自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA

基于控制障碍函数的多智能体系统安全控制

李博茜 胡成 朱松 温世平

Safe Control of Multi-agent Systems via Control Barrier Functions

LI Bo-Qian, HU Cheng, ZHU Song, WEN Shi-Ping

在线阅读 View online: https://doi.org/10.16383/j.aas.c260074

您可能感兴趣的其他文章

基于滤波控制障碍函数的严格反馈系统安全控制

Safe Control of Strict-feedback Systems Using Filtered Control Barrier Functions

自动化学报. 2024, 50(12): 2474-2486 https://doi.org/10.16383/j.aas.c240003

通信路径损耗下多智能体系统固定时间防碰防离编队控制

Fixed-time Formation Control of Multi-agent Systems With Collision and Isolation Avoidance Under Communication Path Loss

自动化学报. 2025, 51(3): 643-657 https://doi.org/10.16383/j.aas.c240445

基于PI结构的多智能体系统容错一致性控制

Fault-tolerant Consensus Control of Multi-agent Systems Based on PI Structure

自动化学报. 2025, 51(3): 570-576 https://doi.org/10.16383/j.aas.c240474

基于线性变换的领导跟随多智能体系统动态反馈均方一致性控制

Dynamic Feedback Mean Square Consensus Control Based on Linear Transformation for Leader-follower Multi-agent Systems

自动化学报. 2022, 48(10): 2474-2485 https://doi.org/10.16383/j.aas.c200850

多智能体系统协同互估计与控制一体化框架

Integrated Framework for Cooperative Mutual Estimation and Control in Multi-agent Systems

自动化学报. 2025, 51(10): 2359-2370 https://doi.org/10.16383/j.aas.c250290

无人飞行器集群自主控制: 预设性能驱动的安全编队控制

Autonomous Control of Unmanned Aerial Vehicle Swarms: Prescribed Performance Driven Safety Formation Control

自动化学报. 2025, 51(5): 931-941 https://doi.org/10.16383/j.aas.c240603

基于控制障碍函数的多智能体系统安全控制

李博茜[1] 胡 成[2] 朱 松[3] 温世平[4]

摘 要 研究多智能体系统的避碰安全控制问题, 目标是在尽量保持标称控制输入的同时, 确保任意智能体对之间始终保持安全距离. 针对二阶系统中安全约束函数相对度为 2、传统控制障碍函数难以直接施加控制约束的问题, 引入高阶控制障碍函数框架构造碰撞避免条件, 并将其转化为最小侵入的二次规划控制器. 进一步, 利用安全约束项的对称性, 将原本耦合的不等式约束分解为各智能体可独立求解的线性约束. 在此基础上, 将所提方法推广至含有不确定项的多智能体系统, 设计鲁棒控制障碍函数及构建可实现的鲁棒控制器, 并证明了系统安全集的前向不变性. 数值仿真结果表明, 所提方法可使得系统保持安全性并维持良好的跟踪性能.

关键词 多智能体系统; 控制障碍函数; 避碰; 鲁棒性

引用格式 李博茜, 胡成, 朱松, 温世平. 基于控制障碍函数的多智能体系统安全控制. 自动化学报, 2026, **52**(10): 2299−2306

DOI 10.16383/j.aas.c260074 **CSTR** 32138.14.j.aas.c260074

Safe Control of Multi-agent Systems via Control Barrier Functions

LI Bo-Qian[1] HU Cheng[2] ZHU Song[3] WEN Shi-Ping[4]

Abstract This paper investigates the collision avoidance safety control for multi-agent systems, with the objective of guaranteeing a safe distance between any pair of agents while preserving nominal control input as much as possible. For second-order systems, the safety constraint functions have relative degree two, which makes it difficult to directly impose control constraints using classical control barrier functions. To address this issue, a high-order control barrier function framework is introduced to formulate collision avoidance conditions, which are then incorporated into a minimally invasive quadratic programming controller. Furthermore, by exploiting the symmetry of the safety constraints, the originally coupled inequality constraints are decomposed into linear constraints that can be solved independently by each agent. On this basis, the proposed approach is extended to uncertain multi-agent systems. Robust control barrier functions are designed to construct a realizable controller, and the forward invariance of the system safety set is rigorously proved. Numerical simulation results demonstrate that the proposed method can maintain system security while achieving satisfactory tracking performance.

Keywords multi-agent system; control barrier function; collision avoidance; robustness

Citation Li Bo-Qian, Hu Cheng, Zhu Song, Wen Shi-Ping. Safe control of multi-agent systems via control barrier functions. *Acta Automatica Sinica*, 2026, **52**(10): 2299−2306

多智能体系统的协同控制因其在编队控制、分布式感知以及群体智能等方向的广泛应用而受到持续关注[1−2]. 在这些应用中, 除一致性、稳定性等性能指标外, 安全性通常是更为基础的要求: 系统在运行过程中必须避免碰撞、越界或进入危险区域, 否则, 即便跟踪性能再好, 也可能导致任务失败, 甚至造成设备损坏、影响人员安全. 从控制理论角度看, 安全性通常可表述为系统轨迹在时间演化过程中始终保持在某个预先指定的安全集合内[3−4]. 实践中, 安全控制往往需要与性能目标并行实现. 相关研究表明, 即便在较为经典的二维双积分器模型中, 将安全约束与性能目标统一纳入控制律设计仍是关键问题[5]. 对于多智能体系统而言, 安全问题更加突出: 一方面, 系统规模增大导致交互关系复杂, 碰撞风险随着智能体数量上升而增加; 另一方面, 多智能体系统通常采用分布式结构, 各智能体只能利用局部信息做决策, 使得安全约束的实时与分布式实施更具挑战性.

