系统 (3) 的所有极点位于 $S(\alpha, \theta, r)$ 内的充要条件是 BMI 约束优化问题 1 的下确界 $\bar{t} < 0$.

证明. 由引理 1 即得充分性, 下面证明必要性. 假设存在 $K_0 \in \mathcal{K}$, 使得闭环系统 (3) 的所有极点位于 $S(\alpha, \theta, r)$ 内, 则由引理 1 知, 存在正定矩阵 P_i ($i = 1, 2, 3$), 使得

$$H_i(P_i, K_0) = -Q_i < 0, \quad i = 1, 2, 3$$

因而任取 $t_0 > -\varepsilon_1$, 再取充分大正数 λ_i ($i = 1, 2, 3$), 使得

$$\lambda_i P_i > I, \quad -\lambda_i Q_i < -\varepsilon_1 I, \quad i = 1, 2, 3$$

则 $(t_0, K_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \lambda_3 P_3)$ 必是 BMIs (7)~(8) 的可行解. 由 t_0 的任意性, 得 $\bar{t} = -\varepsilon_1$, 自然有 $\bar{t} < 0$. $\square$

问题 1 中的不等式组 (7) 关于 K, P_i ($i = 1, 2, 3$) 是双线性的, 因而问题 1 不易直接求解. 而对固定的反馈 K , (7) 退化为 LMI. 为此, 先用 LMI 约束优化问题的极小值, 定义 $\mathcal{K}$ 内的一个函数 $t(K)$ 如下.

对任意 $K \in \mathcal{K}$, 定义

$$t(K) = \min t: t, P_1, P_2, P_3 \text{ 满足 LMIs (7) ~ (8)}$$

再考虑函数 $t(K)$ 的下确界问题.

问题 2. $t^* = \inf_{K \in \mathcal{K}} t(K)$.

问题 2 本质上仍是 BMI 约束优化问题, 只是形式上与问题 1 有些不同.

注 1. 与目前用 BMI 约束优化问题描述输出反馈控制问题可解性不同的是, 为了设计求解反馈增益的算法, 本文在 BMI 约束优化问题 1 和问题 2 中增加了对附加变量 t 及矩阵变量 P_i ($i = 1, 2, 3$) 的下界要求, 理由见注 2 和注 3.

定理 2. 假设系统 (1) 存在输出反馈 $K \in \mathcal{K}$, 将闭环系统 (3) 的极点配置于区域 $S(\alpha, \theta, r)$ 内, 则优化问题 1 和问题 2 的下确界相同, 即 $\bar{t} = t^*$.

证明. 由定理 1 的证明知, 假若 $K_0 \in \mathcal{K}$ 满足区域极点配置要求, 则有 $\bar{t} = -\varepsilon_1$, 而且 $t(K_0) = -\varepsilon_1$, 所以 $t^* = -\varepsilon_1$, 进而 $\bar{t} = t^*$. $\square$

由定理 2 的证明即得如下推论.

推论 1. 输出反馈增益 $K_0 \in \mathcal{K}$ 使闭环系统 (3) 的极点位于区域 $S(\alpha, \theta, r)$ 内的充分必要条件是 $t(K_0) < 0$.

值得注意的是: 通过求极小值的方式求解问题 2 时, 可能会遇到函数 $t(K)$ 的正的局部极小值点 K , 而且这样的极小值点可能会有多个.

注 2. 定义函数 $t(K)$ 的不等式中, 若删去 $t > -\varepsilon_1$, 则当反馈增益 $K_0 \in \mathcal{K}$, 使得闭环系统 (3) 的极点位于 $S(\alpha, \theta, r)$ 内时, 由定理 1 的证明知, $t(K_0) = -\infty$.

