自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA

有向非平衡图下基于预设时间的二阶多智能体系统广义纳什均衡搜索算法

朱亚楠 陈琪瑞 李涛

Prescribed-time Generalized Nash Equilibrium Seeking Algorithm for Second-order Multi-agent Systems Over Unbalanced Directed Graphs

ZHU Ya-Nan, CHEN Qi-Rui, LI Tao

在线阅读 View online: https://doi.org/10.16383/j.aas.c260053

您可能感兴趣的其他文章

基于事件触发二阶多智能体系统的固定时间比例一致性

Distributed Event-triggered Fixed-time Scaled Consensus Control for Second-order Multi-agent Systems

自动化学报. 2022, 48(1): 261-270 https://doi.org/10.16383/j.aas.c190128

基于连续时间的二阶多智能体分布式资源分配算法

Distributed Resource Allocation Algorithm for Second-order Multi-agent Systems in Continuous-time

自动化学报. 2021, 47(8): 2050-2060 https://doi.org/10.16383/j.aas.c200968

异构不确定二阶非线性多智能体系统事件触发状态趋同

Event-triggered State Consensus of Heterogeneous Uncertain Second-order Nonlinear Multi-agent Systems

自动化学报. 2025, 51(4): 804-812 https://doi.org/10.16383/j.aas.c240423

非匹配扰动下的多智能体系统固定时间一致跟踪

Fixed-time Consensus Tracking of Multi-agent Systems Under Unmatched Disturbances

自动化学报. 2021, 47(6): 1368-1376 https://doi.org/10.16383/j.aas.c190339

多智能体系统二分一致性的研究进展

Research Progress on Bipartite Consensus of Multi-agent Systems

自动化学报. 2025, 51(9): 1974-1987 https://doi.org/10.16383/j.aas.c240530

自适应分布式聚合博弈广义纳什均衡算法

Distributed Adaptive Generalized Nash Equilibrium Algorithm for Aggregative Games

自动化学报. 2024, 50(6): 1210-1220 https://doi.org/10.16383/j.aas.c230584

有向非平衡图下基于预设时间的二阶多智能体系统广义纳什均衡搜索算法

朱亚楠 [1, 2] 陈琪瑞 [1, 2] 李 涛 [1, 2, 3]

摘 要 针对一类带有全局耦合等式约束的分布式非合作博弈问题, 提出一种适用于二阶多智能体系统的预设时间分布式寻优算法. 研究目标是确保在强连通有向图拓扑下, 所有智能体能在预设时间内协同收敛至广义纳什均衡. 为克服通信拓扑权重不平衡带来的系统偏差, 算法采用两阶段收敛策略: 第一阶段利用一致性机制精确估计拉普拉斯矩阵的左特征向量, 实现拓扑补偿; 第二阶段通过引入阻尼项支持二阶积分型系统的稳定性分析, 并结合拉格朗日乘子法处理全局约束, 同时利用基于领导−跟随一致性协议的估计器重构对手的决策信息, 以实现伪梯度的分布式更新. 此外, 针对权重平衡有向图这一特殊情形, 给出算法的简化实现形式. 在博弈映射满足强单调性假设下, 通过引入时间变换函数并构造新型李雅普诺夫函数, 从理论上严格证明系统能够在预设时间内收敛至广义纳什均衡, 并确保收敛后的持续稳定性. 最后, 数值仿真实验验证了算法在不同拓扑结构下的有效性与收敛精度.

关键词 二阶多智能体系统; 广义纳什均衡; 预设时间; 有向非平衡图; 一致性协议

引用格式 朱亚楠, 陈琪瑞, 李涛. 有向非平衡图下基于预设时间的二阶多智能体系统广义纳什均衡搜索算法. 自动化学报, 2026, **52**(10): 2226−2240

DOI 10.16383/j.aas.c260053 **CSTR** 32138.14.j.aas.c260053

Prescribed-time Generalized Nash Equilibrium Seeking Algorithm for Second-order Multi-agent Systems Over Unbalanced Directed Graphs

ZHU Ya-Nan[1, 2] CHEN Qi-Rui[1, 2] LI Tao[1, 2, 3]

Abstract This paper investigates a class of distributed non-cooperative game problems with global coupling equality constraints and proposes a prescribed-time distributed seeking algorithm for second-order multi-agent systems. The research objective is to ensure that all agents cooperatively converge to the generalized Nash equilibrium within a prescribed-time under strongly connected directed graph topologies. To overcome system biases caused by weight-unbalanced communication topologies, a two-stage convergence strategy is adopted: In the first stage, a consistency mechanism is utilized to accurately estimate the left eigenvector of the Laplacian matrix for topology compensation; In the second stage, a damping term is introduced to support the stability analysis of the second-order integrator-type systems, combined with Lagrange multipliers to handle global constraints, while an estimator based on the leader-follower consensus protocol is employed to reconstruct opponents′ decision information for distributed pseudo-gradient updates. Furthermore, a simplified implementation of the algorithm for the special case of weight-balanced directed graphs is provided. Under the assumption of strong monotonicity of the game mapping, by introducing a time transformation function and constructing a novel Lyapunov function, it is theoretically and rigorously proved that the system can converge to the generalized Nash equilibrium within the prescribed-time and maintain sustained stability thereafter. Finally, numerical simulation experiments verify the effectiveness and convergence accuracy of the algorithm under different topological structures.

Keywords second-order multi-agent systems; generalized Nash equilibrium; prescribed-time; unbalanced directed graphs; consensus protocol

Citation Zhu Ya-Nan, Chen Qi-Rui, Li Tao. Prescribed-time generalized Nash equilibrium seeking algorithm for second-order multi-agent systems over unbalanced directed graphs. *Acta Automatica Sinica*, 2026, **52**(10): 2226−2240

收稿日期 2026-01-21 录用日期 2026-03-26
Manuscript received January 21, 2026; accepted March 26, 2026
国家自然科学基金 (62573235, 62373195) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (62573235, 62373195)
本文责任编委 付俊杰
Recommended by Associate Editor FU Jun-Jie

1. 南京信息工程大学自动化学院 南京 210044 2. 南京信息工程大学江苏省大气环境与装备技术协同创新中心 南京 210044 3. 南京信息工程大学临近空间环境特性及效应全国实验室 南京 210044
1. School of Automation, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044 2. Jiangsu Collaborative Innovation Center of Atmospheric Environment and Equipment Technology (CICAEET), Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044 3. State Key Laboratory of Environment Characteristics and Effects for Near-space, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044

随着网络化系统在规模、复杂度与任务耦合度方面的不断提升, 仅依赖局部信息实现多智能体间策略竞争与协同的分布式算法, 在智能电网[1]、智能制造[2] 以及无人集群[3−6] 等场景中展现出巨大潜力. 其中, 非合作博弈的分布式纳什均衡搜索算法尤为突出[7], 该算法中各智能体仅通过与邻居交换信息独立优化自身策略, 最终收敛到所有智能体策略均互为最优的纳什均衡. 与依赖全局信息的集中式方法相比, 此类分布式算法不仅能够有效降低通信与计算负担, 还具有更强的鲁棒性与容错性.

近十几年来, 围绕非合作博弈中分布式纳什均衡搜索问题的研究已取得一系列具有代表性的成果. 例如, 文献 [8] 提出一种基于领导−跟随一致性协议与梯度估计相结合的分布式算法, 可在局部通信条件下保证系统指数收敛至纳什均衡. 文献 [9] 提出一种基于动态平均一致性协议的聚合博弈分布式纳什均衡搜索算法. 文献 [10] 提出一种无源性算法, 通过在局部通信下引入拉普拉斯一致性反馈来校正策略估计, 使得系统可收敛至纳什均衡. 同时, 针对带有约束的分布式广义纳什均衡搜索问题, 文献 [11] 提出一种基于投影的算法, 解决了凸集约束的问题; 文献 [12] 提出一种基于原始对偶的算法, 解决了不等式约束问题; 文献 [13] 利用连续时间动态系统, 解决了有向图架构内具有局部及耦合等式约束的广义纳什均衡求解问题.

为贴合多智能体系统在现实物理环境中的动态演化特性, 相关研究已广泛扩展至不同动力学约束下的博弈求解问题. 例如, 针对带耦合等式约束的欧拉−拉格朗日多智能体聚合博弈问题, 文献 [1] 提出一类基于动态平均共识机制的分布式纳什均衡搜索算法; 文献 [14] 针对一阶积分型多智能体系统, 提出一种基于双层自适应机制的完全分布式纳什均衡搜索算法; 文献 [15] 针对二阶积分型系统, 通过引入阻尼项克服系统惯性带来的动态耦合问题, 保证策略轨迹与物理状态演化的协调一致; 文献 [16] 针对一般线性系统模型, 分别提出基于状态反馈与基于输出反馈的分布式纳什均衡搜索算法, 并对状态不可测情形引入分布式观测器以解决信息不完备问题; 文献 [17] 针对带有扰动的异构多智能体系统, 提出一种基于高阶滑模微分器的精确估计方法.

尽管现有工作已能确保系统在无限时间内趋于纳什均衡, 但工程实践对动态响应性能的高度敏感使得研究逐渐转向有限时间收敛[18−20]. 针对有限时间收敛技术中收敛时间受制于初始状态的缺陷, 固定时间收敛技术[21−26] 通过提供与初始值无关的常数上界给出解决方案. 然而, 由于其收敛时间上界仍难以在系统运行前根据任务需求进行精确预设, 相关研究正逐渐转向更具时限可控性的预设时间收敛. 例如, 针对无约束的非合作博弈问题, 文献 [27] 基于领导−跟随一致性协议, 研究一阶多智能体系统的预设时间分布式博弈问题. 文献 [28] 提出一种基于自适应机制的预设时间分布式纳什均衡搜索算法, 通过指数参数与逼近理论处理异构高阶动态与未知不确定性, 使各智能体在预设时间内收敛到唯一纳什均衡并保证控制输入有界. 文献 [29] 研究受未知时变干扰影响的系统, 提出基于预设时间的分布式自适应积分滑模纳什均衡搜索算法. 注意到, 上述工作主要适用于无向图. 针对强连通且权重平衡的有向图, 文献 [30] 基于时间生成器与事件触发通信机制, 提出一种分布式纳什均衡搜索算法. 针对强连通且权重不平衡的有向图, 相关研究仍处于起步阶段. 文献 [31] 针对有向图下的无约束纳什均衡博弈问题, 提出一种基于自适应增益的预设时间分布式搜索算法. 为克服拓扑不平衡带来的偏差, 文献 [32] 构建一种预设时间估计器, 使系统先估计拉普拉斯矩阵的左特征向量, 再利用基于点的全分布式领导−跟随一致性协议估计邻居信息, 实现高阶不确定非线性系统在预设时间内的纳什均衡精确搜索. 此外, 文献 [33−34] 分别解决了异构线性系统下带有全局耦合等式约束的分布式优化问题与无约束的分布式联盟博弈问题.

受上述分析启发, 本文针对带有全局耦合等式约束的非合作博弈问题, 提出一种适用于二阶积分型动力学系统的预设时间分布式纳什均衡搜索算法. 利用一致性协议与预设时间估计器协同作用, 首先对拉普拉斯矩阵的左特征向量进行估计, 以补偿权重不平衡引起的通信偏差; 随后, 引入阻尼项处理二阶积分型系统, 利用拉格朗日乘子法处理全局耦合等式约束, 并借助基于领导−跟随一致性协议的估计器估计邻居信息, 以更新自身梯度. 在强连通有向图下, 所设计的算法能够在预设时间内收敛到纳什均衡, 并在预设时间之后保持收敛性. 本文的创新点如下: 1) 针对强连通且权重不平衡的有向图, 本文提出一种新的预设时间分布式纳什均衡搜索算法. 与现有文献只适用于无向图[27−29] 或有向平衡图[30] 算法相比, 该算法通过先估计左特征向量, 对不平衡信息流进行补偿, 有效克服了有向图信息流不对称的结构性限制, 使得算法在强连通且权重不平衡的有向图下, 依然能够实现预设时间收敛. 2) 现有文献 [27, 29−30] 仅考虑一阶动力学系统, 难以应用于含位置与速度双状态的实际被控对象, 本文通过引入阻尼项将算法拓展至二阶动力学系统,

提升了算法在实际物理系统中的适用性. 此外, 本文考虑带有全局耦合等式约束的非合作博弈问题, 与文献 [27−32] 只考虑无约束的非合作博弈问题相比, 通过构建拉格朗日乘子更新机制, 实现在无中心协调的情况下对全局耦合等式约束的一致满足. 同时, 解决了仅考虑全局耦合等式约束[1, 13], 却不能在预设时间内同时处理二阶动力学系统与全局耦合等式约束的问题. 3) 通过构建新型李雅普诺夫函数并结合时间变换函数, 本文严格证明了二阶多智能体系统能够在预设时间内收敛至广义纳什均衡点, 并确保了预设时间结束后系统的持续稳定性与零误差状态.