收稿日期 2026-01-28 录用日期 2026-03-21
Manuscript received January 28, 2026; accepted March 21, 2026
国家自然科学基金 (62506239, 62506048, 62366034) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (62506239, 62506048, 62366034)
本文责任编委 温广辉
Recommended by Associate Editor WEN Guang-Hui
1. 天津科技大学人工智能学院 天津 300457 2. 新疆大学数学与系统科学学院 乌鲁木齐 830017 3. 中国矿业大学数学学院 徐州 221116 4. 深圳理工大学计算机科学与人工智能学院 深圳 518055
1. College of Artificial Intelligence, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300457 2. College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi 830017 3. School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116 4. Faculty of Computer Science and Artificial Intelligence, Shenzhen University of Advanced Technology, Shenzhen 518055

围绕多智能体系统的安全控制, 近些年已有研究提出不同策略. 较传统的方法是人工势场思想, 通过在障碍物或邻居智能体周围构造“斥力”来避免进入不安全区域[6]. 该类方法直观、易实现, 且可与目标吸引项叠加以形成合力控制; 但其也常面临参数敏感以及难以给出严格安全保证等问题, 尤其在复杂环境或高密度群体中更易出现保守或失效现象. 另一类工作尝试通过空间计算或全局规划生成满足约束的最优安全轨迹[7], 从理论上能获得更强的全局性与可解释性, 但往往计算复杂、实时性不足, 难以直接应用于多智能体系统的在线控制. 相较上述启发式或计算负担较重的方法, 控制障碍函数 (control barrier function, CBF) 提供一种更为系统且具有理论保证的安全控制框架. CBF 概念受控制 Lyapunov 函数在稳定性分析中的启发而提出, 并在后续工作中得到进一步完善. 其核心思想是: 通过构造一个函数 $h(x)$ 来刻画安全集合 $\{x : h(x) \geq 0\}$, 并施加形如 $\dot{h}(x, u) \geq -\alpha h(x)$ 的不等式约束, 从而保证安全集合的前向不变性, 即只要初始状态在安全集合内, 系统轨迹将对所有未来时间保持安全[8]. 在实现层面, CBF 约束通常嵌入到二次规划 (quadratic programming, QP) 中, 与性能目标对应的标称控制器 u^{nom} 相结合: 当系统远离安全边界时, 控制器基本保持标称控制; 当接近边界时, CBF 作为“安全滤波器”对控制输入作最小必要修正, 以在尽量不牺牲性能的同时满足安全约束[9].

CBF-QP 范式近几年广泛用于智能体的安全控制[10]. 相关研究将 CBF 拓展到编队导航与群体运动规划中, 使得队形运动与避碰约束可在同一优化框架内统一处理[11−12]; 也有工作将外部障碍物纳入 CBF 框架, 从而实现同时考虑邻居碰撞与环境避障的安全控制[13]. 除障碍规避外, CBF 还应用于在状态约束下实现安全一致性跟踪[14], 以及在重复任务中引入迭代学习 CBF[15]. 总体而言, 将 CBF 约束与 QP 问题结合, 可以为智能体系统提供原则性强、可解释且具备实时性的安全保障手段. 尽管 CBF 方法强大, 其经典形式通常要求安全条件相对于控制输入的相对度为 1, 即 $\dot{h}$ 中显式包含控制项 u, 从而可在 QP 中施加线性约束. 然而, 现实中有些控制系统由高阶动力学系统刻画[16]. 在高阶动力学系统中, 基于位置/距离定义的安全约束往往具有更高相对度, 使得标准 CBF 条件无法直接应用. 事实上, 在一些二阶系统研究中, 常通过精心设计 CBF 约束以维持相对度为 1, 从而适配标准 CBF-QP 控制方法. 但该思路对约束形式存在限制, 对系统的物理模型要求较高, 并不总能保持“安全距离”这一最直接、最符合工程直觉的指标.

针对高相对度的问题, 已有可行的研究路线: 例如, 采用回步将高阶系统分解并处理高相对度约束[17], 或提出高相对度安全约束并建立系统化框架[18]. 其中一个重要进展是高阶控制障碍函数 (high-order control barrier function, HOCBF)[19]. HOCBF 通过递推构造一系列函数并施加级联不等式约束, 从而在统一的 QP 框架中处理任意相对度的安全约束. 然而, 将 HOCBF 用于多智能体系统中仍面临若干难点: 1) 实际系统常存在速度通道与控制通道扰动或建模误差等因素; 若不将其纳入安全条件, 理论上保证的安全性在实际中可能被破坏. 2) 若对所有智能体对 (i, j) 都施加安全约束, 则约束数量过大, 在大规模系统中会显著增加计算与通信负担, 使在线 QP 求解面临瓶颈. 因此, 需要一种兼顾“直观距离安全指标、可扩展实现以及不确定性鲁棒保证”的方法.

为应对上述挑战, 本文针对二阶多智能体系统的安全避碰问题, 提出一种 HOCBF-QP 控制框架. 进一步地, 本文将框架推广至不确定性多智能体系统. 通过对不确定项进行界定, 本文构造鲁棒障碍函数下界并引入鲁棒补偿项, 使得在未知扰动存在时仍可得到可实现的线性安全约束, 进而建立鲁棒 HOCBF-QP 控制器. 本文的主要贡献概括如下:

1) 面向二阶多智能体系统, 直接以智能体间距离裕度定义安全函数并构造 HOCBF 安全条件, 避免对安全函数进行复杂改造, 使安全指标更直观、实现更直接.

2) 利用成对安全约束的对称性将耦合约束转化为分布式线性约束, 并提出邻近集合以裁剪远距离约束, 降低 QP 约束的规模.

3) 针对速度与控制通道存在扰动的不确定性多智能体系统, 推导鲁棒安全下界并引入鲁棒补偿项, 构建可实现的鲁棒 HOCBF-QP 控制器, 并证明安全集合的前向不变性, 从理论上保证碰撞避免.

本文中所用符号说明如下: $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}^n$ 分别表示实数空间与 n 维实向量空间; 记 $\mathbf{I}[1, N] = \{1, 2, \cdots, N\}$; 符号 $\|\cdot\|$ 表示 2 -范数.

1 预备知识和背景

1.1 控制障碍函数

首先, 考虑如下仿射控制系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \tag{1}$$

其中, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态, $u(t) \in U \subseteq \mathbf{R}^m$ 为控制

输入, $f(\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 与 $g(\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times m}$ 为局部 Lipschitz 连续函数. 此系统的安全性可表述为系统状态始终保持在一安全集内, 记为 $x(t)\in\mathcal{C},\ \forall t\geq 0$. 此时, 也可称集合 $\mathcal{C}$ 为系统的前向不变集. 通常, 采用如下形式:

$$\mathcal{C}=\{x\in\mathbf{R}^n\mid h(x)\geq 0\} \tag{2}$$

其中, $h(\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为连续可微函数. 基于上述介绍, 下面引入一种分析系统安全性的常用工具——控制障碍函数 (CBF).