注 3. 定义函数 $t(K)$ 的不等式中, 若 $P_i > I$ 用 P_i ($i = 1, 2, 3$) 正定来代替, 则替换后的函数 (记为 $\tilde{t}(K)$) 在 $\mathcal{K}$ 内只可能取两个值: 0 或 $-\varepsilon_1$, 从而导致后文相应算法 1 从使 $t(K_0) \geq 0$ 的任一反馈增益 $K_0 \in \mathcal{K}$ 开始的迭代在第二次执行到步骤 5 时, 因 $|t_1 - t_2| < \varepsilon_2$ 而提前结束, 但得不到期望的反馈增益, 即使在 K_0 附近有满足条件的反馈增益也是如此.

事实上, 假设对某 $K_0 \in \mathcal{K}$, 函数值 $t_0 = t(K_0) > 0$, 则由 t_0 的定义知存在矩阵 P_1, P_2, P_3 满足

$$H_i(P_i, K_0) \leq t_0 I, \quad P_i \geq I, \quad i = 1, 2, 3$$

故对充分小的数 $\lambda_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$), 有

$$H_i(\lambda_i P_i, K_0) \leq \lambda_i t_0 I, \quad \lambda_i P_i > 0, \quad i = 1, 2, 3$$

因而 $P_i > I$ 用 $P_i > 0$ 替换后相应的函数值 $\tilde{t}(K_0) = 0$.

若函数值 $t(K_0) < 0$, 则由定理 1 的证明知, $t(K_0) = -\varepsilon_1$, 进而有 $\tilde{t}(K_0) = -\varepsilon_1$, 即 $\tilde{t}(K)$ 在 $\mathcal{K}$ 内只可能取两个值: 0 或 $-\varepsilon_1$.

下面借用文献 [8] 中求解 BMI 问题的摄动线性化方法, 来设计求解满足区域极点要求的输出反馈增益算法. 基本思想是: 先将 BMIs $H_i(P_i, K) < tI$ ($i = 1, 2, 3$) 关于矩阵变量 K, P_i ($i = 1, 2, 3$) 摄动线性化, 再在摄动范围内求解 K, P_i ($i = 1, 2, 3$) 的摄动量, 使新反馈增益 K 相应的函数值 $t(K)$ 减小, 直至 $t(K) < 0$, 或者 $t(K)$ 的值减小甚微结束.

先以 $H_1(P_1, K) < tI$ 为例, 说明 BMI 的摄动线性近似. 设 $\delta P_1, \delta K$ 分别是 P_1, K 的小摄动, 将 $H_1(P_1, K) < tI$ 中的 P_1, K 分别用 $P_1 + \delta P_1, K + \delta K$ 替换, 略去 δP_1 与 δK 的乘积项, 得关于 $\delta P_1, \delta K, t$ 的如下近似 LMI

$$[(P_1 + \delta P_1)(A_K + \alpha I) + P_1 B \delta K C] + [*]^T < tI$$

式中 $[*]^T$ 表示前一项 $[*]$ 的转置.

类似地, 可给出 $H_i(P_i, K) < tI$ ($i = 2, 3$) 关于 $\delta P_i, \delta K, t$ 的摄动线性 LMIs.

算法 1. 区域极点 $S(\alpha, \theta, r)$ 输出反馈增益求解算法

步骤 1. 令 $j = 1$, 任取初始反馈增益 $K^{(j)} \in \mathcal{K}$.

步骤 2. 求函数值 $t(K^{(j)})$, 即令 $A_j = A + BK^{(j)}C$, 解如下 LMI 约束极小值问题

$$t(j) = \min t: t, P_1, P_2, P_3 \text{ 满足}$$

$$P_1(A_j + \alpha I) + (A_j + \alpha I)^T P_1 < tI$$

$$\begin{bmatrix} -rP_2 - tI & * \\ P_2 A_j & -rP_2 - tI \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \tan\theta[P_3 A_j + A_j^T P_3] - tI & * \\ A_j^T P_3 - P_3 A_j & (1,1) \end{bmatrix} < 0$$

$$t > -\varepsilon_1, P_i > I, i = 1, 2, 3$$

式中 ε_1 是小正数 (由定理 1 的证明知 ε_1 可任意取).