本文结构安排如下: 第 1 节主要介绍网络拓扑和问题描述; 第 2 节提出预设时间下的分布式广义纳什均衡搜索算法和收敛性分析; 第 3 节通过数值仿真实验验证理论结果; 第 4 节对全文进行总结并对未来进行展望.

符号说明. $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维列向量空间, $\mathbf{R}^{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 维矩阵空间. I_n 表示 n 维单位矩阵. $\mathbf{0}_n$ 是一组元素为 0 的 n 维列向量, $\mathbf{1}_n$ 是一组元素为 1 的 n 维列向量. $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数. $\otimes$代表克罗内克积. $\ln(\cdot)$表示以自然常数 e为底的对数函数. $\mathrm{diag}\{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n\}$ 表示由 $x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n$ 构成的对角矩阵或对角矩阵块. $\mathrm{col}(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n)$ 表示由 $x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n$ 构成的聚合向量. $\nabla f(x)$ 表示函数 $f(x)$ 的梯度. $\min\{\cdot\}$ 表示求最小值, $\max\{\cdot\}$ 表示求最大值. $\lambda_{\max}(A)$ 表示矩阵 A 的最大特征值, $\lambda_{\min}(A)$ 表示矩阵 A 的最小特征值. $\xi_{\min}$ 表示左特征向量 ξ 的最小分量.

1 预备知识及问题描述

1.1 预备知识

本节首先给出有向图论的相关基本概念与符号说明. 有向图定义为 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\, \mathcal{E},\, \mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{V}=\{1,\, 2,\, \cdots,\, N\}$ 表示节点集, $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ 表示由有序节点对 $(j,\, i)$ 构成的边集, $\mathcal{A}=(a_{ij})_{N\times N}\in\mathbf{R}^{N\times N}$ 表示图的邻接矩阵. 若 $(j,\, i)\in\mathcal{E}$, 则表示节点 i 能够从节点 j 接收信息, 即 j 是 i 的入邻居, 此时 $a_{ij}>0$; 若不然, 则 $a_{ij}=0$, 此外 $a_{ii}=0$. 从节点 i 到节点 j 的有向路径是若干有向边的序列: $(i,\, i_1)$, $(i_1,\, i_2)$, $\cdots$, $(i_k,\, j)$. 若任意两个不同节点之间均存在一条有向路径, 则称图 $\mathcal{G}$ 为强连通图. 节点 i 的入度定义为 $d_i^{\mathrm{in}}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}$, 出度定义为 $d_i^{\mathrm{out}}=\sum_{j=1}^{N}a_{ji}$. 有向图的拉普拉斯矩阵 $L_N=D^{\mathrm{in}}-\mathcal{A}$, 其中, $D^{\mathrm{in}}=\mathrm{diag}\{d_1^{\mathrm{in}},\, d_2^{\mathrm{in}},\, \cdots,\, d_N^{\mathrm{in}}\}$. 若图是有向且权重平衡的, 则对于所有 $i\in\mathcal{V}$, 均有 $d_i^{\mathrm{out}}=d_i^{\mathrm{in}}$, 即 $\mathbf{1}_N^{\mathrm{T}}L_N=\mathbf{0}_N^{\mathrm{T}}$.

引理 1. 假设图 $\mathcal{G}$ 是强连通的, 其拉普拉斯矩阵 L_N 有以下性质[13, 33]:

1) 存在一个正的左特征向量 $\xi=[\xi_1,\, \xi_2,\, \cdots,\, \xi_N]^{\mathrm{T}}$, 使得 $\xi^{\mathrm{T}}L_N=\mathbf{0}_N^{\mathrm{T}}$ 且 $\sum_{i=1}^{N}\xi_i=1$;

2) $L_N\mathbf{1}_N=\mathbf{0}_N$;

3) $\min_{\mathbf{1}_N^{\mathrm{T}}x=0}x^{\mathrm{T}}\tilde{L}x\geq\eta_2(\tilde{L})\|x\|^2$, 其中 $\tilde{L}=(\Xi L_N+L_N^{\mathrm{T}}\Xi)/2$, $\Xi=\mathrm{diag}\{\xi_1,\, \xi_2,\, \cdots,\, \xi_N\}$, $\eta_2(\tilde{L})>0$是 $\tilde{L}$第二小的特征值;

4) $\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-L_Nt}=\mathbf{1}_N\xi^{\mathrm{T}}$.

定义 1. 考虑一个由 N 个智能体组成的非合作博弈. 若策略组合 $x^*=(x_i^*,\, \boldsymbol{x}_{-i}^*)$ 满足: 任何一个智能体 i 都无法通过单方面改变自身策略 x_i 来减小其目标函数 (代价函数) J_i, 则称该策略组合 x^* 为一个纳什均衡, 即:

$$J_i(x_i^*,\, \boldsymbol{x}_{-i}^*)\leq J_i(x_i,\, \boldsymbol{x}_{-i}^*),\quad \forall x_i\in\mathcal{X}_i,\, i\in\mathcal{V}$$

其中, x_i 表示第 i 个智能体的策略; $\mathcal{X}_i\subseteq\mathbf{R}^n$ 表示智能体 i 的可行策略集; $\boldsymbol{x}_{-i}=[x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_{i-1},\, x_{i+1},\, \cdots,\, x_N]^{\mathrm{T}}$ 表示除智能体 i 以外其他所有智能体的策略聚合向量. 当各智能体的可行策略集受到其他智能体策略的约束, 即策略空间相互耦合 $(x_i\in\mathcal{X}_i(\boldsymbol{x}_{-i}))$ 时, 上述纳什均衡称为广义纳什均衡[35].

引理 2. 考虑动力学系统 $\dot{w}(t)=f(t,\, w(t))$, 其解记为 $U(t)$, 初值为 $w(0)=w_0$. 给定预设收敛时间为 $T>0$, 则存在一个严格递增且连续可微的时间变换函数 $t=\varphi(\tau)$[36], 其中 $\tau\in[0,\, +\infty)$. 该函数 $\varphi(\tau)$ 满足以下性质[32]: $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=T$, $\lim_{\tau\to\infty}\varphi(\tau)=T$ 以及 $\lim_{\tau\to\infty}\varphi'(\tau)=0$. 定义新变量 $S(\tau):=U(t)$, 则原系统可重写为 $S'(\tau)=\varphi'(\tau)f(\varphi(\tau),\, S(\tau))$, 其初值满足 $S(0)=w_0$, 且对于任意 $t\in[0,\, T)$, 通过该时间变换均有 $\lim_{\tau\to\infty}S(\tau)=\lim_{t\to T^-}U(t)$. 其中 $S'(\tau)=\frac{\mathrm{d}S(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$, $\varphi'(\tau)=\frac{\mathrm{d}\varphi(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$, T^- 表示从 T 的左侧逼近 T.

1.2 问题描述

考虑由 N 个智能体组成的连续时间系统, 每个智能体遵循如下二阶积分型动力学方程:

$$\begin{cases}\dot{x}_i=v_i\\ \dot{v}_i=u_i\end{cases}\tag{1}$$

其中, $v_i\in\mathbf{R}^n$ 为智能体 i 对应的速度状态; $u_i\in\mathbf{R}^n$ 为待设计的控制输入.

上述 N 个智能体作为博弈的参与者, 通过局部通信寻求如下分布式非合作博弈问题的最优策略组合:

$$\min_{x_i\in\mathbf{R}^n}\ J_i(x_i,\ \boldsymbol{x}_{-i})$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}d_i \tag{2}$$

其中, $J_i(x_i,\ \boldsymbol{x}_{-i})$ 表示第 i 个智能体的目标函数; $d_i\in\mathbf{R}^n$ 表示第 i 个智能体对应的给定资源参数.

注 1. 问题 (2) 的全局耦合等式约束常用于表达多智能体协同系统中的全局资源分配与供需平衡问题. 在实际应用中, 此类约束具有广泛的物理背景, 例如在智能电网的经济调度中, 该约束代表了总负荷需求与各发电机组出力之间的功率平衡[1]; 在无人机集群任务中, 则可体现为有限任务资源在各节点间的优化分配或集群总推进功率的协调限制等[3, 22].

为保证该分布式非合作博弈问题中变分广义纳什均衡的存在性与唯一性, 引入以下假设:

假设 1. 有向通信拓扑 $\mathcal{G}$ 是强连通的.

假设 2. 定义博弈映射 $\nabla J(x)=\mathrm{col}(\nabla_i J_i(x))_{i=1}^N$. $\nabla J(x)$ 是 g-强单调的, 即存在 $g>0$ 满足:

$$(x-y)^{\mathrm{T}}(\nabla J(x)-\nabla J(y))\geq g\|x-y\|^2$$

假设 3. $\nabla J(x)$ 是全局利普希茨连续的, 即存在 $\ell_1>0$ 满足:

$$\|\nabla J(y)-\nabla J(x)\|\leq\ell_1\|y-x\|$$

引理 3. 若假设 2 成立, 当 x^* 是变分等式 (4) 的解, 则 $x^*=(x_i^*,\ \boldsymbol{x}_{-i}^*)$ 是博弈问题 (2) 的一个广义纳什均衡点, 且存在 $\lambda^*\in\mathbf{R}^{Nn}$, 使得 x^* 与 λ^* 满足:

$$\begin{cases}\mathbf{0}_n=\nabla J_i(x_i^*,\ \boldsymbol{x}_{-i}^*)-\lambda_i^*\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N}x_i^*=\sum_{i=1}^{N}d_i\end{cases} \tag{3}$$

其中, $\forall i$、j 都满足 $\lambda_i^*=\lambda_j^*$, 并且 $\lambda^*=\mathbf{1}_N\otimes\lambda_c^*$, λ_c^* 为全局拉格朗日一致性乘子.

证明. 由文献 [35] 可知, 若 x^* 是如下变分等式的解:

$$(x-x^*)^{\mathrm{T}}\nabla J(x^*)=0 \tag{4}$$

则 x^* 是博弈问题 (2) 的一个广义纳什均衡点. 实际上变分等式 (4) 等价于如下优化问题:

$$\min_x x^{\mathrm{T}}\ \nabla J(x^*)\quad \text{s.t.}\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}d_i \tag{5}$$

由文献 [37] 可知, 问题 (5) 的最优性条件满足:

$$\mathbf{0}_{Nn}=\nabla J(x^*)-\lambda^*,\quad \sum_{i=1}^{N}x_i^*=\sum_{i=1}^{N}d_i$$

□

本文的研究目标是针对具有物理动力学约束的二阶系统 (1), 设计分布式控制算法, 使得在强连通有向图下, 所有智能体的策略 $x_i(t)$ 在预设时间 T 内收敛至满足式 (3) 的广义纳什均衡点 x_i^*.