定义 1. 对于仿射控制系统 (1), 若存在扩展 $\mathcal{K}$ 类函数 $\alpha(\cdot)$, 使得对所有 $x(t_0)\in\mathcal{C}$ 和 $t\geq 0$, 有

$$\sup_{u\in U}[L_fh(x)+L_gh(x)u]\geq-\alpha(h(x)) \tag{3}$$

其中, Lie 导数表示为 $L_fh(x)=\frac{\partial h(x)}{\partial x}f(x)$, $L_gh(x)=\frac{\partial h(x)}{\partial x}g(x)$. 那么, 函数 $h(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是一个可行的 CBF, 且集合 $\mathcal{C}$ 对系统 (1) 前向不变[20].

根据上述定义, 经典 CBF 条件可写为

$$L_fh(x)+L_gh(x)u+\alpha(h(x))\geq 0 \tag{4}$$

为在尽量不改变标称控制输入 u^{nom} 的前提下满足安全约束, 得到最小侵入控制器, 即

$$\begin{aligned}&u^*=\arg\min_{u\in U}\frac{1}{2}\|u-u^{\mathrm{nom}}\|^2\\&\text{s.t. }L_fh(x)+L_gh(x)u+\alpha(h(x))\geq 0\end{aligned} \tag{5}$$

称式 (5) 为 CBF-QP 控制方法.

1.2　高阶控制障碍函数

需要注意以前的 CBF 条件 (4) 中, 需要 $L_gh(x)\neq 0$ 以保留包含优化变量 u 的项. 但在高阶多智能体系统控制问题中, h 的相对度通常大于 1. 为处理此问题, 下面给出高阶相对度的定义及 HOCBF 的框架.

定义 2. 对于仿射控制系统 (1), 函数 $y(x)$ 的相对度为 m (m 为正整数) 意味着

$$L_gL_f^{m-1}y\neq 0,\ L_gL_f^sy=0,\ s=1,\cdots,m-2 \tag{6}$$

其中, $L_gL_f^sy=\frac{\partial L_f^{s-1}y}{\partial x}g(x)$, $L_f^sy=\frac{\partial L_f^{s-1}y}{\partial x}f(x)$ [21].

当仿射控制系统的不变集由函数 $h(x)=h_0(x)$ 表示, 如果函数 $h_0(x)$ 是 m 阶可微的, 记函数序列为

$$h_s(x)=\dot{h}_{s-1}(x)+\alpha_s(h_{s-1}(x)),\ s=1,\cdots,m-1 \tag{7}$$

其中, $\alpha_s(\cdot)$ 为扩展 $\mathcal{K}$ 类函数[22]. 进一步考虑一系列集合 $\mathcal{C}_s$, 形式为

$$\mathcal{C}_s=\{x\in\mathbf{R}^n\mid h_{s-1}(x)\geq 0\},\quad s=1,\cdots,m \tag{8}$$

根据式 (7) 中给出的 $h_s(x)$ 和式 (8) 中的 $\mathcal{C}_s$, 高阶控制障碍函数 (HOCBF) 的定义如下.

定义 3. 若 $h_0(x)$ 对系统 (1) 的相对度为 m, 且存在可微的 $\mathcal{K}$ 类函数 $\alpha_s(\cdot)$, 使得对所有满足 $h_s(x)\geq 0$ 的状态 x, 控制输入 u 满足

$$L_f^mh_0(x)+L_gL_f^{m-1}h_0(x)u+\alpha_m\big(h_{m-1}(x)\big)\geq 0 \tag{9}$$

则称 $h_0(x)$ 为系统 (1) 的一个相对度为 m 的 HOCBF, 集合 $\bigcap_{s=1}^m\mathcal{C}_s$ 对系统 (1) 前向不变, 因而系统在该集合内保持安全[23].

注 1. 扩展 $\mathcal{K}$ 类函数 $\alpha(\cdot)$ 常见的一个特例是选取线性函数 $\alpha(r)=\kappa r$, 其中 κ 是一个正常数. CBF 安全约束式 (4) 和式 (9) 可写成更简单的线性形式. 本文后续控制器设计中将采用该线性特例以便推导与实现.

2　确定性系统

本节主要考虑二阶多智能体系统的避碰问题, 智能体之间需保持最小安全距离 D_{safe}. 具体地, 多智能体系统的动力学描述为

$$\begin{cases}\dot{x}_i=v_i,\\ \dot{v}_i=u_i,\quad i\in\mathbf{I}[1,\ N]\end{cases} \tag{10}$$

其中, $x_i,\ v_i,\ u_i\in\mathbf{R}^n$ 分别表示智能体 i 的位置、速度和控制输入. 对智能体 $(i,\ j)$, 定义以下安全集:

$$\mathcal{C}_{ij}=\{x\in\mathbf{R}^n|\|x_i-x_j\|-D_{\mathrm{safe}}\geq 0\} \tag{11}$$

根据数学模型, CBF 可较为直观地定义为

$$h_{ij}(x)=\|x_i-x_j\|-D_{\mathrm{safe}},\quad i\neq j \tag{12}$$

2.1　高阶控制障碍函数设计

首先, 对任意智能体对 $(i,\ j)(i\neq j)$ 定义相对位置与相对速度为

$$\Delta x_{ij}=x_i(t)-x_j(t),\ \Delta v_{ij}=v_i(t)-v_j(t) \tag{13}$$

根据式 (10) 和式 (13), $h_{ij}(t)$ 的时间导数为 $\dot{h}_{ij}(t)=\frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|}$, 且不依赖于控制输入. 根据第 1 节介绍的 HOCBF 框架, 设计第一阶和第二阶 CBF 分别为

$$\begin{cases}h_{ij}^0(t)=h_{ij}(t)=\|\Delta x_{ij}\|-D_{\mathrm{safe}}\\ h_{ij}^1(t)=\dfrac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|}+\alpha_0(\|\Delta x_{ij}\|-D_{\mathrm{safe}})\end{cases} \tag{14}$$

其中, $\alpha_0>0$ 是设计的 CBF 参数. 本文采用注 1 中的线性特例, 在后续推导中直接用常数 α_0 和 α_1 表示对应的线性系数. 沿系统 (10), 可计算 $h_{ij}^1(t)$ 的时

间导数. 记 $\Delta u_{ij}=u_i(t)-u_j(t)$, 并应用 HOCBF 条件 (9), 可得到智能体对 $(i,\ j)$ 的以下安全条件:

$$\begin{aligned}-\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}u_i(t)-\Delta x_{ji}^{\mathrm{T}}u_j(t)\le\alpha_0\alpha_1\|\Delta x_{ij}\|h_{ij}(t)+\\(\alpha_0+\alpha_1)\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}+\|\Delta v_{ij}\|^2-\\\frac{(\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij})^2}{\|\Delta x_{ij}\|^2}=b_{ij}\end{aligned}\tag{15}$$

其中, $\alpha_1>0$ 同样为设计的 CBF 参数.