若 $t(j) < 0$, 结束迭代, 此时 $K^{(j)}$ 是一个将系统极点配置于区域 $S(\alpha, \theta, r)$ 内的输出反馈增益; 否则, 记相应极小点为 $P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}$.

步骤 3. 令 $K = K^{(j)} + \delta K$, $P_i = P_i^{(j)} + \delta P_i$, 解 $H_i(P_i, K) < tI$ 关于 $P_i^{(j)}$, $K^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3$) 的摄动线性化极小值问题

$$\min t : t, \delta P_1, \delta P_2, \delta P_3, \delta K \text{ 满足 } t > -\varepsilon_1$$

$$\begin{aligned} & [(P_1^{(j)} + \delta P_1)(A_j + \alpha I)^T + P_1^{(j)} B \delta K C] + [*]^T < tI \\ & \begin{bmatrix} -r(P_2^{(j)} + \delta P_2) - tI & * \\ (P_2^{(j)} + \delta P_2)A_j + P_2^{(j)} B \delta K C & (1, 1) \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \Psi_{11} - tI & * \\ \Psi_{21} & \Psi_{11} - tI \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$-\tau_i P_i^{(j)} < \delta P_i < \tau_i P_i^{(j)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (10)$$

$$(\delta K)^T \delta K < \tau^2 I, \quad K^{(j)} + \delta K \in \mathcal{K} \quad (11)$$

式 (9) 中,

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \tan \theta \{[(P_3^{(j)} + \delta P_3)A_j + P_3^{(j)} B \delta K C] + [*]^T\} \\ \psi_{21} &= A_j^T (P_3^{(j)} + \delta P_3) - (P_3^{(j)} + \delta P_3)A_j + \\ & (\delta K C)^T B^T P_3^j - P_3^j B \delta K C \end{aligned}$$

式 (10)~(11) 中, τ, τ_i ($i = 1, 2, 3$) 为摄动幅度.

记相应极小点为 δK_{j+1} .

步骤 4. 令 $j = j + 1$, $K^{(j)} = K^{(j-1)} + \delta K_j$, $A_j = A_{j-1} + B \delta K_j C$, 返回步骤 2.

步骤 5. 若 $|t(j-1) - t(j)| \leq \varepsilon_2$, 或者 $j = J$ (J 为迭代次数上限), 则结束迭代.

这里, ε_2 是小正数, 用以度量迭代所得反馈增益阵列 $K^{(j)}$ 对应函数值 $t(K^{(j)})$ 的改变情况, 因而越小越好.

算法 1 迭代结束时, 若 $t(j) < 0$, 则相应反馈增益 $K^{(j)}$ 满足极点配置要求; 否则, 相应反馈增益 $K^{(j)}$ 不满足极点配置要求.

注 4. 若认可系统的性能总可以从 $K = 0$ 开始逐步改善, 则在算法 1 可取初始反馈增益 $K^{(1)} = 0$ 进行尝试.

注 5. 式 (10)~(11) 中摄动幅度越小, 则 LMI 近似 BMI 的误差越小, 但迭代求解期望输出反馈增益的次数往往会增加.

注意到函数 $t(K)$ 在 $\mathcal{K}$ 内可能会有正的极小值, 因而当迭代所得反馈矩阵序列 $K^{(j)}$ 陷入某个正的孤立极小点附近时, 迭代到一定次数时将因 $|t(j-1) - t(j)| \leq \varepsilon_2$ 而结束, 但得不到满足条件的输出反馈增益矩阵 K .

为此, 在算法 1 初始化时均匀选取足够多个初始反馈增益, 并关于每个初始反馈增益利用算法 1 迭代处理, 可得到如下更有效的算法 2.

算法 2. 带随机初始反馈增益的输出反馈求解算法

步骤 1. 任取正整数 N , 在 $\mathcal{K}$ 内随机地均匀生成 N 个初始反馈增益 $K_s^{(1)}$ ($s = 1, 2, \dots, N$), 并令 $s = 1$.

步骤 2. 令 $j = 1$, $K^{(j)} = K_s^{(1)}$.