2　算法设计与稳定性分析

2.1　有向非平衡图下基于预设时间的算法设计

为实现二阶系统 (1) 对博弈均衡点 (3) 的预设时间收敛, 本节提出如下分布式算法方案. 引入辅助变量 $z_i=v_i/\phi(t)$, 其中 $\phi(t)$ 为待定义的时间变换函数. 每个智能体 $i\in\mathcal{V}$ 根据如下动态方程更新其局部状态及策略:

$$u_i=\dot v_i=\dot\phi(t)z_i+\phi(t)\dot z_i \tag{6}$$

其中, $\dot z_i$ 的演化机制及相关估计器的构建如下:

$$\begin{cases}\dot z_i=-\phi(t)(\nabla_i J_i(y_i)-\lambda_i+k_1z_i)\\ \dot\lambda_i=-\phi(t)\Big((w_i^i)^{-1}(x_i-d_i+z_i)+\mu_i+\\ \qquad b\displaystyle\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)\Big)\\ \dot\mu_i=\phi(t)\ b\displaystyle\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)\\ \dot w_i=-\phi_z(t)\displaystyle\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(w_i-w_j)\\ \dot y_{ij}=-\phi(t)k_2\Big(\displaystyle\sum_{l=1}^{N}a_{il}(y_{ij}-y_{lj})+a_{ij}(y_{ij}-x_j)\Big)\end{cases} \tag{7}$$

其中, 辅助变量 $z_i\in\mathbf{R}^n$ 用于镇定智能体的二阶动力学系统; λ_i、$\mu_i\in\mathbf{R}^n$ 协同确保系统满足全局耦合等式约束; $y_i\in\mathbf{R}^{Nn}$ 表示智能体 i 对全体决策的估计; $y_{ij}\in\mathbf{R}^n$ 为 y_i 的第 j 个子向量, 表示智能体 i 对智能体 j 的策略 x_j 的分布式估计; $w_i\in\mathbf{R}^N$ 为左特征向量估计器的状态变量, 其第 j 个分量记为 w_i^j, 初始条件设定为: 对于所有 $i\in\mathcal{V}$, 满足 $w_i^i(0)=1$, 且当 $j\neq i$ 时, $w_i^j(0)=0$; k_1、k_2、b 为正调节参数; $\phi(t)$ 与 $\phi_z(t)$ 为时间变换函数.

注 2. 式 (7) 的核心设计采用了分段策略: 第一阶段在预设时间内完成对左特征向量的估计; 第二阶段则利用该估计值补偿通信网络的不平衡性. 在此基础上, 算法结合领导–跟随一致性协议估计邻居信息, 并引入广义拉格朗日乘子机制来处理全局耦合等式约束; 同时, 通过添加阻尼项镇定二阶动

力学系统, 并依据 KKT 条件引导系统向纳什均衡点收敛.

算法 (6) ~ (7) 中的时间变换函数 $\phi(t)$ 和 $\phi_z(t)$ 定义如下:

$$\phi(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,\ a_1T)\\ \dfrac{(1-a_1)T}{T-t}, & t\in[a_1T,\ T)\\ 1, & t\in[T,\ +\infty)\end{cases}$$

$$\phi_z(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{a_1T-t}, & t\in[0,\ a_1T)\\ 1, & t\in[a_1T,\ +\infty)\end{cases}$$

其中, $0<a_1<1$ 是预设的时间分配参数. 在 $t\in[a_1T,\ T)$, 其导数满足 $\dot{\phi}(t)=(1-a_1)T/(T-t)^2$.

注 3. 本文算法的设计受到了文献 [32] 中二阶段处理机制的启发. 其中, 针对对手决策的分布式一致性估计采用了常用的估计机制, 相关思想在文献 [8, 28, 31] 中亦有体现. 然而, 与文献 [8, 28, 31–32] 侧重于无约束博弈问题不同, 本文进一步考虑了决策间存在全局耦合等式约束的情形, 这要求算法在预设时间内不仅要克服拓扑不平衡, 还需处理复杂的拉格朗日乘子动力学耦合, 极大地增加了理论证明的挑战性. 此外, 相比于文献 [13] 仅针对一阶系统实现的渐近收敛结果, 本文将分布式博弈框架推广至二阶动力学系统, 并实现了收敛速度从无穷时间到预设时间的跨越.

算法 (6) ~ (7) 的正调节参数 b、k_1、k_2 需满足以下稳定性判据, 以保证下文定理 1 证明中 $V>0$ 且 $\dot{V}\le 0$.

$$\begin{cases}b>\dfrac{(\beta+1)^2}{\beta\eta_2(\tilde{L})}, & \beta>\max\left\{\dfrac{2}{g\xi_{\min}}-1,\ 0\right\}\\ k_1>\dfrac{3}{2}+\dfrac{\ell_1^2N}{g}+\dfrac{1}{\xi_{\min}(\beta+1)}+2\lambda_{\max}(P)\\ k_2>\dfrac{(\beta+1)(\frac{\ell_1^2}{g}+\frac{\ell_1^2}{2})+\frac{\lambda_{\max}(P)}{2(\beta+1)}N}{\lambda_{\min}(Q)}\end{cases}\tag{8}$$

其中, P、Q 是与系统稳定性相关的正定矩阵, 将在定理 1 的证明中给出.

注 4. 需要指出的是, 虽然文献 [31–32] 在无约束博弈中实现了参数自适应, 但在有向图拓扑下, 针对带有约束的博弈问题实现完全自适应仍面临显著的理论障碍. 目前, 多数涉及约束的有向图算法 (如文献 [13, 33]) 仍需依赖拉普拉斯矩阵的第二最小特征值等全局网络信息来选取控制参数. 在预设时间框架下, 如何消除增益设计对全局拓扑参数的依赖, 并同时兼顾约束处理的稳定性, 是当前研究的主要难点. 正如下文注 5 所述, 本文算法的参数选取在一定程度上仍依赖于离线判据, 而实现完全分布式的自适应调节将作为未来研究的重要方向.

为了便于稳定性分析, 定义共识误差为 $e_{ij}=y_{ij}-x_j$, 即 $e=y-\mathbf{1}_N\otimes x$. 结合动力学方程 (1) 与式 (7), 系统的紧凑形式为:

$$\begin{cases}\dot{x}=v=\phi(t)z\\ \dot{z}=-\phi(t)\left(\nabla J(y)-\lambda+k_1z\right)\\ \dot{\lambda}=-\phi(t)\Big((W_N^{-1}\otimes I_n)(x-d+z)+\mu+bL\lambda\Big)\\ \dot{\mu}=\phi(t)bL\lambda\\ \dot{w}=-\phi_z(t)\left(L_N\otimes I_N\right)w\\ \dot{y}=-\phi(t)k_2Me\end{cases}\tag{9}$$

其中, 聚合向量与矩阵定义如下: $x=\mathrm{col}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$; $v=\mathrm{col}(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_N)$; $z=\mathrm{col}(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_N)$; $\lambda=\mathrm{col}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_N)$; $d=\mathrm{col}(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_N)$; $\mu=\mathrm{col}(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_N)$; $w_i=\mathrm{col}(w_i^1,\ w_i^2,\ \cdots,\ w_i^N)$; $w=\mathrm{col}(w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_N)$; $W_N=\mathrm{diag}\{w_1^1,\ w_2^2,\ \cdots,\ w_N^N\}$; $y_i=\mathrm{col}(y_{i1},\ y_{i2},\ \cdots,\ y_{iN})$; $y=\mathrm{col}(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_N)$; $e_i=\mathrm{col}(e_{i1},\ e_{i2},\ \cdots,\ e_{iN})$; $e=\mathrm{col}(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_N)$; $L=L_N\otimes I_n$; $M=(L_N\otimes I_N)\otimes I_n+A_0$, $A_0=\mathrm{diag}\{a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1N},\ a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2N},\ \cdots,\ a_{N1},\ a_{N2},\ \cdots,\ a_{NN}\}\otimes I_n$, 以及 $\nabla J(y)=\mathrm{col}(\nabla_1J_1(y_1),\ \nabla_2J_2(y_2),\ \cdots,\ \nabla_NJ_N(y_N))$.

引理 4. 在假设 1 ~ 假设 3 成立且初值设定为 $\mu(0)=\mathbf{0}_{Nn}$ 的条件下, 令状态向量 $\mathrm{col}(x^*,\ z^*,\ \lambda^*,\ \mu^*,\ w^*,\ y^*)$ 为紧凑系统 (9) 的一个平衡点, 则 x^* 是博弈问题 (2) 的广义纳什均衡点.

证明. 紧凑系统 (9) 的平衡点满足以下条件:

$$\mathbf{0}_{Nn}=z^*\tag{10a}$$

$$\mathbf{0}_{Nn}=\nabla J(y^*)-\lambda^*+k_1z^*\tag{10b}$$

$$\mathbf{0}_{Nn}=\mu^*+bL\lambda^*+((W_N^{-1})^*\otimes I_n)(x^*-d+z^*)\tag{10c}$$

$$\mathbf{0}_{Nn}=bL\lambda^*\tag{10d}$$

$$\mathbf{0}_{N^2}=(L_N\otimes I_N)w^*\tag{10e}$$

$$\mathbf{0}_{N^2n}=-k_2Me^*\tag{10f}$$

根据引理 1, 可以进一步知道 $\lim_{t\to\infty}w=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(L_N\otimes I_N)t}w(0)=(\mathbf{1}_N\xi^{\mathrm{T}}\otimes I_N)w(0)=\mathbf{1}_N\otimes\xi$. 此外, $\lim_{t\to\infty}W_N^{-1}=\Xi^{-1}$. 因此, $w^*=\mathbf{1}_N\otimes\xi$ 且 $(W_N^{-1})^*=\Xi^{-1}$. 由式 (10d) 可知 $\lambda_i^*=\lambda_j^*$, 对式 (10c) 左乘 $\xi^{\mathrm{T}}\otimes I_n$, 得 $\sum_{i=1}^N x_i^*=\sum_{i=1}^N d_i$. 由式 (10b) 得, $\nabla J(y^*)=\lambda^*$, 即 $\nabla_iJ_i(y_i^*)=\nabla_jJ_j(y_j^*)$. 因为, $-M$

是 Hurwitz 矩阵, 由式 (10f) 得 $e^* = \mathbf{0}_{N^2n}$, 即 $y^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$. 根据引理 3, 可以知道紧凑系统 (9) 在平衡点处 x^* 和 λ^* 满足式 (3), 这意味着 x^* 是广义纳什均衡点. □

定理 1. 在假设 1 ∼ 假设 3 成立且初值设定为 $\mu(0) = \mathbf{0}_{Nn}$ 的前提下, 若参数 b、β、k_1 以及 k_2 满足条件 (8), 则二阶多智能体系统在算法 (6) ∼ (7) 的作用下具有以下结论:

1) 在第一阶段 $t \in [0,\ a_1T)$ 内, 辅助变量 $w_i(t)$ 能够在预设时间 a_1T 内收敛至拉普拉斯矩阵的左特征向量 ξ, 且在 $t \geq a_1T$ 时保持收敛状态.

2) 在第二阶段 $t \in [a_1T,\ T)$ 内, 多智能体系统的策略能够收敛至博弈问题 (2) 的广义纳什均衡点, 即满足 $\lim_{t\to T^-} \|y - \mathbf{1}_N \otimes x^*\| = 0$; 在 $t \geq T$ 后, 系统始终保持在该均衡状态.

证明. 定理 1 的证明逻辑分为三个阶段: 首先, 利用时间变换函数 $\phi_z(t)$ 的性质, 通过一致性机制证明估计器 $w_i(t)$ 能够在预设时间 a_1T 内精确收敛至有向图的左特征向量 ξ; 其次, 在已获得精确特征向量估计的前提下, 通过构造新型李雅普诺夫函数并结合时间变换函数 $\phi(t)$, 证明系统状态能够在预设时间内收敛至广义纳什均衡点; 最后, 通过分析不含预设时间增益项的闭环动力学, 证明系统状态在预设时间后可以保持在均衡状态.