2.2 基于高阶控制障碍函数的二次规划控制器设计

上述得到的安全约束 (15) 是一个关于智能体对 $(i,\ j)$ 的耦合线性不等式. 幸运的是, 我们观察到其左侧可以分解为两个独立的部分, 每个部分仅与单个智能体的控制输入相关. 具体地, 通过利用 b_{ij} 的对称性: $b_{ij}=b_{ji}$, 可将不等式 (15) 分割为 $-\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\times u_i(t)\le\frac{1}{2}b_{ij}$, $-\Delta x_{ji}^{\mathrm{T}}u_j(t)\le\frac{1}{2}b_{ji}$. 基于这一观察, 智能体 i 的分布式控制器表示为

$$\begin{aligned}&u_i^*=\arg\min_{u_i\in U}\frac{1}{2}(u_i-u_i^{\mathrm{nom}})^{\mathrm{T}}(u_i-u_i^{\mathrm{nom}})\\&\text{s.t.}-\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}u_i\le\frac{1}{2}b_{ij},\quad j\ne i\end{aligned}\tag{16}$$

其中, u_i^{nom} 是标称控制输入.

注意到, 式 (16) 中的约束条件要求智能体 i 访问所有其他智能体的位置和速度信息. 此外, 约束条件的数量随着智能体数量的增加而增加, 这可能导致计算负担过重. 为缓解这一问题, 可以利用系统动力学的有界性来简化约束集, 即表征一组“邻近”的与碰撞避免相关的智能体, 具体如下.

假设 1. $\|v_i(t)\|\le b_v$, $\|u_i(t)\|\le b_u$, b_v, b_u 是正数.

引理 1. 在由式 (10) 描述的多智能体系统中, 当假设 1 成立时, 无论控制输入 u_i 如何设计, 智能体 i $(i\in\mathbf{I}[1,\ N])$ 不会在短期内与任何智能体 j $(j\notin\mathcal{M}_i)$ 碰撞, 其中集合

$$\mathcal{M}_i=\left\{j\ne i\middle|\|\Delta x_{ij}\|\le D_{\mathrm{safe}}+\frac{2b_v}{\alpha_0}\right\}\tag{17}$$

证明. 定义 $D_{\mathrm{near}}=D_{\mathrm{safe}}+\frac{2b_v}{\alpha_0}$, 对于任意智能体 j $(j\notin\mathcal{M}_i)$, 有:

$$\begin{aligned}\dot h_{ij}(t)=\dot D_{ij}\ge-2b_v\ge-\alpha_0(D_{\mathrm{near}}-D_{\mathrm{safe}})\ge\\-\alpha_0(\|\Delta x_{ij}\|-D_{\mathrm{safe}})=-\alpha_0h_{ij}(t)\end{aligned}\tag{18}$$

这意味着无论 u_i 如何选取, HOCBF 约束条件都成立, 因此在短期内智能体 i 和 j 的安全性得到保证. □

基于这一观察, 智能体 i $(i\in\mathbf{I}[1,\ N])$ 的 QP 控制器可更新为

$$\begin{aligned}&u_i^*=\arg\min_{u_i\in U}\frac{1}{2}(u_i-u_i^{\mathrm{nom}})^{\mathrm{T}}(u_i-u_i^{\mathrm{nom}})\\&\text{s.t.}\quad-\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}u_i\le\frac{1}{2}b_{ij},\quad j\in\mathcal{M}_i\end{aligned}\tag{19}$$

定理 1. 在 HOCBF-QP 控制器 u_i^* (式 (19)) 的作用下, 二阶多智能体系统 (10) 的安全性得以保证.

证明. 由式 (19) 中的约束条件可知, 对任意 $j\in\mathcal{M}_i$, 智能体 i 的控制输入满足由 HOCBF 条件导出的线性不等式, 从而对相应的智能体对 $(i,\ j)$ 满足定义 3 中的最高阶不等式条件, 保证安全集的前向不变性. 另一方面, 引理 1 表明对 $j\notin\mathcal{M}_i$ 在短期内安全性自动满足, 因此综合得到系统 (10) 的安全性. □

注 2. 对于二阶系统的安全控制问题, CBF 的设计常依赖于特定的动力学模型. 文献 [10] 给出一种可行的 CBF 设计, 即

$$h_{ij}(t)=\sqrt{2b_u(\|\Delta x_{ij}\|-D_{\mathrm{safe}})}+\frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}}{\|\Delta x_{ij}\|}\Delta v_{ij}$$

然而, 这种 CBF 设计复杂且不易推广到更高阶或更复杂的动力学系统. 相比之下, 本节所提的 HOCBF 方法提供了一种系统化且通用的框架, 能够处理各种高阶动力学系统, 而无需针对每种特定模型进行精心设计.

3 不确定性系统

本节将之前提出的 HOCBF 方法扩展到不确定性多智能体系统. 具体地, 考虑系统

$$\begin{cases}\dot x_i=v_i+d_{v_i}\\\dot v_i=u_i+d_{u_i}\end{cases}\tag{20}$$

其中, d_{v_i} 和 d_{u_i} 表示有界不确定性.

假设 2. $\|d_{v_i}\|_\infty\le\bar b_v$, $\|d_{u_i}\|_\infty\le\bar b_u$, $\bar b_v$, $\bar b_u$ 是正数.