步骤 3. 同算法 1 的步骤 2, 求出 $t(j) = t(K^{(j)})$.

若 $t(j) < 0$, 令 $T(s) = t(j)$, $KK(\cdot, \cdot, s) = K^{(j)}$, 则 $KK(\cdot, \cdot, s)$ 是从 $K_s^{(1)}$ 开始迭代得到的满足极点配置要求的期望输出反馈增益, 再令 $s = s + 1$, 返回步骤 2; 否则, 记相应极小点为 $P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}$.

步骤 4. 同算法 1 的步骤 3, 求出 δK_{j+1} .

步骤 5. 同算法 1 的步骤 4, 即令 $j = j + 1$, $K^{(j)} = K^{(j-1)} + \delta K_j$, $A_j = A_{j-1} + B \delta K_j C$, 再求 $t(j) = t(K^{(j)})$.

步骤 6. 若 $|t(j-1) - t(j)| \leq \varepsilon_2$, 或者 $j = J$ (J 为迭代次数上限), 则令 $T(s) = t(j)$, $KK(\cdot, \cdot, s) = K^{(j)}$, 结束关于 j 的内循环, 并令 $s = s + 1$, 返回步骤 2; 除非 $s = N$, 结束关于 s 的外循环.

由步骤 3 和步骤 6 中数 $T(s)$ 的定义知, 迭代结束时, 反馈矩阵系列 KK 中对应向量 $T \in \mathbf{R}^N$ 中分量小于 0 的矩阵都满足极点配置要求.

当极点区域 $S(\alpha, \theta, r)$ 对容许集 $\mathcal{K}$ 内的输出反馈增益可配置, 且函数 $t(K)$ 只有有限多个孤立的正的极小值时, 算法 2 往往能求得满足条件的多个输出反馈增益. 这在求解除配置区域极点外还有其他性能要求的输出反馈控制问题 (如具有极点配置要求的最优 H_∞ 输出反馈问题) 时是有用的.

注 6. 若只求一个期望的输出反馈增益, 则在算法 2 的迭代过程中一旦 $t_j < 0$, 终止迭代.

3 数值算例

算例 1. 取系统 (1) 中的系数如下^[4]

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -26.668 \\ 0 & 1 & -7.317 \end{bmatrix}$$

极点区域为 $S(1.5, \pi/4, 3)$, 有界输出反馈增益集为

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathbf{R}^{2 \times 2} : |K(i, j)| < 5\}$$

注 7. 此系统可稳、可观测, 有一个不可控极点 -2 , 故本系统输出反馈所能实现的最大衰减率 $\alpha_{\max} \leq 2$.

取 $\varepsilon_1 = 0.0001$, $\varepsilon_2 = 10^{-8}$, 最大迭代次数 $J = 500$, 借助 Matlab 命令 rand('state', 0) 在 $\mathcal{K}$ 内随机生成 $N = 4$ 个初始反馈增益

$$\begin{aligned} K_1^{(1)} &= \begin{bmatrix} 4.5013 & 1.6084 \\ 2.6886 & 0.1402 \end{bmatrix}, \quad K_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.9130 & 0.4353 \\ 2.6210 & 4.8150 \end{bmatrix} \\ K_3^{(1)} &= \begin{bmatrix} 3.2141 & 1.1543 \\ 0.5530 & 2.9194 \end{bmatrix}, \quad K_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 4.2181 & 3.2373 \\ 2.3821 & 0.9429 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

它们相应闭环极点都不在 $S(1.5, \pi/4, 3)$ 内.

对 K 和 P_i 的不同摄动幅度 τ, τ_i , 用算法 2 迭代处理, 得满足极点配置条件的期望反馈增益个数及相应迭代次数如表 1 所示.