步骤 1 ($t \in [0,\ a_1T)$)**.** $\dot{w}(t) = -(1/(a_1T - t))(L_N \otimes I_N)w(t)$. 借助引理 2, 引入 $t = \varphi(\tau) = a_1T(1 - \mathrm{e}^{-\tau})$ 的时间变换函数. 这意味着当 $\tau \to \infty$ 时, $t \to a_1T$; 同时, $\varphi'(\tau) = a_1T\mathrm{e}^{-\tau}$. 由引理 2 可知, 原本有限时间区间 $t \in [0,\ a_1T)$ 被映射到无限时间区间 $\tau \in [0,\ \infty)$, $\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau} = a_1T\mathrm{e}^{-\tau} = a_1T - t$. 因此,

$$\begin{aligned} S'(\tau) = &-\frac{1}{a_1T - t}\varphi'(\tau)(L_N \otimes I_N)S(\tau) = \\ &-(L_N \otimes I_N)S(\tau) \end{aligned} \tag{11}$$

且有初始条件 $S(\varphi^{-1}(0)) = w(0)$. 根据引理 1 可知 $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-L_Nt} = \mathbf{1}_N\xi^{\mathrm{T}}$. 对式 (11) 对应的线性系统进行求解并取极限, 可得 $S(\tau) = \mathrm{e}^{-(L_N\otimes I_N)\tau}S(0)$. 当 $\tau \to \infty$ 时, $\lim_{\tau\to\infty} S(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathrm{e}^{-(L_N\otimes I_N)\tau}S(0) = \mathbf{1}_N \otimes \xi$. 通过时间变化函数的性质可知, 当 $t = a_1T$ 时, $w(t)$ 收敛至 $\mathbf{1}_N \otimes \xi$.

步骤 2 ($t \in [a_1T,\ T)$)**.** 考虑如下的李雅普诺夫函数 $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$, 其中 $V_1 = \frac{\beta+1}{2}(k_1 - 1)||x - x^*||^2 + \frac{\beta+1}{2}||x - x^* + z - z^*||^2$, $V_2 = \frac{\beta}{2}(\lambda - \lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)(\lambda - \lambda^*) + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^* + \mu - \mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n) \times(\lambda - \lambda^* + \mu - \mu^*)$, $V_3 = \frac{\varepsilon}{2}\|x - x^* + z - z^*\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|z - z^* - (\Xi^{\frac{1}{2}} \otimes I_n)(\lambda - \lambda^*)\|^2$ 以及 $V_4 = e^{\mathrm{T}}(P \otimes I_{Nn})e$, ε 为非常小的正参数. 函数 V_1 对时间 t 的归一化导数 $\dot{V}_1/\phi(t)$ 满足如下不等式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi(t)}\dot{V}_1 = &-(\beta+1)(k_1-1)\|z - z^*\|^2 - \\ &(\beta+1)(x - x^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y) - \nabla J(y^*)) - \\ &(\beta+1)(z - z^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y) - \nabla J(y^*)) + \\ &(\beta+1)(x - x^*)^{\mathrm{T}}(\lambda - \lambda^*) + \\ &(\beta+1)(z - z^*)^{\mathrm{T}}(\lambda - \lambda^*) \end{aligned}$$

对于任意的 $\lambda \in \mathbf{R}^{Nn}$, 令 $\lambda = \bar{\lambda} + \lambda^{\perp}$, 其中, $\bar{\lambda} \in \Omega$, $\lambda^{\perp} \in \Omega^{\perp}$, $\Omega = \{\lambda = \mathrm{col}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_N)|\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N\}$ 以及 $\Omega^{\perp}$ 是 Ω 的正交补空间. 因此, $(\lambda - \lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)L(\lambda - \lambda^*) = (\lambda - \lambda^*)^{\mathrm{T}}\tilde{L} \otimes I_n(\lambda - \lambda^*) = (\lambda - \lambda^*)^{\mathrm{T}}(\tilde{L} \otimes I_n)(\lambda - \lambda^*) = (\lambda^{\perp})^{\mathrm{T}}(\tilde{L} \otimes I_n)\lambda^{\perp} \geq \eta_2(\tilde{L})\|\lambda^{\perp}\|^2$. 通过设定初值满足 $\sum_{i=1}^{N} \xi_i\mu_i(0) = \mathbf{0}_n$, 可得对于所有 $t \geq 0$, 均有 $\sum_{i=1}^{N} \xi_i\mu_i(t) = \mathbf{0}_n$. 利用此性质, 可得 $(\bar{\lambda} - \lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)(\mu - \mu^*) = 0$. 因此, 可得 $(\lambda - \lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)(\mu - \mu^*) = (\lambda^{\perp})^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)(\mu - \mu^*)$. 函数 V_2 对时间 t 的归一化导数 $\dot{V}_2/\phi(t)$ 满足如下不等式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi(t)}\dot{V}_2 = &-\beta b(\lambda - \lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)L(\lambda - \lambda^*) - \\ &(\mu - \mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)(\mu - \mu^*) - \\ &(\beta+1)(\lambda - \lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)(\mu - \mu^*) - \\ &(x - x^*)^{\mathrm{T}}(\mu - \mu^*) - \\ &(z - z^*)^{\mathrm{T}}(\mu - \mu^*) - \\ &(\beta+1)(x - x^*)^{\mathrm{T}}(\lambda - \lambda^*) - \\ &(\beta+1)(z - z^*)^{\mathrm{T}}(\lambda - \lambda^*) \leq \\ &-\beta b\eta_2(\tilde{L})\|\lambda^{\perp}\|^2 - \\ &(\mu - \mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)(\mu - \mu^*) - \\ &(\beta+1)(\lambda^{\perp})^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)(\mu - \mu^*) - \\ &(x - x^*)^{\mathrm{T}}(\mu - \mu^*) - \\ &(z - z^*)^{\mathrm{T}}(\mu - \mu^*) - \\ &(\beta+1)(x - x^*)^{\mathrm{T}}(\lambda - \lambda^*) - \\ &(\beta+1)(z - z^*)^{\mathrm{T}}(\lambda - \lambda^*) \end{aligned}$$

将 $\dot{V}_1/\phi(t)$ 和 $\dot{V}_2/\phi(t)$ 相加, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi(t)}(\dot{V}_1 + \dot{V}_2) \leq &-\beta b\eta_2(\tilde{L})\|\lambda^{\perp}\|^2 - \\ &(\beta+1)(k_1-1)\|z - z^*\|^2 - \\ &(\mu - \mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi \otimes I_n)(\mu - \mu^*) - \end{aligned}$$

$$(\beta+1)(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))-$$
$$(\beta+1)(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))-$$
$$(\beta+1)(\lambda^{\perp})^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)-$$
$$(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\mu-\mu^*)-(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\mu-\mu^*) \quad (12)$$

针对式 (12) 中的交叉项, 首先利用梯度分解性质: $\nabla J(y)-\nabla J(y^*)=\nabla J(y)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x)+\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x^*)$. 然后, 基于假设 2 中的 g -强单调性与假设 3 中的 ℓ_1 -全局利普希茨连续性, 不难得出: $-(\beta+1)(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))=-(\beta+1)(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x))-(\beta+1)(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x^*))\le(\beta+1)\ell_1\|x-x^*\|\|e\|-(\beta+1)g\|x-x^*\|^2$, $-(\beta+1)(z-z^*)^{\mathrm{T}}\times(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))=-(\beta+1)(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x))-(\beta+1)(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x^*))\le(\beta+1)\ell_1\|z-z^*\|\|e\|+(\beta+1)\ell_1\sqrt{N}\|x-x^*\|\times\|z-z^*\|$. 结合 Young 不等式, 不难得出:

$$(\beta+1)\ell_1\|x-x^*\|\|e\|\le(\beta+1)\frac{g}{4}\|x-x^*\|^2+(\beta+1)\frac{\ell_1^2}{g}\|e\|^2$$
$$(\beta+1)\ell_1\|z-z^*\|\|e\|\le(\beta+1)\frac{\ell_1^2}{2}\|e\|^2+(\beta+1)\frac{1}{2}\|z-z^*\|^2$$
$$(\beta+1)\ell_1\sqrt{N}\|x-x^*\|\|z-z^*\|\le(\beta+1)\frac{g}{4}\|x-x^*\|^2+(\beta+1)\frac{\ell_1^2N}{g}\|z-z^*\|^2$$
$$-(\beta+1)(\lambda^{\perp})^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)=-(\beta+1)(\lambda^{\perp})^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)(\mu-\mu^*)\le(\beta+1)^2\|\lambda^{\perp}\|^2+\frac14(\mu-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)$$
$$-(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\mu-\mu^*)=-(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{-\frac12}\otimes I_n)(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)(\mu-\mu^*)\le\frac{1}{\xi_{\min}}\|x-x^*\|^2+\frac14(\mu-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)$$
$$-(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\mu-\mu^*)=-(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{-\frac12}\otimes I_n)(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)(\mu-\mu^*)\le\frac{1}{\xi_{\min}}\|z-z^*\|^2+\frac14(\mu-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)$$

将上述不等式代入式 (12), 可得

$$\frac{1}{\phi(t)}(\dot V_1+\dot V_2)\le-\left(\frac{\beta+1}{2}g-\frac{1}{\xi_{\min}}\right)\|x-x^*\|^2-\left((\beta+1)\left(k_1-\frac32-\frac{\ell_1^2N}{g}\right)-\frac{1}{\xi_{\min}}\right)\|z-z^*\|^2-(\beta b\eta_2(\tilde L)-(\beta+1)^2)\|\lambda^{\perp}\|^2-\frac14(\mu-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)+(\beta+1)\left(\frac{\ell_1^2}{g}+\frac{\ell_1^2}{2}\right)\|e\|^2 \quad (13)$$

函数 V_3 对时间 t 的归一化导数 $\dot V_3/\phi(t)$ 满足如下不等式:

$$\frac{1}{\phi(t)}\dot V_3\le-\varepsilon b\eta_2(\tilde L)\|\lambda^{\perp}\|^2-\varepsilon(2k_1-1)\|z-z^*\|^2-\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)(\lambda-\lambda^*)+\varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{-\frac12}\otimes I_n)(z-z^*)-\varepsilon(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))-2\varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))+\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))-\varepsilon(k_1-1)(x-x^*)^{\mathrm{T}}(z-z^*)+\varepsilon(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{-\frac12}\otimes I_n)(z-z^*)+\varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\lambda-\lambda^*)+\varepsilon b(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)L\lambda^{\perp}+\varepsilon k_1(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)(z-z^*)+\varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)(\mu-\mu^*)-\varepsilon(\lambda^{\perp})^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*) \quad (14)$$

对式 (14) 中的各交叉项, 再次利用前面的梯度分解性质, 假设 2 中的 g-强单调性与假设 3 中的 ℓ_1-全局利普希茨连续性, 不难得出: $-\varepsilon(x-x^*)^{\mathrm{T}}\times(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))=-\varepsilon(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x))-\varepsilon(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x^*))\le\varepsilon\ell_1\|x-x^*\|\|e\|-\varepsilon g\|x-x^*\|^2$, $-2\varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))=-2\varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(y)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x))-2\varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x^*))\le2\varepsilon\ell_1\|z-z^*\|\|e\|+2\varepsilon\ell_1\sqrt{N}\|z-z^*\|\|x-x^*\|$, $\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac12}\otimes I_n)(\nabla J(y)-\nabla J(y^*))=\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac14}\otimes I_n)(\Xi^{\frac14}\otimes I_n)\times(\nabla J(y)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x))+\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac14}\otimes I_n)(\Xi^{\frac14}\otimes I_n)(\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x)-\nabla J(\mathbf{1}_N\otimes x^*))\le\varepsilon\ell_1(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac14}$