3.1 鲁棒高阶控制障碍函数设计

根据式 (13), 系统 (20) 可以重写为

$$\begin{cases}\Delta\dot x_{ij}=\Delta v_{ij}+\Delta d_{v_{ij}}\\\Delta\dot v_{ij}=\Delta u_{ij}+\Delta d_{u_{ij}}\end{cases}\tag{21}$$

其中, $\Delta d_{v_{ij}}=d_{v_i}-d_{v_j}$, $\Delta d_{u_{ij}}=d_{u_i}-d_{u_j}$. 因此, $h_{ij}(t)$ 的时间导数为

$$\dot h_{ij}(t)=\frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}}{\|\Delta x_{ij}\|}\left(\Delta v_{ij}+\Delta d_{v_{ij}}\right)\tag{22}$$

根据 HOCBF 的定义, 构造以下函数序列:

$$\begin{cases} h_{ij}^0(t) = h_{ij}(t) = \|\Delta x_{ij}\| - D_{\text{safe}} \\ h_{ij}^1(t) = \dfrac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}(\Delta v_{ij} + \Delta d_{v_{ij}})}{\|\Delta x_{ij}\|} + \alpha_0(\|\Delta x_{ij}\| - D_{\text{safe}}) \end{cases} \tag{23}$$

为确保对不确定性的鲁棒性, 引入一个下界:

$$\bar{h}_{ij}^1 = \frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|} + \alpha_0(\|\Delta x_{ij}\| - D_{\text{safe}}) - 2\sqrt{n}\bar{b}_v \tag{24}$$

其中, n 表示状态向量 x_i 的维数. 注意到

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta d_{v_{ij}}}{\|\Delta x_{ij}\|} \geq & -\left\| \frac{\Delta x_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|} \right\|_1 \cdot \|\Delta d_{v_{ij}}\|_\infty \geq \\ & -\sqrt{n}\left\| \frac{\Delta x_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|} \right\|_2 \cdot (\|d_{v_i}\|_\infty + \|d_{v_j}\|_\infty) \geq \\ & -2\sqrt{n}\bar{b}_v \end{aligned} \tag{25}$$

由此, 得到以下不等式:

$$\begin{aligned} h_{ij}^1 = & \frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|} + \frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta d_{v_{ij}}}{\|\Delta x_{ij}\|} + \\ & \alpha_0(\|\Delta x_{ij}\| - D_{\text{safe}}) \geq \frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|} - 2\sqrt{n}\bar{b}_v + \\ & \alpha_0(\|\Delta x_{ij}\| - D_{\text{safe}}) = \bar{h}_{ij}^1 \end{aligned} \tag{26}$$

这意味着满足 $\bar{h}_{ij}^1 \geq 0$ 保证了 $h_{ij}^1 \geq 0$, 从而确保安全集的前向不变性. 接下来, 计算 $\bar{h}_{ij}^1(t)$ 沿系统 (21) 的时间导数:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{h}}_{ij}^1(t) = & \alpha_0\frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}(\Delta v_{ij} + \Delta d_{v_{ij}})}{\|\Delta x_{ij}\|} + \frac{\Delta v_{ij}^{\mathrm{T}}(\Delta v_{ij} + \Delta d_{v_{ij}})}{\|\Delta x_{ij}\|} - \\ & \frac{(\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij})[\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}(\Delta v_{ij} + \Delta d_{v_{ij}})]}{\|\Delta x_{ij}\|^3} + \\ & \frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}}{\|\Delta x_{ij}\|}(\Delta u_{ij} + \Delta d_{u_{ij}}) \end{aligned} \tag{27}$$

其中, $\Delta d_{u_{ij}} = d_{u_i} - d_{u_j}$. 相应地, 智能体对 $(i,\ j)$ 的 CBF 条件更新为

$$\dot{\bar{h}}_{ij}^1 \geq -\alpha_1\left[\frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|} + \alpha_0(\|\Delta x_{ij}\| - D_{\text{safe}}) - 2\sqrt{n}\bar{b}_v\right] \tag{28}$$

3.2　鲁棒高阶控制障碍函数的二次规划控制器设计

注意到原始 HOCBF 条件 (28) 由于不确定项 $\Delta d_{v_{ij}}$ 和 $\Delta d_{u_{ij}}$ 的存在而无法直接应用. 为解决该问题, 类似于式 (25) 的结果, 可推导出

$$\frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta d_{u_{ij}}}{\|\Delta x_{ij}\|} \geq -\left\| \frac{\Delta x_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|} \right\|_1 \cdot \|\Delta d_{u_{ij}}\|_\infty \geq -2\sqrt{n}\bar{b}_u \tag{29}$$

以及

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta v_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta d_{v_{ij}}}{\|\Delta x_{ij}\|} - \frac{(\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij})(\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta d_{v_{ij}})}{\|\Delta x_{ij}\|^3} \geq \\ & -\left\| \frac{\Delta v_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|} - \frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}\Delta x_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|^3} \right\|_1 \cdot \|\Delta d_{v_{ij}}\|_\infty = \\ & -\frac{1}{\|\Delta x_{ij}\|}\left\| \Delta v_{ij} - \frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}\Delta x_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|^2} \right\|_1 \cdot \|\Delta d_{v_{ij}}\|_\infty \geq \\ & -\frac{\sqrt{n}}{\|\Delta x_{ij}\|}\left\| \Delta v_{ij} - \frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}\Delta x_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|^2} \right\|_2 \cdot \|\Delta d_{v_{ij}}\|_\infty = \\ & -\frac{2\sqrt{n}\bar{b}_v}{\|\Delta x_{ij}\|}\sqrt{\|\Delta v_{ij}\|^2 - \frac{(\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij})^2}{\|\Delta x_{ij}\|^2}} \end{aligned} \tag{30}$$

将式 (25)、(27)、(29) 和 (30) 代入式 (28), 得到智能体对 $(i,\ j)$ 的安全条件为

$$\begin{aligned} & \Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta u_{ij} + \alpha_0\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij} + \\ & \Delta v_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij} - \frac{(\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij})^2}{\|\Delta x_{ij}\|^2} - \\ & 2\sqrt{n}\bar{b}_u\|\Delta x_{ij}\| - 2\alpha_0\sqrt{n}\bar{b}_v\|\Delta x_{ij}\| - \\ & 2\sqrt{n}\bar{b}_v\sqrt{\|\Delta v_{ij}\|^2 - \frac{(\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij})^2}{\|\Delta x_{ij}\|^2}} \geq \\ & -\alpha_1\|\Delta x_{ij}\|[\frac{\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij}}{\|\Delta x_{ij}\|} + \alpha_0(\|\Delta x_{ij}\| - \\ & D_{\text{safe}}) - 2\sqrt{n}\bar{b}_v] \end{aligned} \tag{31}$$

并可以将其改写为

$$-\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}u_i(t) - \Delta x_{ji}^{\mathrm{T}}u_j(t) \leq b_{ij} - \bar{b}_{ij} \tag{32}$$