表 1 不同摄动幅度的迭代计算结果
Table 1 Computing results for different perturbations

摄动幅度 ($i = 1, 2, 3$)	分别迭代次数	期望反馈增益个数
$\tau = 0.8, \tau_i = 0.4$	7, 8, 4, 6	4
$\tau = 0.4, \tau_i = 0.2$	15, 15, 6, 10	4
$\tau = 0.4, \tau_i = 0.1$	15, 15, 7, 10	4
$\tau = 0.2, \tau_i = 0.1$	29, 28, 13, 19	4
$\tau = 0.1, \tau_i = 0.1$	57, 55, 25, 38	4

算法 2 的计算结果表明迭代次数主要取决于增益 K 的摄动幅度. 尽管摄动幅度较大时用 LMI 近似 BMI 效果差些, 但较大的摄动幅度意味着可以在更大的范围内寻优, 从而减少迭代次数, 更多实验结果也证明了这一点.

从摄动线性化 LMI 近似 BMI 的效果以及迭代效率来看, 选择 K 的摄动幅度 $\tau = 0.4$, P_i 的摄动幅度 $\tau_i = 0.2$ 是比较合适的.

而对同上 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, J$, 取 K 和 P_i 的摄动幅度分别为 $\tau = 0.4$, $\tau_i = 0.2$, 取初始反馈 $K^{(1)} = 0$, 利用算法 1 迭代 7 次, 得满足要求的静态输出反馈增益

$$K^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.8467 & -2.4837 \\ 0.1203 & 0.0290 \end{bmatrix}$$

其相应闭环极点为 $-2.3003, -1.6046, -2.0000$.

表 1 结果显示无论选取哪一组摄动幅度, 从 4 个初始反馈出发, 利用算法 2 迭代所得反馈增益均满足极点配置要求. 但对于其他系统未必总如此 (如算例 2).

算例 2. 取系统 (1) 中的系数矩阵 A, B 同算例 1, 但输出方程 (1b) 的系数矩阵为 $C_2 = [0, 1, -7.317]$ (即算例 1 中矩阵 C 的第二行), 极点区域仍为 $S(1.5, \pi/4, 3)$.

由于测量量的减少, 相应静态输出反馈控制问题的可解性显然不如算例 1, 为此增大容许输出反馈集, 设

$$\mathcal{K}_1 = \{K \in \mathbf{R}^{2 \times 1} : |K(i, j)| < 10\}$$

$$\mathcal{K}_2 = \{K \in \mathbf{R}^{2 \times 1} : |K(i, j)| < 100\}$$

取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, J$ 同算例 1, K 的摄动幅度 $\tau = 0.4$, P_i 的摄动幅度 $\tau_i = 0.2$ ($i = 1, 2, 3$), 用 Matlab 命令 rand ('state', 0) 分别在 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ 内随机生成 $N = 16$ 个初始反馈增益, 并用算法 2 迭代. 结果为:

1) 对于容许输出反馈集 $\mathcal{K}_1$, 迭代结束时, 向量 $\mathbf{T}$ 的所有分量均大于 0 (增加迭代上限 J 到 2000, 或者增加初始反馈增益个数到 $N = 64$ 再计算, 结果仍如此), 说明在容许输出反馈集 $\mathcal{K}_1$ 内相应控制问题很可能无解.

2) 对于容许输出反馈集 $\mathcal{K}_2$, 迭代结束时, 向量 $\mathbf{T}$ 有 5 个分量小于 0, 因而迭代结束得到 5 个满足极点配置要求的反馈增益; $\mathbf{T}$ 中也有迭代次数 $j < J$ 但相应 $T(s) > 0$ 的元素, 如 $T(10) = 5.2650$, 相应迭代次数 $j = 229$, 说明从 $K_{10}^{(1)}$ 开始迭代到 229 次时, $K_{10}^{(230)}$ 很可能已到达 $t(K)$ 的某个正的极小点附近, 所以内循环因 $t(K)$ 的值减小甚微而自然结束.

以下仅是情形 2) 迭代结束时得到的一个期望反馈增益矩阵及其相应初时反馈增益

$$K_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 21.3685 \\ -2.8035 \end{bmatrix}, K_2^{(287)} = \begin{bmatrix} -51.1740 \\ -6.3074 \end{bmatrix}$$

$K_2^{(287)}$ 相应闭环系统矩阵 A_K 的特征值分别为 $-2, -1.5114 \pm 0.0104i$.