$\otimes I_n)(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)e + \varepsilon\ell_1\sqrt{N}(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)(x-x^*)$. 结合 Young 不等式, 不难得出:

$$\varepsilon\ell_1\|x-x^*\|\|e\| \le \varepsilon\frac{g}{2}\|x-x^*\|^2+\varepsilon\frac{\ell_1^2}{2g}\|e\|^2$$

$$2\varepsilon\ell_1\|z-z^*\|\|e\| \le \varepsilon\|z-z^*\|^2+\varepsilon\ell_1^2\|e\|^2$$

$$2\varepsilon\ell_1\sqrt{N}\|z-z^*\|\|x-x^*\| \le \varepsilon\frac{g}{2}\|x-x^*\|^2+\varepsilon\frac{2\ell_1^2N}{g}\|z-z^*\|^2$$

$$\varepsilon\ell_1(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)e \le \varepsilon\ell_1^2\|e\|^2+\frac{1}{4}\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(\lambda-\lambda^*)$$

$$\varepsilon\ell_1\sqrt{N}(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)(x-x^*) \le \varepsilon\ell_1^2N\|x-x^*\|^2+\frac{1}{4}\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(\lambda-\lambda^*)$$

$$-\varepsilon(k_1-1)(x-x^*)^{\mathrm{T}}(z-z^*) \le \frac{1}{4}\varepsilon\|x-x^*\|^2+\varepsilon(k_1-1)^2\|z-z^*\|^2$$

$$\varepsilon(x-x^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{-\frac{1}{2}}\otimes I_n)(z-z^*) \le \frac{1}{4}\varepsilon\|x-x^*\|^2+\varepsilon\frac{1}{\xi_{\min}}\|z-z^*\|^2$$

$$\varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\lambda-\lambda^*) = \varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{-\frac{1}{4}}\otimes I_n)(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)(\lambda-\lambda^*) \le \varepsilon\frac{3}{\sqrt{\xi_{\min}}}\|z-z^*\|^2+\frac{1}{12}\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(\lambda-\lambda^*)$$

$$\varepsilon b(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)L\lambda^{\perp} \le \varepsilon\frac{b^2\|L_N\|^2}{2}\|z-z^*\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon\|\lambda^{\perp}\|^2$$

$$\varepsilon k_1(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(z-z^*) = \varepsilon k_1(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)(\Xi^{\frac{1}{4}}\otimes I_n)(\lambda-\lambda^*) \le 3\varepsilon k_1^2\|z-z^*\|^2+\frac{1}{12}\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(\lambda-\lambda^*)$$

$$\varepsilon(z-z^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(\mu-\mu^*) \le \frac{1}{2}\varepsilon\|z-z^*\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon(\mu-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)$$

$$-\varepsilon(\lambda^{\perp})^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*) = -\varepsilon(\lambda^{\perp})^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(\mu-\mu^*) \le \frac{1}{2}\varepsilon\|\lambda^{\perp}\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon(\mu-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)$$

将上述不等式代入式 (14), 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi(t)}\dot V_3 \le{}& \varepsilon\left(\ell_1^2N+\frac{1}{2}\right)\|x-x^*\|^2+\\ &\varepsilon\left(4k_1^2-4k_1+\frac{7}{2}+\frac{4}{\sqrt{\xi_{\min}}}+\frac{1}{\xi_{\min}}+\frac{2\ell_1^2N}{g}+\frac{b^2\|L_N\|^2}{2}\right)\|z-z^*\|^2-\\ &\varepsilon(b\eta_2(\tilde L)-1)\|\lambda^{\perp}\|^2-\\ &\frac{1}{3}\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(\lambda-\lambda^*)+\\ &\varepsilon(\mu-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)+\\ &\varepsilon\left(\frac{\ell_1^2}{2g}+2\ell_1^2\right)\|e\|^2\end{aligned}\tag{15}$$

对共识误差 e 沿着 t 求导, 可得 $\dot e=-\phi(t)k_2Me-\mathbf{1}_N\otimes\dot x$. 由于 $-M$ 是 Hurwitz 的且是非奇异的矩阵, 结合 M 的结构可得存在一个对称正定的矩阵 $Q\in\mathbf{R}^{N^2n\times N^2n}$ 和一个实正定对角矩阵 $P=\mathrm{diag}\{p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_N\}\in\mathbf{R}^{N\times N}$, 使得 $M^{\mathrm{T}}(P\otimes I_{Nn})+(P\otimes I_{Nn})M=Q$ [14]. 考虑由共识误差 e 构成的李雅普诺夫分量 V_4. 其关于时间 t 的求导过程如下: $\dot V_4=\dot e^{\mathrm{T}}(P\otimes I_{Nn})e+e^{\mathrm{T}}(P\otimes I_{Nn})\dot e=-\phi(t)k_2e^{\mathrm{T}}(M^{\mathrm{T}}(P\otimes I_{Nn})+(P\otimes I_{Nn})M)e-2e^{\mathrm{T}}(P\otimes I_{Nn})(\mathbf{1}_N\otimes\dot x)=-\phi(t)k_2e^{\mathrm{T}}Qe-2\phi(t)e^{\mathrm{T}}(P\otimes I_{Nn})(\mathbf{1}_N\otimes(z-z^*))$. 由于 Q 是对称正定矩阵, 可知 $\lambda_{\min}(Q)\|e\|^2\le e^{\mathrm{T}}Qe\le\lambda_{\max}(Q)\|e\|^2$. 其余交叉项利用 Young 不等式进行放缩, 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi(t)}\dot V_4 \le{}& -k_2e^{\mathrm{T}}Qe+2\lambda_{\max}(P)\sqrt{N}\|e\|\|z-z^*\| \le\\ &-k_2\lambda_{\min}(Q)\|e\|^2+\frac{\lambda_{\max}(P)}{2(\beta+1)}N\|e\|^2+\\ &2(\beta+1)\lambda_{\max}(P)\|z-z^*\|^2\end{aligned}\tag{16}$$

结合不等式 (13)、(15) ~ (16), 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi(t)}\dot V \le{}& -\left(\frac{\beta+1}{2}g-\frac{1}{\xi_{\min}}-\varepsilon\left(\ell_1^2N+\frac{1}{2}\right)\right)\|x-x^*\|^2-\\ &\left((\beta+1)\left(k_1-\frac{3}{2}-\frac{\ell_1^2N}{g}-2\lambda_{\max}(P)\right)-\frac{1}{\xi_{\min}}-\right.\\ &\left.\varepsilon\left(4k_1^2-4k_1+\frac{7}{2}+\frac{2\ell_1^2N}{g}+\frac{4}{\sqrt{\xi_{\min}}}+\frac{1}{\xi_{\min}}+\frac{b^2\|L_N\|^2}{2}\right)\right)\|z-z^*\|^2-\end{aligned}$$

$$\Big(\beta b\eta_2(\tilde{L})-(\beta+1)^2+\varepsilon(b\eta_2(\tilde{L})-1)\Big)\|\lambda^{\perp}\|^2-\frac{1}{3}\varepsilon(\lambda-\lambda^*)^{\mathrm{T}}(\Xi^{\frac{1}{2}}\otimes I_n)(\lambda-\lambda^*)-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)(\mu-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\Xi\otimes I_n)(\mu-\mu^*)-\left(k_2\lambda_{\min}(Q)-(\beta+1)\left(\frac{\ell_1^2}{g}+\frac{\ell_1^2}{2}\right)-\frac{\lambda_{\max}(P)}{2(\beta+1)}N-\varepsilon\left(\frac{\ell_1^2}{2g}+2\ell_1^2\right)\right)\|e\|^2$$

定义系统的增广误差向量为 $E=\mathrm{col}(x-x^*,\ z-z^*,\ \lambda-\lambda^*,\ \mu-\mu^*,\ e)$. 定义辅助参数 $r_1=(\frac{1}{2}(\beta+1)g-1/\xi_{\min})/(\ell_1^2N+\frac{1}{2})$, $r_2=((\beta+1)(k_1-\frac{3}{2}-(\ell_1^2N)/g-2\lambda_{\max}(P))-1/\xi_{\min})/(4k_1^2-4k_1+\frac{7}{2}+4/\sqrt{\xi_{\min}}+1/\xi_{\min}+(2\ell_1^2N)/g+b^2\|L_N\|^2/2)$ 以及 $r_3=(k_2\lambda_{\min}(Q)-(\beta+1)(\ell_1^2/g+\ell_1^2/2)-\frac{1}{2}(\lambda_{\max}(P)N)/(\beta+1))/(\ell_1^2/(2g)+2\ell_1^2)$, 在参数 b、k_1、k_2 以及 β 满足前述稳定性不等式判据 (8) 的条件下, 可以验证 r_1、r_2、$r_3>0$ 恒成立. 接下来, 令正参数 ε 满足如下范围: $0<\varepsilon<\min\{\frac{1}{4},\ r_1,\ r_2,\ r_3\}$. 由该取值范围可知, 下述定义的系数 $\Delta_1=\frac{1}{2}(\beta+1)g-1/\xi_{\min}-\varepsilon(\ell_1^2N+\frac{1}{2})$, $\Delta_2=(\beta+1)(k_1-\frac{3}{2}-(\ell_1^2N)/g-2\lambda_{\max}(P))-1/\xi_{\min}-\varepsilon(4k_1^2-4k_1+\frac{7}{2}+4/\sqrt{\xi_{\min}}+1/\xi_{\min}+(2\ell_1^2N)/g+b^2\|L_N\|^2/2)$, $\Delta_3=\frac{1}{3}\varepsilon\sqrt{\xi_{\min}}$, $\Delta_4=(\frac{1}{4}-\varepsilon)\xi_{\min}$, $\Delta_5=k_2\lambda_{\min}(Q)-(\beta+1)(\ell_1^2/g+\ell_1^2/2)-\frac{1}{2}(\lambda_{\max}(P)N)/(\beta+1)-\varepsilon(\ell_1^2/(2g)+2\ell_1^2)$以及 $\beta b\eta_2(\tilde{L})-(\beta+1)^2+\varepsilon(b\eta_2(\tilde{L})-1)$ 均大于零. 由此, 取 $\Delta=\min\{\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4,\ \Delta_5\}>0$, 可得 V 的归一化导数满足如下不等式:

$$\frac{1}{\phi(t)}\dot{V}\le-\Delta_1\|x-x^*\|^2-\Delta_2\|z-z^*\|^2-\Delta_5\|e\|^2-\Delta_3\|\lambda-\lambda^*\|^2-\Delta_4\|\mu-\mu^*\|^2\le-\Delta\|E\|^2 \tag{17}$$

由于 V 是正定且径向无界的, 故存在一个正数 $\varrho_1=\min\{\frac{1}{4}(\beta+1)(k_1+1-\sqrt{k_1^2-2k_1+5}),\ \frac{1}{4}\xi_{\min}\times(\beta+2-\sqrt{\beta^2+4}),\ \lambda_{\min}(P)\}$, 使得

$$\varrho_1\|E\|^2\le V\le\frac{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}{2}\|E\|^2 \tag{18}$$

将式 (17) 代入式 (18), 可得关于 V 的导数不等式

$$\frac{1}{\phi(t)}\dot{V}\le-\frac{2\Delta}{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}V \tag{19}$$

对式 (19) 在 $[a_1T,\ t]$ 上积分, 可得

$$V(t)\le\Big(\frac{T-t}{T-a_1T}\Big)^{\frac{2\Delta(1-a_1)T}{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}}V(a_1T) \tag{20}$$

由式 (20) 可知, 当 $t\to T^-$ 时, 有 $\lim_{t\to T^-}V(t)=0$. 由于 V 是关于误差向量 E 的正定函数, 这蕴含了 $\lim_{t\to T^-}\|E(t)\|=0$. 综上所述, 二阶多智能体系统在分布式算法 (6) ~ (7) 的驱动下, 能够在预设时间 T 内精确收敛至博弈问题 (2) 的广义纳什均衡点.