其中, b_{ij} 定义如式 (15) 所示, 鲁棒补偿项 $\bar{b}_{ij}$ 定义为

$$\begin{aligned} \bar{b}_{ij} = & 2\sqrt{n}(\bar{b}_u + \alpha_0\bar{b}_v + \alpha_1\bar{b}_v)\|\Delta x_{ij}\| + \\ & 2\sqrt{n}\bar{b}_v\sqrt{\|\Delta v_{ij}\|^2 - \frac{(\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}\Delta v_{ij})^2}{\|\Delta x_{ij}\|^2}} \end{aligned} \tag{33}$$

基于上述推导, 智能体 i ($i \in \mathbf{I}[1,\ N]$) 的 HOCBF-QP 控制器可表述为

$$\begin{aligned} & u_i^* = \arg\min_{u_i \in U}\frac{1}{2}(u_i - u_i^{\text{nom}})^{\mathrm{T}}(u_i - u_i^{\text{nom}}) \\ & \text{s.t.} \quad -\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}}u_i \leq \frac{1}{2}(b_{ij} - \bar{b}_{ij}), \quad j \neq i \end{aligned} \tag{34}$$

相应地, 可推广“邻近”智能体的概念以考虑系统不确定性.

引理 2. 在由式 (20) 描述的带有不确定性多智能体系统中, 当假设 2 成立时, 无论控制输入 u_i 如何选取, 智能体 i ($i \in \mathbf{I}[1,\ N]$) 不会在短期内与任

何智能体 j ($j \notin \bar{\mathcal{M}}_i$) 碰撞, 其中集合

$$\bar{\mathcal{M}}_i = \left\{ j \neq i \middle| \|\Delta x_{ij}\| \leq D_{\text{safe}} + \frac{2(b_v + \bar{b}_v)}{\alpha_0} \right\} \quad (35)$$

证明过程与引理 1 相似, 故略.

基于上述讨论, 智能体 i ($i \in \mathbf{I}[1,\ N]$) 的 HOCBF-QP 控制器更新为

$$\begin{aligned} u_i^* &= \arg\min_{u_i \in U} \frac{1}{2}(u_i - u_i^{\text{nom}})^{\mathrm{T}}(u_i - u_i^{\text{nom}}) \\ \text{s.t.} \quad & -\Delta x_{ij}^{\mathrm{T}} u_i \leq \frac{1}{2}(b_{ij} - \bar{b}_{ij}), \quad j \in \bar{\mathcal{M}}_i \end{aligned} \quad (36)$$

定理 2. 在 HOCBF-QP 控制器 u_i^* (式 (36)) 的作用下, 带有不确定性多智能体系统 (21) 的安全性得以保证.

根据以上推导结果, 证明过程与引理 1 相似, 故略.

注 3. 本节的理论推导基于噪声上界的假设. 当该上界条件无法满足或未知时, 可采用数据驱动的方式进行鲁棒性分析, 例如增强学习、高斯过程回归等方法[24]. 相较于这些方法, 本文所提出的设计具有计算简便的优势, 而数据驱动方法往往对计算资源有较高要求. 在实际应用中, 可根据具体问题特点与资源约束, 灵活选择合适的方案.

4 数值仿真

例 1. 在本实验中, 考虑多智能体系统 (10) 的编队追踪控制, 其中系统的通信拓扑如图 1 所示. 对系统的控制目标是在领导者朝向其目标位置 x_d 移动时实现编队追踪. 编队形状对跟随者 i ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) 定义为 s_i. 控制目标可描述为 $x_0(t) \to x_d$, $v_0(t) \to \mathbf{0}_2$, $x_i(t) - x_0(t) - s_i \to \mathbf{0}_2$, $v_i(t) \to v_0(t)$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. 标称控制输入取为 $u_0^{\text{nom}} = -k_1(x_0 - x_d) - k_2 v_0$, $u_i^{\text{nom}} = -k_3(\sum_{j=1}^{4} a_{ij}((x_i - s_i) - (x_j - s_j)) + a_{i0}(x_i - x_0 - s_i)) - k_4(\sum_{j=1}^{4} a_{ij}(v_i - v_j) + a_{i0}(v_i - v_0))$, 其中, a_{ij} 表示通信拓扑邻接矩阵的元素: 若智能体 i 可以接收到 j 的信息, $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$. 另外, $a_{ii} = 0$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. 增益参数为 $k_1 = 1$, $k_2 = 0.5$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$. 跟随者的初始位置为

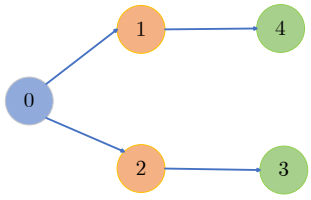


图 1 多智能体系统的通信拓扑

Fig. 1 Communication topology of multi-agent system

$[x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0),\ x_4(0)] = [(-2,\ 0),\ (-2.5,\ 0),\ (-3,\ 0),\ (-3.5,\ 0)]$, 编队形状描述为 $[s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4] = [(-1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (-2,\ -1),\ (-2,\ 1)]$. 领导者的初始位置为 $x_0(0) = (-1.5,\ 0)$, 目标位置为 $x_d = (5,\ 0)$. 初始时所有智能体速度为零. 参数值设置为 $b_v = 6$, $b_u = 6$, $\alpha_0 = 1$ 和 $\alpha_1 = 1$. 当应用本文所提出的 HOCBF-QP 控制器 (19) 时, 图 2 表明智能体能够保持安全距离, 确保了碰撞避免. 此外, 图 3 中呈现的每个跟随者的状态追踪误差 $e_x(t) = x_i(t) - x_0(t) - s_i$ 曲线和速度追踪误差 $e_v(t) = v_i(t) - v_0(t)$ 曲线, 证实了编队追踪控制目标的成功实现.