算例 2 说明: 1) 仅从一个反馈增益初值出发的迭代求解算法 (如算法 1) 不一定可靠; 2) 输出反馈增益的容许集 $\mathcal{K}$ 对问题可解性的影响是必须考虑的.

对比算例 1 和算例 2 中测量方程的系数矩阵, 有

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} C_2 = \begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} C = \tilde{K} C$$

算例 2 结果表明, 若在算例 1 中限制输出反馈增益形式如上式中的 $\tilde{K}$, 则需要增大 k_1, k_2 的容许取值范围才能确保相应区域极点配置问题有解.

在算例 1 中, 与一般形式的增益相比, 形如 $\tilde{K}$ 的增益对应的控制在物理实现时只用一个传感器, 因而传感器与执行器的连接结构也要简单. 所以在权衡控制成本时, 对于算例 1 这种问题, 在指定容许集范围内设计反馈增益矩阵有尽可能多零元素的控制器是有实际价值的. 可以从算法 2 得到的满足条件的所有输出反馈中寻找.

4 结论

将静态输出反馈极点配置问题用一个新的 BMI 约束优化问题来表示, 再将相应 BMI 摄动线性化, 给出了求解静态输出反馈增益的有效求解算法, 它可以克服从单个初始反馈增益出发的迭代因可能陷入函数 $t(K)$ 的孤立正极大值点附近而得不到解的缺陷. 文中所给方法可用于求解其他静态输出反馈或状态反馈下的多指标约束控制问题.

References

- 1 Syrmos V L, Abdallah C T, Dorato P, Grigoriadis K. Static output feedback — a survey. *Automatica*, 1997, **33**(2): 125–137
- 2 Shimomura T, Fujii T. Multiobjective control design via successive over-bounding of quadratic terms. In: Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, Australia: IEEE, 2000. 2763–2768
- 3 Toker O, Ozbay H. On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback. In: Proceedings of the American Control Conference. Seattle, USA: IEEE, 1995. 2525–2526
- 4 Wang Zi-Dong, Guo Zhi. Spacecraft intercept control with regional pole and variance constraints: the static output feedback case. *Journal of Astronautics*, 1997, **18**(1): 14–18 (王子栋, 郭治. 区域极点及方差约束下的航天器拦截控制: 静态输出反馈情形. 宇航学报, 1997, **18**(1): 14–18)
- 5 Yu J T. A convergent algorithm for computing stabilizing static output feedback gains. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(12): 2271–2275
- 6 Crusius C A R, Trofino A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(5): 1053–1057
- 7 Bara G I, Boutayeb M. Static output feedback stabilization with H_∞ performance for linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(2): 250–254
- 8 Hassibi A, How J, Boyd S. A path-following method for solving BMI problems in control. In: Proceedings of the American Control Conference. San Diego, USA: IEEE, 1999. 1385–1389
- 9 Chen S H, Ho W H, Chou J H. Optimal output feedback control for linear uncertain systems using LMI-based approach and genetic algorithm. In: Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Taipei, Taiwan: IEEE, 2006. 4136–4141
- 10 Henrion D, Lasserre J B. Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(2): 192–202
- 11 Goh K C, Safanov M G, Papavassilopoulos G P. A global optimization approach for the BMI problem. In: Proceedings of the 33rd International Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, USA: IEEE, 1994. 2009–2014
- 12 Tuan H D, Apkarian P, Nakashima Y. A new Lagrangian dual global optimization algorithm for solving bilinear matrix inequalities. In: Proceedings of the American Control Conference. San Diego, USA: IEEE, 1999. 1851–1855

王远钢 南京理工大学理学院副教授, 博士. 主要研究方向为多指标控制系统相容性分析与控制设计. E-mail: ygwangzhu@hotmail.com (WANG Yuan-Gang Associate professor, Ph.D. at the School of Sciences, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers consistency analysis and control design for control systems with multi-constraints.)