步骤 3 ($t\in[T,\ +\infty)$) **.** 对于 $t\ge a_1T$ 的任意时刻, 由于左特征向量估计器已实现精确补偿 (即 $w=\mathbf{1}_N\otimes\xi$), 且在 $t\ge T$ 阶段, 根据定义可知时间变换函数 $\phi(t)=1$. 遵循与前文一致的分析方法, 系统的整体李雅普诺夫函数 V 在该阶段仍满足如下导数不等式:

$$\dot{V}\le-\frac{2\Delta}{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}V \tag{21}$$

对式 (21) 在区间 $[T,\ +\infty)$ 上积分, 得

$$V(t)\le\mathrm{e}^{-\frac{2\Delta}{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}(t-T)}V(T) \tag{22}$$

由式 (20) 的正幂次界条件可知, 状态导数在 T 附近可积. 按各状态左极限连续延拓至 T, 并作为后段初值, 则在 $t=T$ 时, $V(T)=0$ 恒成立, 故 $V(t)\le0$. 又因 $\varrho_1\|E\|^2\le V$, 可得 $\varrho_1\|E\|^2\le V\le0$, 进而 $\|E(t)\|=0$. 因此, 在 $t\ge T$ 的所有时刻, 系统状态将始终保持在平衡点处. □

2.2 有向平衡图下基于预设时间的算法设计

针对博弈问题 (2), 在有向平衡图下, 由于其拉普拉斯矩阵满足 $\mathbf{1}_N^{\mathrm{T}}L_N=\mathbf{0}_N^{\mathrm{T}}$ (即左特征向量 $\xi=\frac{1}{N}\mathbf{1}_N$), 各智能体无需通过估计器获取拓扑补偿信息. 此时, 算法结构可进一步简化. 引入辅助变量 $z_i=v_i/\phi_a(t)$, 其中 $\phi_a(t)$ 为预设时间变换函数. 智能体 $i\in\mathcal{V}$ 的状态更新机制如下:

$$\begin{cases}\dot{x}=v=\phi_a(t)z\\ \dot{z}=-\phi_a(t)(\nabla J(y)-\lambda+k_1z)\\ \dot{\lambda}=-\phi_a(t)(x-d+z+\mu+bL\lambda)\\ \dot{\mu}=\phi_a(t)bL\lambda\\ \dot{y}=-\phi_a(t)k_2Me\end{cases} \tag{23}$$

算法 (23) 中的时间变换函数 $\phi_a(t)$ 定义如下:

$$\phi_a(t)=\begin{cases}\dfrac{T}{T-t}, & t\in[0,\ T)\\ 1, & t\in[T,\ +\infty)\end{cases}$$

算法 (23) 的正调节参数 b、k_1、k_2 需满足以下稳定性判据, 以保证下文推论 1 证明中 $\widetilde{V}>0$ 且

$\dot{\widetilde{V}} \leq 0$.

$$\begin{cases} b > \dfrac{(\beta+1)^2}{\beta\eta_2(\tilde{L})}, \quad \beta > \max\left\{\dfrac{2}{g}-1,\ 0\right\} \\ k_1 > \dfrac{3}{2} + \dfrac{\ell_1^2 N}{g} + \dfrac{1}{\beta+1} + 2\lambda_{\max}(P) \\ k_2 > \dfrac{(\beta+1)\left(\frac{\ell_1^2}{g}+\frac{\ell_1^2}{2}\right) + \frac{\lambda_{\max}(P)}{2(\beta+1)}N}{\lambda_{\min}(Q)} \end{cases} \tag{24}$$

引理 5. 在假设 1 ∼ 假设 3 成立且通信图满足平衡性, 同时初值设定为 $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(0)=\mathbf{0}_n$ 的条件下, 令状态向量 $\mathrm{col}(x^*,\ z^*,\ \lambda^*,\ \mu^*,\ y^*)$ 为紧凑系统 (23) 的一个平衡点, 则 x^* 是博弈问题 (2) 的广义纳什均衡点.

证明. 紧凑系统 (23) 的平衡点满足以下条件:

$$\mathbf{0}_{Nn} = z^* \tag{25a}$$

$$\mathbf{0}_{Nn} = \nabla J(y^*) - \lambda^* + k_1 z^* \tag{25b}$$

$$\mathbf{0}_{Nn} = x^* - d + z^* + \mu^* + bL\lambda^* \tag{25c}$$

$$\mathbf{0}_{Nn} = bL\lambda^* \tag{25d}$$

$$\mathbf{0}_{N^2n} = -k_2 M e^* \tag{25e}$$

由 (25d) 可知 $\lambda_i^* = \lambda_j^*$, 对 (25c) 左乘 $(\mathbf{1}_N \otimes I_n)^{\mathrm{T}}$, 得 $\sum_{i=1}^{N} x_i^* = \sum_{i=1}^{N} d_i$. 由 (25b) 得, $\nabla J(y^*) = \lambda^*$, 即 $\nabla J_i(y_i^*) = \nabla J_j(y_j^*)$. 因为, $-M$ 是 Hurwitz 矩阵, 则 $y^* = \mathbf{1}_N \otimes x^*$. 根据引理 3, 可以知道紧凑系统 (23) 在平衡点处 x^* 和 λ^* 满足式 (3), 这意味着 x^* 是广义纳什均衡点. □

推论 1. 在假设 1 ∼ 假设 3 成立且通信图满足平衡性, 同时初值设定为 $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(0)=\mathbf{0}_n$ 的条件下, 若参数 b、β、k_1 以及 k_2 满足条件 (24), 则二阶多智能体系统在算法 (23) 的作用下具有该结论: 在 $t \in [0,\ T)$ 内, 多智能体系统的策略能够收敛至博弈问题 (2) 的广义纳什均衡点, 即满足 $\lim_{t\to T^-}\|y - \mathbf{1}_N \otimes x^*\| = 0$; 在 $t \geq T$ 后, 系统始终保持在该均衡状态.

证明. 推论 1 的证明逻辑与定理 1 类似, 主要分为两个阶段: 首先, 在已获得精确特征向量估计的前提下, 通过构造新型李雅普诺夫函数并结合时间变换函数 $\phi_a(t)$, 证明系统状态能够在预设时间内收敛至广义纳什均衡点; 其次, 通过分析不含预设时间增益项的闭环动力学, 证明系统状态在预设时间后可以保持在均衡状态.

步骤 1 $(t \in [0,\ T))$**.** 考虑如下的李雅普诺夫函数 $\widetilde{V} = V_1 + \widetilde{V}_2 + \widetilde{V}_3 + V_4$, 其中, $\widetilde{V}_2 = \frac{\beta}{2}\|\lambda-\lambda^*\|^2 + \frac{1}{2}\|\lambda-\lambda^*+\mu-\mu^*\|^2$, $\widetilde{V}_3 = \frac{\varepsilon}{2}\|x-x^*+z-z^*\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|z-z^*-(\lambda-\lambda^*)\|^2$. 函数 $\widetilde{V}$ 对时间 t 的归一化导数 $\dot{\widetilde{V}}/\phi_a(t)$ 满足如下不等式:

$$\begin{aligned} &\frac{T-t}{T}\dot{\widetilde{V}} \leq \\ &-\left(\frac{g}{2}(\beta+1)-1-\varepsilon\left(\ell_1^2 N+\frac{1}{4}\right)\right)\|x-x^*\|^2 - \\ &\left((\beta+1)\left(k_1-\frac{3}{2}-\frac{\ell_1^2 N}{g}-2\lambda_{\max}(P)\right)-1-\right. \\ &\left.\varepsilon\left(\frac{21}{2}+4k_1^2+\frac{2\ell_1^2 N}{g}+\frac{b^2\|L_N\|^2}{2}\right)\right)\|z-z^*\|^2 - \\ &\frac{5}{12}\varepsilon\|\lambda-\lambda^*\|^2 - \\ &\left(\beta b\eta_2(\tilde{L})-(\beta+1)^2+\varepsilon(b\eta_2(\tilde{L})-1)\right)\|\lambda^{\perp}\|^2 - \\ &\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\|\mu-\mu^*\|^2 - \\ &\left(k_2\lambda_{\min}(Q)-(\beta+1)\left(\frac{\ell_1^2}{g}+\frac{\ell_1^2}{2}\right)-\frac{\lambda_{\max}(P)}{2(\beta+1)}N-\right. \\ &\left.\varepsilon\left(\frac{\ell_1^2}{2g}+2\ell_1^2\right)\right)\|e\|^2 \end{aligned}$$

定义辅助参数 $r_4 = (\frac{1}{2}(\beta+1)g-1)/(\ell_1^2 N+\frac{1}{4})$, $r_5 = ((\beta+1)(k_1-\frac{3}{2}-(\ell_1^2 N)/g-2\lambda_{\max}(P))-1)/(\frac{21}{2}+4k_1^2+(2\ell_1^2 N)/g+(b^2\|L_N\|^2)/2)$, 以及 $r_6 = (k_2\lambda_{\min}(Q) - (\beta+1)(\ell_1^2/g+\ell_1^2/2)-\frac{1}{2}(\lambda_{\max}(P)N)/(\beta+1))/(\ell_1^2/(2g)+2\ell_1^2)$, 在参数 b、k_1、k_2 以及 β 满足前述稳定性不等式判据 (24) 的条件下, 可以验证 r_4、r_5、$r_6 > 0$ 恒成立. 接下来, 令正参数 ε 满足如下范围: $0 < \varepsilon < \min\{\frac{1}{4},\ r_4,\ r_5,\ r_6\}$. 由该取值范围可知, 下述定义的系数 $\widetilde{\Delta}_1 = \frac{1}{2}(\beta+1)g-1-\varepsilon(\ell_1^2 N+\frac{1}{4})$, $\widetilde{\Delta}_2 = (\beta+1)(k_1-\frac{3}{2}-(\ell_1^2 N)/g-2\lambda_{\max}(P))-1-\varepsilon(\frac{21}{2}+4k_1^2+(2\ell_1^2 N)/g+(b^2\|L_N\|^2)/2)$, $\widetilde{\Delta}_3 = \frac{1}{4}-\varepsilon$, $\widetilde{\Delta}_4 = k_2\lambda_{\min}(Q)-(\beta+1)(\ell_1^2/g+\ell_1^2/2)-\frac{1}{2}(\lambda_{\max}(P)N)/(\beta+1)-\varepsilon(\ell_1^2/(2g)+2\ell_1^2)$均大于零. 由此, 取 $\widetilde{\Delta} = \min\{\widetilde{\Delta}_1,\ \widetilde{\Delta}_2,\ \frac{5}{12}\varepsilon,\ \widetilde{\Delta}_3,\ \widetilde{\Delta}_4\} > 0$, 可得 $\widetilde{V}$ 的归一化导数满足如下不等式:

$$\begin{aligned} &\frac{T-t}{T}\dot{\widetilde{V}} \leq -\widetilde{\Delta}_1\|x-x^*\|^2 - \widetilde{\Delta}_2\|z-z^*\|^2 - \widetilde{\Delta}_4\|e\|^2 - \\ &\widetilde{\Delta}_3\|\mu-\mu^*\|^2 - \frac{5}{12}\varepsilon\|\lambda-\lambda^*\|^2 \leq -\widetilde{\Delta}\|E\|^2 \end{aligned} \tag{26}$$

由于 $\widetilde{V}$ 是正定且径向无界的, 故存在一个正数 $\varrho_2 = \min\{\frac{1}{4}(\beta+1)(k_1+1-\sqrt{k_1^2-2k_1+5}),\ \frac{1}{4}(\beta+2-\sqrt{\beta^2+4}),\ \lambda_{\min}(P)\}$, 使得

$$\varrho_2\|E\|^2 \leq \widetilde{V} \leq \frac{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}{2}\|E\|^2 \tag{27}$$

将式 (26) 代入式 (27), 可得关于 $\widetilde{V}$ 的导数不等式

$$\frac{T-t}{T}\dot{\widetilde{V}} \leq -\frac{2\widetilde{\Delta}}{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}\widetilde{V} \tag{28}$$

对式 (28) 在 $[0,\ t]$ 上积分, 则存在一个正数 $\varrho_3 = \sqrt{((\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon)/(2\varrho_2)}$, 使得

$$\begin{cases} \widetilde{V}(t) \leq \left(\dfrac{T-t}{T}\right)^{\frac{2\widetilde{\Delta}T}{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}}\widetilde{V}(0) \\ \|E(t)\| \leq \varrho_3\sqrt{\left(\dfrac{T-t}{T}\right)^{\frac{2\widetilde{\Delta}T}{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}}}\|E(0)\| \end{cases} \tag{29}$$

由式 (29) 可知, 当 $t \to T^-$ 时, 有 $\lim_{t\to T^-}\widetilde{V}(t) = 0$. 由于 $\widetilde{V}$ 是关于误差向量 E 的正定函数, 这蕴含了 $\lim_{t\to T^-}\|E(t)\| = 0$. 综上所述, 二阶多智能体系统在分布式算法 (23) 的驱动下, 能够在预设时间 T 内精确收敛至博弈问题 (2) 的广义纳什均衡点.