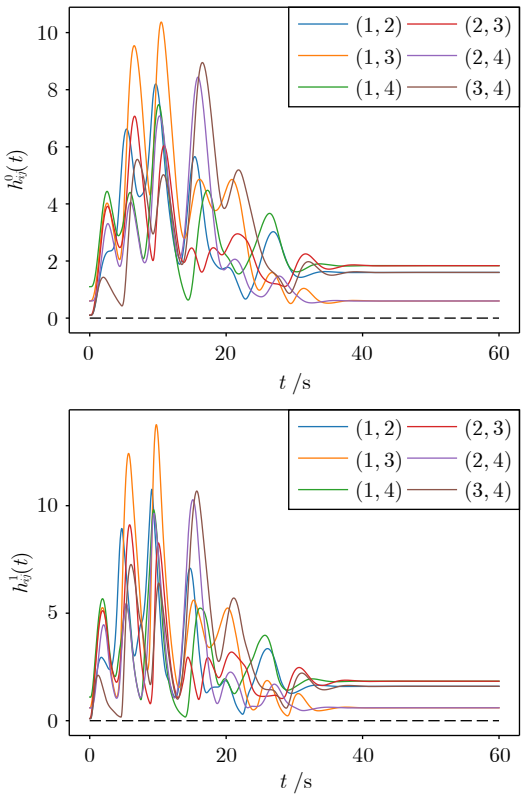


图 2 在控制器 (19) 的作用下, 智能体对 $(i,\ j)$ 的一阶 CBF $h_{ij}^0(t)$ 和二阶 CBF $h_{ij}^1(t)$

Fig. 2 First-order CBF $h_{ij}^0(t)$ and second-order CBF $h_{ij}^1(t)$ of agent pair under controller (19)$(i,\ j)$

例 2. 为进一步验证鲁棒 HOCBF 方法, 考虑由式 (21) 所描述的不确定性多智能体系统的编队追踪控制任务. 该多智能体系统包含一个具有时变速度 $v_0(t) = 0.5\sin(x_0(t))$ 的主动领导者和四个通过图 1 所示通信拓扑相连的跟随者. 跟随者 i ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) 的标称控制器设计为 $u_i^{\text{nom}} = -(x_i - \hat{x}_i - s_i) - (v_i - \hat{v}_i)$, 其中 $\hat{x}_i$ 和 $\hat{v}_i$ 分别表示跟随者 i 对领导者位置 x_0 和速度 v_0 的估计. 这些估计由以下动力学的分布式观测器产生:

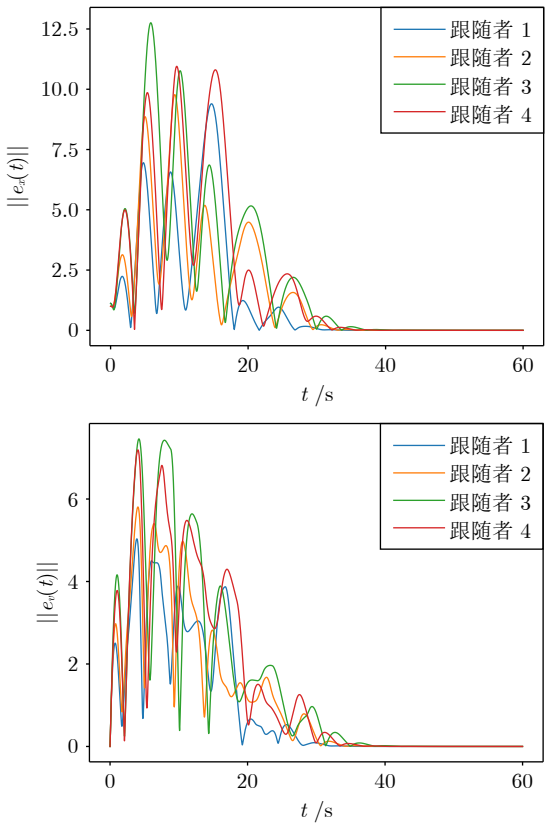


图 3　编队追踪误差 $\|e_x(t)\|$ 和速度追踪误差 $\|e_v(t)\|$

Fig. 3　Formation tracking error $\|e_x(t)\|$ and velocity tracking error $\|e_v(t)\|$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{v}_i - \left[\sum\limits_{j=1}^{4} a_{ij}(\hat{x}_i - \hat{x}_j) + a_{i0}(\hat{x}_i - x_0)\right] \\ \dot{\hat{v}}_i = -\left[\sum\limits_{j=1}^{4} a_{ij}(\hat{v}_i - \hat{v}_j) + a_{i0}(\hat{v}_i - v_0)\right] \end{cases}$$

不确定性的界设置为 $\bar{b}_v = 0.1$ 和 $\bar{b}_u = 0.1$. 所有其他参数和初始条件与例 1 中的一致. 在鲁棒 HOCBF-QP 控制器 (36) 的作用下, 图 4 展示了每个智能体对 $(i,\ j)$ 的一阶 CBF $h_{ij}^0(t)$ 和二阶 CBF $h_{ij}^1(t)$ 的变化曲线, 表明了系统的安全性.

5　结束语

本文基于 HOCBF 提出一套系统化的安全约束构造方法, 通过 QP 控制器在保障安全的同时尽可能保留原有性能. 利用 HOCBF 条件的对称性, 将集中式约束解耦为分布式, 并通过引入邻近智能体集合减少约束数量. 针对系统不确定项, 引入鲁棒补偿项 $\bar{b}_{ij}$, 设计鲁棒 HOCBF-QP 控制器, 并证明了安全集的前向不变性. 数值仿真在编队追踪任务中验证了方法的有效性. 未来工作将探索如何在保证安全的前提下, 进一步降低通信与计算开销, 并考虑将方法推广至更一般的非线性系统与复杂任务场景.

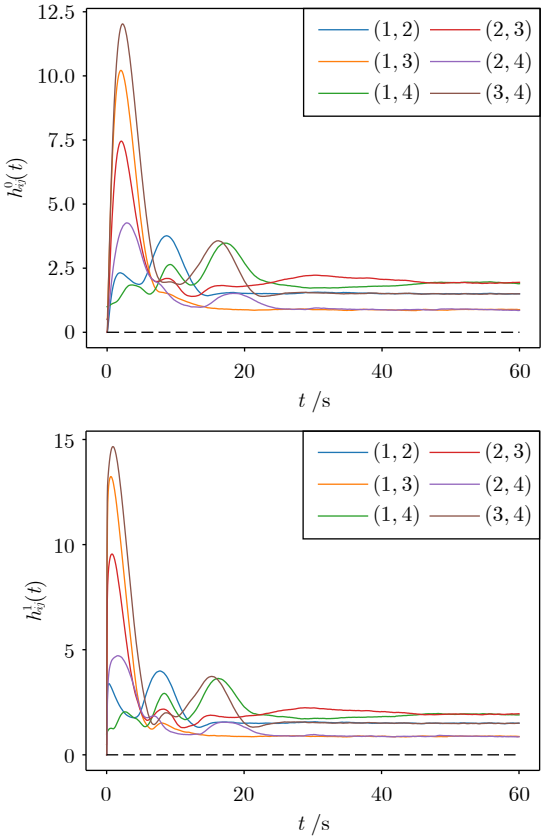


图 4　在控制器 (36) 的作用下, 智能体对 $(i,\ j)$ 的一阶 CBF $h_{ij}^0(t)$ 和二阶 CBF $h_{ij}^1(t)$

Fig. 4　First-order CBF $h_{ij}^0(t)$ and second-order CBF $h_{ij}^1(t)$ of agent pair $(i,\ j)$ under controller (36)