步骤 2 ($t \in [T,\ +\infty)$)**.** 遵循与前文一致的分析方法, 系统的整体李雅普诺夫函数 $\widetilde{V}$ 在该阶段仍满足如下导数不等式:

$$\dot{\widetilde{V}} \leq -\frac{2\widetilde{\Delta}}{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}\widetilde{V} \tag{30}$$

对式 (30) 在区间 $[T,\ +\infty)$ 上积分, 得

$$\widetilde{V}(t) \leq \mathrm{e}^{-\frac{2\widetilde{\Delta}}{(\beta+1)(k_1+1)+2\varepsilon}(t-T)}\widetilde{V}(T) \tag{31}$$

由式 (29) 的正幂次界条件可知, 状态导数在 T 附近可积. 按各状态左极限连续延拓至 T, 并作为后段初值, 则在 $t = T$ 时, $\widetilde{V}(T) = 0$ 恒成立, 故 $\widetilde{V}(t) \leq 0$. 又因 $\varrho_2\|E\|^2 \leq \widetilde{V}$, 可得 $\varrho_2\|E\|^2 \leq \widetilde{V} \leq 0$, 进而 $\|E(t)\| = 0$. 因此, 在 $t \geq T$ 的所有时刻, 系统状态将始终保持在平衡点处. □

注 5. 注意到, 定理 1 和推论 1 中控制增益的选取依赖拉普拉斯矩阵的第二最小特征值和矩阵范数等全局信息. 此类全局参数依赖是有向图分布式算法设计的常见特征 (参见文献 [13, 33]). 为了确保算法在分布式场景下的可行性, 利用分布式估计方法预先获取这些全局参数已成为一种常用的手段. 具体而言, 在实际运行算法 (6) ~ (7) 和 (23) 之前, 各智能体可利用文献 [38] 中提出的基于一致性的分布式方法进行预估计, 从而确保算法在不依赖中心节点的情况下实现各智能体的局部参数匹配.

注 6. 可以看出, 算法 (6) ~ (7) 和 (23) 的收敛性能与控制参数 b、k_1、k_2 的选取密切相关. 然而, 根据定理 1 和推论 1 的收敛判定条件可知, 这些增益参数的取值范围受限于系统维数 N、网络特征值 $\eta_2(\tilde{L})$、博弈梯度条件 g、李雅普诺夫矩阵特征值 $\lambda_{\min}(Q)$ 等多个参数的非线性耦合关系. 由于涉及的变量众多且存在强耦合特征, 单纯地增大或减小某一参数无法保证收敛速度的单调变化. 这种参数敏感性的复杂特征使得目前难以给出统一的定性选取准则. 因此, 上述判据给出了参数选取的充分条件, 而更深层次的参数解耦与最优性能分析, 则是后续研究力求精进的方向.

3 仿真研究

本节通过数值仿真实验验证所提算法的有效性. 考虑由 5 个参与者组成的博弈系统, 每个智能体的策略动作 $x_i = [x_{i1},\ x_{i2}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^2$. 各智能体的局部代价函数设定如下:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= 4x_{11}^2 + 3x_{11}x_{31} - 6x_{11} + 3x_{12}^2 + \\ &\quad 3x_{12}x_{32} - 4x_{12} \\ J_2(x) &= \frac{5}{2}x_{21}^2 + 4x_{21}x_{41} + 3x_{21} + \frac{7}{2}x_{22}^2 + \\ &\quad 3x_{22}x_{42} + 2x_{22} \\ J_3(x) &= 5x_{31}^2 + 8x_{31}x_{51} - x_{31} + \frac{9}{2}x_{32}^2 + \\ &\quad 8x_{32}x_{52} - x_{32} \\ J_4(x) &= 7x_{41}^2 + 2x_{41}x_{21} + 5x_{41} + 6x_{42}^2 + \\ &\quad 2x_{42}x_{22} + 5x_{42} \\ J_5(x) &= 5x_{51}^2 + x_{51}x_{31} - 8x_{51} + \frac{9}{2}x_{52}^2 + \\ &\quad x_{52}x_{32} - 7x_{52} \end{aligned}$$

设定系统的初始状态策略向量为 $x(0) = [-1.0,\ -3.0,\ 1.5,\ -2.0,\ -3.0,\ 2.0,\ 3.0,\ 1.0,\ -2.0,\ 4.0]^{\mathrm{T}}$, 资源参考参数 $d = [1.0,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.3,\ -0.2,\ 0.4,\ -0.3,\ 0.1,\ 0,\ -0.1]^{\mathrm{T}}$. 通过 KKT 条件解析计算可得, 该博弈问题的理论广义纳什均衡解为 $x^* = [0.975,\ 1.064,\ -0.348,\ -0.061,\ -0.586,\ -0.637,\ -0.304,\ -0.367,\ 0.863,\ 0.901]^{\mathrm{T}}$, 对应的拉格朗日一致性乘子为 $\lambda_c^* = [0.044,\ 0.473]^{\mathrm{T}}$.

首先验证二阶多智能体系统在算法 (6) ~ (7) 驱动下, 对于不平衡拓扑的收敛性能. 通信拓扑如图 1

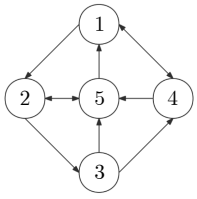


图 1 强连通有向非平衡图

Fig. 1 Strongly connected directed unbalanced graph

所示. 算法参数设置为: $b=5$、$k_1=6$、$k_2=20$、时间分配参数 $a_1=0.3$、预设收敛时间 $T=3.5$ s.

仿真结果显示, 辅助变量 w_i 在第一阶段 $a_1T=1.05$ s 内迅速且精确地收敛至拉普拉斯矩阵的左特征向量 ξ (如图 2 和图 3 所示), 随后各智能体的策略轨迹 x_i 在预设时间 $T=3.5$ s 内精准收敛至理论广义纳什均衡点 x^* 并在预设时间结束后始终保持稳定 (如图 4 所示), 同时每个智能体对全局信息

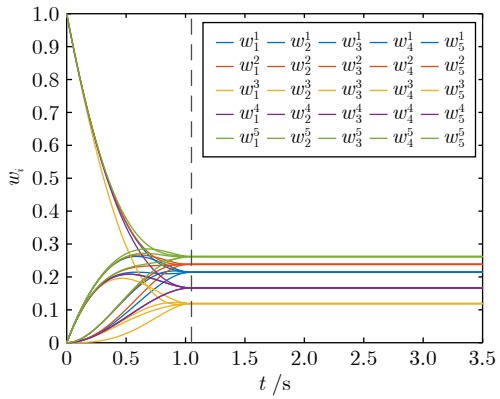


图 2　基于算法 (6) ~ (7) 的 w_i 状态轨迹图

Fig. 2　The state trajectory plot of w_i by algorithms (6) ~ (7)

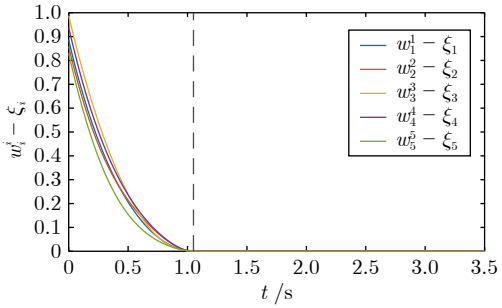


图 3　基于算法 (6) ~ (7) 的左特征向量估计误差图

Fig. 3　The estimation error plot of the left eigenvector by algorithms (6) ~ (7)

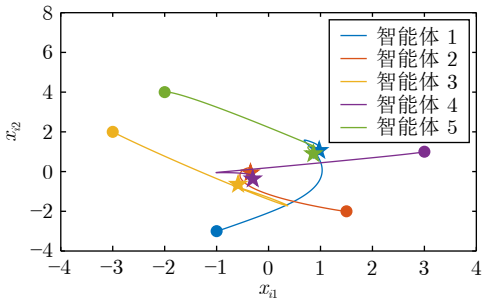


图 4　基于算法 (6) ~ (7) 的 x_i 状态轨迹图

Fig. 4　The state trajectory plot of x_i by algorithms (6) ~ (7)

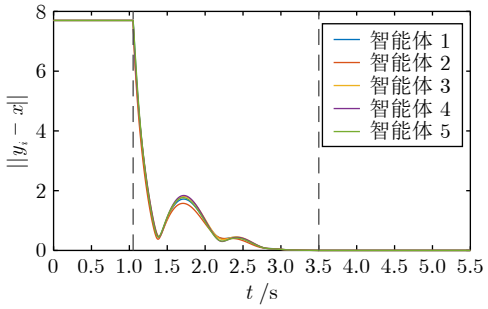


图 5　基于算法 (6) ~ (7) 的 $\|y_i-x\|$ 状态轨迹图

Fig. 5　The state trajectory plot of $\|y_i-x\|$ by algorithms (6) ~ (7)

的估计误差 $\|y_i-x\|$ 趋于零 (如图 5 所示), 且全局耦合等式约束 $\|\sum_{i=1}^N x_i-\sum_{i=1}^N d_i\|$ 在预设时间内被精确满足 (如图 6 所示). 上述仿真观察到的现象表明了本算例中所提算法在强连通权重不平衡有向图下实现预设时间纳什均衡寻优的有效性及其精确的收敛控制能力.

接下来, 验证二阶多智能体系统沿着算法 (23) 在强连通有向平衡图下的适用性. 考虑由 5 个智能体组成的强连通平衡拓扑, 如图 7 所示. 仿真实验中, 各智能体的状态更新遵循算法 (23), 参数设置与前文保持一致, 即 $b=5$、$k_1=6$、$k_2=20$、预设时间 $T=3.5$ s.

仿真结果显示, 各智能体的策略轨迹 x_i 在预

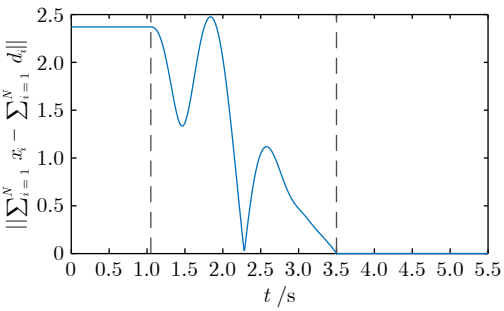


图 6　基于算法 (6) ~ (7) 的 $\|\sum_{i=1}^N x_i-\sum_{i=1}^N d_i\|$ 状态轨迹图

Fig. 6　The state trajectory plot of $\|\sum_{i=1}^N x_i-\sum_{i=1}^N d_i\|$ by algorithms (6) ~ (7)

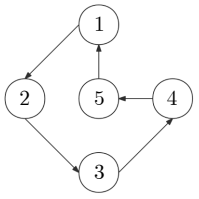


图 7　强连通有向平衡图

Fig. 7　Strongly connected directed balanced graph

设时间 $T = 3.5$ s 内实现了对理论广义纳什均衡点 x^* 的精确收敛, 且在预设时间结束后系统状态始终维持在该均衡点处 (如图 8 所示). 同时, 图 9 表明每个智能体均能在预设时间内通过算法 (23) 实现对其他智能体信息的准确分布式估计, 图 10 则展示了全局耦合等式约束在预设时间内平滑收敛至零的过程. 这些仿真观察结果展示了本算例中的数值表现, 不仅验证了所提二阶系统算法在有向平衡图下的合理性, 更进一步展示了该预设时间寻优框架在处理不同类型通信拓扑时的适用性与广义有效性.