参考文献

1　Man J, Zeng Z. Adaptive neural finite-time deployment of heterogeneous multi-agent systems via a cross-species bionic PDE-ODE approach. *Artificial Intelligence Science and Engineering*, 2025, **1**(2): 52−63

2　Li B, Zhao L, Wen S. Periodic event-triggered consensus of stochastic multi-agent systems under switching topology. *Artificial Intelligence Science and Engineering*, 2025, **1**(2): 145−154

3　Isaly A, Ghanbarpour M, Sanfelice R G, Dixon W E. On the feasibility and continuity of feedback controllers defined by multiple control barrier functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(11): 7326−7339

4　Shaw-Cortez W, Oetomo D, Manzie C, Choong P. Control barrier functions for mechanical systems: Theory and application to robotic grasping. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2021, **29**(2): 530−545

5　Zeng J, Zhang B, Sreenath K. Safety-critical model predictive control with discrete-time control barrier function. In: Proceedings of American Control Conference (ACC). New Orleans, USA: IEEE, 2021. 3882−3889

6　Mondal A, Bhowmick C, Behera L, Jamshidi M. Trajectory tracking by multiple agents in formation with collision avoid-

ance and connectivity assurance. *IEEE Systems Journal*, 2018, **12**(3): 2449−2460

7 Lashkari N, Biglarbegian M, Yang S X. Development of a novel robust control method for formation of heterogeneous multiple mobile robots with autonomous docking capability. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2020, **17**(4): 1759−1776

8 Wisniewski R, Sloth C. Converse barrier certificate theorems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(5): 1356−1361

9 Tomlin C, Pappas G J, Sastry S. Conflict resolution for air traffic management: A study in multiagent hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 509−521

10 Wang L, Ames A D, Egerstedt M. Safety barrier certificates for collisions-free multirobot systems. *IEEE Transactions on Robotics*, 2017, **33**(3): 661−674

11 Fu J, Wen G, Yu X, Wu Z G. Distributed formation navigation of constrained second-order multiagent systems with collision avoidance and connectivity maintenance. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(4): 2149−2162

12 Wen G, Fu J, Wang B, Wang X, Shen H. Robust formation tracking of ASVs with nonconservative collision avoidance: A control barrier function-based approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2026, **73**(6): 9174−9186

13 Chen Y, Singletary A, Ames A D. Guaranteed obstacle avoidance for multi-robot operations with limited actuation: A control barrier function approach. *IEEE Control Systems Letters*, 2021, **5**(1): 127−132

14 Fu J, Wen G, Yu X. Safe consensus tracking with guaranteed full state and input constraints: A control barrier function-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(12): 8075−8081

15 Yan S, Shi L, Zhang H, Yao S, Zhou Y. Safety-critical model-free adaptive iterative learning control for multi-agent consensus using control barrier functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Ⅱ: Express Briefs*, 2024, **71**(1): 221−225

16 Chen G. Optimal synchronization of higher-order dynamical networks. *Artificial Intelligence Science and Engineering*, 2025, **1**(2): 31−36

17 Hsu S C, Xu X, Ames A D. Control barrier function based quadratic programs with application to bipedal robotic walking. In: Proceedings of American Control Conference (ACC). Chicago, USA: IEEE, 2015. 4542−4548

18 Xu X. Constrained control of input-output linearizable systems using control sharing barrier functions. *Automatica*, 2018, **87**: 195−201

19 Xiao W, Belta C. Control barrier functions for systems with high relative degree. In: Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Nice, France: IEEE, 2019. 4774−4779

20 Ames A D, Xu X, Grizzle J W, Tabuada P. Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(8): 3861−3876

21 Sastry S. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2013.

22 Lindemann L, Dimarogonas D V. Control barrier functions for signal temporal logic tasks. *IEEE Control Systems Letters*, 2019, **3**(1): 96−101

23 Tan X, Cortez W S, Dimarogonas D V. High-order barrier functions: Robustness, safety, and performance-critical control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(6): 3021−3028

24 Li B, Guo Z, Hu C, Zhu S, Wen S. Safe formation control of uncertain multiagent systems from a Bayesian perspective. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, **70**(3): 1929−1934



李博茜 天津科技大学人工智能学院讲师. 2025 年获得澳大利亚悉尼科技大学工程与信息技术学院博士学位. 主要研究方向为多智能体系统控制.
E-mail: liboqian@tust.edu.cn
(**LI Bo-Qian** Lecturer at the College of Artificial Intelligence, Tianjin University of Science and Technology. She received her Ph.D. degree from the Faculty of Engineering and Information Technology, University of Technology Sydney, Australia, in 2025. Her main research interest is control of multi-agent systems.)



胡 成 新疆大学数学与系统科学学院教授. 2012 年获得新疆大学数学与系统科学学院博士学位. 主要研究方向为微分方程, 神经网络.
E-mail: hucheng@xju.edu.cn
(**HU Cheng** Professor at the College of Mathematics and System Science, Xinjiang University. He received his Ph.D. degree from the College of Mathematics and System Science, Xinjiang University in 2012. His research interests include differential equations and neural networks.)



朱 松 中国矿业大学数学学院教授. 2010 年获得华中科技大学系统工程系博士学位. 主要研究方向为随机系统稳定性, 神经网络.
E-mail: songzhu@cumt.edu.cn
(**ZHU Song** Professor at the School of Mathematics, China University of Mining and Technology. He received his Ph.D. degree from the Department of Systems Engineering, Huazhong University of Science and Technology in 2010. His research interests include stability of stochastic systems and neural networks.)



温世平 深圳理工大学计算机科学与人工智能学院教授. 2013 年获得华中科技大学自动化学院博士学位. 主要研究方向为神经网络, 深度学习. 本文通信作者.
E-mail: wenshiping@suat-sz.edu.cn
(**WEN Shi-Ping** Professor at the Faculty of Computer Science and Artificial Intelligence, Shenzhen University of Advanced Technology. He received his Ph.D. degree from the School of Automation, Huazhong University of Science and Technology in 2013. His research interests include neural networks and deep learning. Corresponding author of this paper.)