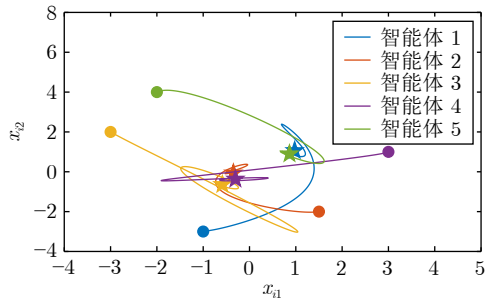


图 8 基于算法 (23) 的 x_i 状态轨迹图

Fig. 8 The state trajectory plot of x_i by algorithm (23)

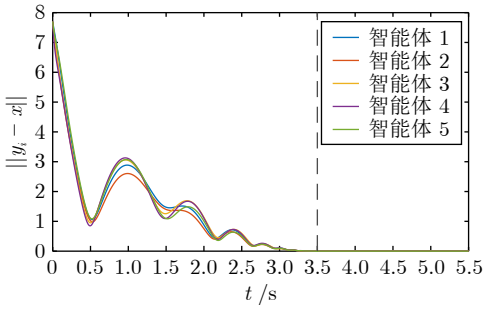


图 9 基于算法 (23) 的 $\|y_i - x\|$ 状态轨迹图

Fig. 9 The state trajectory plot of $\|y_i - x\|$ by algorithm (23)

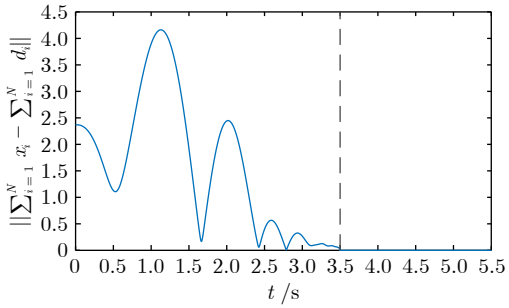


图 10 基于算法 (23) 的 $\|\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} d_i\|$ 状态轨迹图

Fig. 10 The state trajectory plot of $\|\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} d_i\|$ by algorithm (23)

4 结束语

本文针对一类具有全局耦合等式约束的分布式非合作博弈问题, 提出一种适用于二阶积分型动力学系统的预设时间收敛寻优框架. 研究结果表明, 通过有效设计收敛阶段与控制机制, 二阶多智能体系统能够在强连通有向非平衡拓扑下, 在预设时间内实现广义纳什均衡的精确寻优. 具体而言, 本文首先引入拉普拉斯矩阵左特征向量估计机制, 有效补偿有向图不平衡权重带来的信息流偏差; 随后, 通过在控制律中引入阻尼项并结合基于领导–跟随一致性协议的信息估计器, 实现在物理动力学约束与全局耦合等式约束下对伪梯度的分布式实时重构与策略寻优. 理论分析与数值仿真证实, 在博弈映射满足强单调性条件下, 系统可在预设时间内收敛至广义纳什均衡点, 并确保预设时间结束后均衡状态的持续稳定性. 未来的研究工作将围绕参数解耦与最优性能分析展开, 并进一步探索复杂多智能体系统框架下的预设时间自适应分布式寻优算法.

参考文献

1 Deng Z H. Distributed algorithm design for aggregative games of Euler-Lagrange systems and its application to smart grids. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(8): 8315−8325

2 Feng Yu-Kai, Wu Zheng-Xing, Tan Min. Cooperative pursuit policy for bionic underwater robot based on MARL-MHSA architecture: Data-driven modeling and distributed strategy optimization. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(10): 2269−2282
(冯育凯, 吴正兴, 谭民. 基于 MARL-MHSA 架构的水下仿生机器人协同围捕策略: 数据驱动建模与分布式策略优化. 自动化学报, 2025, **51**(10): 2269−2282)

3 Jiang Bi-Tao, Wen Guang-Hui, Zhou Jia-Ling, Zheng De-Zhi. Cross-domain cooperative technology of intelligent unmanned swarm systems: Current status and prospects. *Chinese Engineering Sciences*, 2024, **26**(1): 117−126
(江碧涛, 温广辉, 周佳玲, 郑德智. 智能无人集群系统跨域协同技术研究现状与展望. 中国工程科学, 2024, **26**(1): 117−126)

4 Dong S L, Liu E J, Bian Y G, Wu Z G, Liu M Q. Cooperative fuzzy event-based tracking control of heterogeneous multiple marine vehicles with a nonautonomous leader. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, **55**(9): 4158−4169

5 Dong S L, Lai Z Y, Wu Z G, Liu M Q, Chen G R. Cooperative quantized event-based fuzzy tracking control of nonlinear autonomous surface vehicles with prescribed performance. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, **22**: 17594−17605

6 Wen G H, Zheng W X, Wan Y. Distributed robust optimization for networked agent systems with unknown nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(9): 5230−5244

7 Ye M J, Han Q L, Ding L, Xu S Y. Distributed Nash equilibrium seeking in games with partial decision information: A survey. *Proceedings of the IEEE*, 2023, **111**(2): 140−157

8 Ye M J, Hu G Q. Distributed Nash equilibrium seeking by a consensus based approach. *IEEE Transactions on Automatic*

Control, 2017, **62**(9): 4811−4818

9 Ye M J, Hu G Q. Game design and analysis for price-based demand response: An aggregate game approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, **47**(3): 720−730

10 Gadjov D, Pavel L. A passivity-based approach to Nash equilibrium seeking over networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(3): 1077−1092

11 de Persis C, Grammatico S. Distributed averaging integral Nash equilibrium seeking on networks. *Automatica*, 2019, **110**: Article No. 108548

12 Zeng X L, Chen J, Liang S, Hang Y. Generalized Nash equilibrium seeking strategy for distributed nonsmooth multi-cluster game. *Automatica*, 2019, **103**: 20−26

13 Zhu Y N, Yu W W, Ren W, Wen G H, Gu J P. Generalized Nash equilibrium seeking via continuous-time coordination dynamics over digraphs. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, **8**(2): 1023−1033

14 Ding L, Chen C, Ye M J, Han Q L. Fully distributed Nash equilibrium seeking: A double-layer adaptive approach. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2025, **36**(7): 13358−13372

15 Deng Z H, Liu Y Y, Chen T. Generalized Nash equilibrium seeking algorithm design for distributed constrained noncooperative games with second-order players. *Automatica*, 2022, **141**: Article No. 110317

16 Shi Xia-Sheng, Ren Lu, Sun Chang-Yin. Distributed adaptive generalized Nash equilibrium algorithm for aggregative games. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(6): 1210−1220
(时侠圣, 任璐, 孙长银. 自适应分布式聚合博弈广义纳什均衡算法. 自动化学报, 2024, **50**(6): 1210−1220)

17 Wen Li-Yan, Liu Yu, Jiang Bin, Ma Ya-Jie, Cui Yu-Kang. Adaptive disturbance rejection for mixed relative degree heterogeneous multi-agent systems with switching topology. *Acta Automatica Sinica*, 2026, **52**(1): 121−136
(文利燕, 刘宇, 姜斌, 马亚杰, 崔玉康. 切换拓扑下混合相对阶异构多智能体系统自适应扰动抑制设计. 自动化学报, 2026, **52**(1): 121−136)

18 Du H, Wen G H, Cheng Y Y, He Y G, Jia R T. Distributed finite-time cooperative control of multiple high-order nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, **28**(12): 2998−3006

19 Fang X, Lu J H, Wen G H. Distributed finite-time Nash equilibrium seeking for non-cooperative games. *CSIAM Transactions on Applied Mathematics*, 2021, **2**(1): 162−174

20 Sun X H, Du H B, Chen W L, Zhu W W. Distributed finite-time formation control of multiple mobile robot systems without global information. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2025, **12**(3): 630−632

21 Wang M X, Zhou M T, Qin S T. Fixed-time consensus-based distributed Nash equilibrium seeking for noncooperative game with second-order players. *Neurocomputing*, 2023, **555**: Article No. 126650

22 Hua M H, Yao X Y, Liu W J, Geng M J, Lv M L. Optimizing fixed-time generalized Nash equilibrium seeking in multi-autonomous aerial vehicle games. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2025, **61**(3): 6339−6353

23 Liu J, Ran G T, Wu Y B, Xue L, Sun C Y. Dynamic event-triggered practical fixed-time consensus for nonlinear multiagent systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, **69**(4): 2156−2160

24 Poveda J I, Krstic M, Başar T. Fixed-time Nash equilibrium seeking in time-varying networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(4): 1954−1969

25 Sun M W, Liu J, Ren L, Sun C Y. Fixed-time consensus-based Nash equilibrium seeking. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2024, **11**(1): 267−269

26 Zhou S H, Deng C, Fan S, Wang B H. Fixed-time resilient distributed NE seeking control for nonlinear MASs against DoS attacks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, **55**(7): 3368−3378

27 Zhang Miao-Miao, Ye Mao-Jiao, Zheng Yuan-Shi. Prescribed-time distributed optimization and Nash equilibrium seeking. *Control Theory and Applications*, 2022, **39**(8): 1397−1406
(张苗苗, 叶茂娇, 郑元世. 预设时间下的分布式优化和纳什均衡点求解. 控制理论与应用, 2022, **39**(8): 1397−1406)

28 Chen Y Y, Hua Y Z, Feng Z, Dong X W. Adaptive prescribed-time distributed Nash equilibrium seeking for networked games with heterogeneous dynamics and unknown uncertainties. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2025, **12**(2): 1744−1755

29 Rui J Y, Ding L, Ye M J, Ning B D. Prescribed-time distributed integral sliding-mode-based least-norm Nash equilibrium seeking in monotone games under disturbances. *IEEE Transactions on Cybernetics*, DOI: 10.1109/TCYB.2025.3632288

30 Liu J, Yi P. Predefined-time distributed Nash equilibrium seeking for noncooperative games with event-triggered communication. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, **70**(9): 3434−3438

31 Qian C, Ding L. Prescribed-time fully distributed Nash equilibrium seeking strategy in networked games. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2024, **11**(1): 261−263

32 Xu B, Li Y X. Prescribed-time fully distributed Nash equilibrium seeking of nonlinear multi-agent systems over unbalanced digraphs. *Automatica*, 2024, **169**: Article No. 111847

33 Lian Y X, Zhang B Y, Yuan D M, Yao Y, Song B. Prescribed-time distributed resource allocation algorithm for heterogeneous linear multi-agent networks with unbalanced directed communication. *Applied Mathematics and Computation*, 2025, **503**: Article No. 129498

34 Chen Y Y, Li X D, Feng Z, Hua Y Z, Dong X W. Prescribed-time Nash equilibrium seeking for multicoalition games with heterogeneous general linear dynamics over unbalanced digraphs. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, **55**(12): 5803−5815

35 Facchinei F, Kanzow C. Generalized Nash equilibrium problems. *Annals of Operations Research*, 2010, **175**(1): 177−211

36 Benner P, Findeisen R, Flockerzi D, Reichl U, Sundmacher K. *Large-scale Networks in Engineering and Life Sciences*. Cham: Springer International Publishing, 2014. 17−19

37 Ruszczyński A P. *Nonlinear Optimization*. Princeton: Princeton University Press, 2006. 125−132

38 Charalambous T, Rabbat M G, Johansson M, Hadjicostis C N. Distributed finite-time computation of digraph parameters: Left-eigenvector, out-degree and spectrum. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2016, **3**(2): 137−148



朱亚楠　南京信息工程大学自动化学院副教授. 2019 年获得东南大学数学专业博士学位. 主要研究方向为分布式优化与博弈.
E-mail: ynzhu@nuist.edu.cn
(**ZHU Ya-Nan**　Associate professor at the School of Automation, Nanjing University of Information Science and Techno-

logy. She received her Ph.D. degree in mathematics from Southeast University in 2019. Her research interests include distributed optimization and games.)



陈琪瑞 南京信息工程大学自动化学院硕士研究生. 2023 年获得南京信息工程大学电气工程及其自动化专业学士学位. 主要研究方向为多智能体系统与分布式博弈.
E-mail: 202412492019@nuist.edu.cn
(**CHEN Qi-Rui** Master student at the School of Automation, Nanjing University of Information Science and Technology. She received her bachelor degree in electrical engineering and automation from Nanjing University of Information Science and Technology in 2023. Her research interests include multi-agent systems and distributed games.)



李 涛 南京信息工程大学自动化学院教授. 2008 年获得东南大学控制理论与控制工程专业博士学位. 主要研究方向为时滞系统的故障检测与容错控制. 本文通信作者.
E-mail: litaojia@nuist.edu.cn
(**LI Tao** Professor at the School of Automation, Nanjing University of Information Science and Technology. He received his Ph.D. degree in control theory and control engineering from Southeast University in 2008. His research interests include fault detection and fault-tolerant control for time-delay systems. Corresponding author of this paper.)